

Die Axiome der Geometrie

1. Axiom: Inzidenzaxiom. Es gibt Punkte und Geraden; jede Gerade ist eine Teilmenge der Punktmenge. Durch je zwei verschiedene Punkte P und Q gibt es genau eine Gerade; diese Gerade bezeichnen wir mit PQ . Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

2. Axiom: Linealaxiom. Je zwei Punkten P, Q ist ihr Abstand $|PQ|$ zugeordnet; $|PQ|$ ist eine reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:

- a) $|PQ| \geq 0$, $|PQ| = 0$ genau dann, wenn $P = Q$;
- b) $|PQ| = |QP|$;
- c) $|PQ| \leq |PR| + |RQ|$; Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung.

Wir fordern weiterhin, dass jede nichtnegative reelle Zahl auch als Abstand vorkommen kann

Definition: Gegeben sind drei verschiedene Punkte P, R, Q auf einer Geraden. Wir sagen, R liegt dann **zwischen** P und Q , wenn gilt: $|PQ| = |PR| + |RQ|$. Wir schreiben dann $P-R-Q$.

Definition: Seien A und B zwei verschiedene Punkte.

Dann besteht die **Strecke** $[AB]$ aus den Punkten A und B und allen Punkten der Geraden AB , die zwischen A und B liegen.

Unter einem **Strahl** $[AB$ verstehen wir die Punkte A und B , sowie alle Punkte X zwischen A und B und alle Punkte Y für die gilt, dass B zwischen A und Y liegt.

Definition: Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, dann bezeichnen wir mit **Dreieck** ABC oder $\triangle ABC$ die Punktmenge mit den **Ecken** A, B, C und den **Seiten** $[AB], [BC], [CA]$. $\triangle ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Die Seiten eines Dreiecks sind also Strecken und keine Geraden.

3. Axiom: Axiom von Pasch. (Moritz Pasch, 1843 - 1930). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, und sei g eine Gerade, die keine Ecke des Dreiecks enthält. Dann gilt: Wenn g eine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ trifft, dann trifft g genau eine weitere Seite von $\triangle ABC$.

Definition:

Seien A, B zwei Punkte der Ebene, g eine Gerade der Ebene mit $A \notin g$ und $B \notin g$. A und B liegen **auf derselben Seite von** g , wenn $[AB] \cap g = \{ \}$.

Unter einer offenen Halbebene $H(g, A \notin g)$ verstehen wir die Menge aller Punkte der Ebene, die mit A auf derselben Seite von g liegen.

Definition: Seien R, S und T drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist der **Winkel** $\angle RST$ die Vereinigung der Strahlen $[SR$ und $[ST$, das heißt:

$$\angle RST = [SR \cup [ST.$$

Man nennt S den **Scheitel** und [SR und [ST die **Schenkel** des Winkels $\angle RST$. Wenn wir die Ebene noch orientieren, d. h. einen Umlaufsinn dreier Punkte festlegen, die nicht auf einer Geraden liegen, dann können wir auch von einem orientierten Winkel sprechen und zwischen $\angle RST$ und $\angle TSR$ unterscheiden.

In einem Dreieck $\triangle ABC$ können wir die Winkel übersichtlich und kurz bezeichnen: Winkel eines Dreiecks, $\angle A$ ist der Winkel $\angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle BCA$. Man nennt $\angle A$ den „Winkel bei A“ und spricht von den Winkeln $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ des Dreiecks $\triangle ABC$.

4. Axiom: Geodreieckaxiom. Jedem Winkel $\angle RST$ wird ein Winkelmaß $|\angle RST|$ zugeordnet. Dies ist eine reelle Zahl x mit zwischen $0 < x < 180$. Diese Zuordnung hat die folgenden beiden Eigenschaften:

(1) Seien g eine Gerade, R und S zwei Punkte auf g , und H eine der beiden Halbebene $H(P, g)$, $P \notin g$. α sei eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Dann gibt es einen Punkt T in $H(P, g)$ so dass der Winkel $\angle RST$ genau das Maß α hat.

(2) Sei U ein Punkt im Innern des Winkels $\angle RST$. Dann ist

$$|\angle RST| = |\angle TSU| + |\angle USR|.$$

Definition: Wir nennen zwei Strecken **kongruent**, wenn sie gleich lang sind; zwei Winkel heißen **kongruent**, wenn sie das gleiche Maß haben. Zum Beispiel sind alle Winkel vom Maß 30° kongruent.

Definition. Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ Dreiecke. Wir sagen, dass $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ **kongruent** sind (und schreiben dafür $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$), falls folgende Aussagen gelten:

$$|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$$

und

$$|\angle A| = |\angle A'|, |\angle B| = |\angle B'|, |\angle C| = |\angle C'|.$$

5. Axiom: Kongruenzaxiom. Es gilt der Kongruenzsatz SWS.

6. Axiom: Parallelenaxiom. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch P , die keinen Punkt mit g gemeinsam hat („parallel“ zu g ist).

7. Axiom: Kongruente Flächen haben den gleichen Flächeninhalt:

a) $F_1 \cong F_2 \Rightarrow |F_1| = |F_2|$

b) Ist eine Fläche in n Teilflächen $F_1, F_2, \dots, F_n$ zerlegt, so gilt:

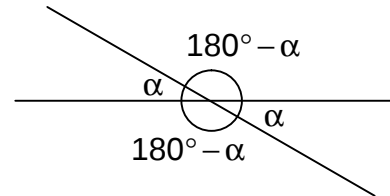
$$|F| = |F_1| + |F_2| + \dots + |F_n|$$

Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a, b \in \mathbf{R}$ hat den Flächeninhalt $a \cdot b$. Insbesondere hat dann ein Quadrat der Seitenlänge a den Flächeninhalt a^2 .

Winkelsätze an Geradenkreuzungen

Scheitelwinkelsatz

Nebenwinkelsatz



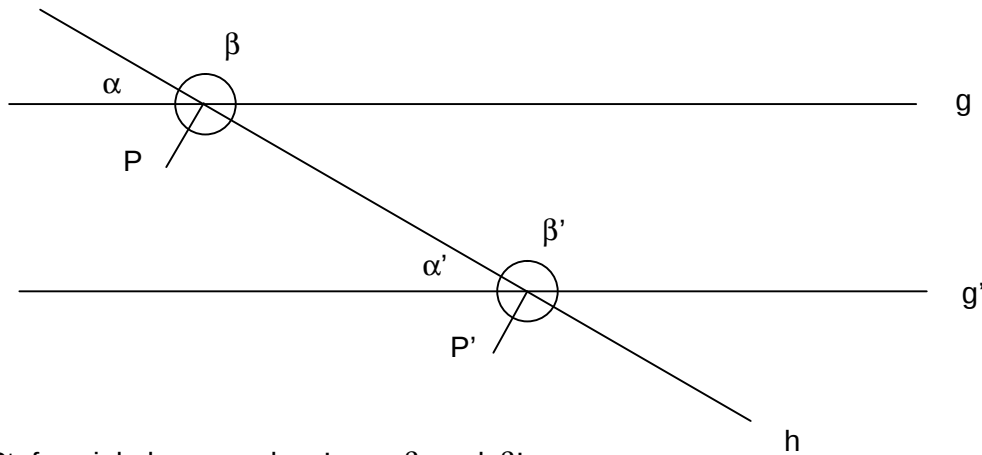
Stufenwinkelsatz

Stufenwinkel haben gleiches Maß genau dann, wenn g' parallel zu g ist.

Formale Fassung:

$$\alpha' = \alpha \Rightarrow g' \parallel g$$

$$g' \parallel g \Rightarrow \alpha' = \alpha$$



Stufenwinkel: α und α' , β und β' ,

Behauptung: $\alpha' = \alpha \Rightarrow g' \parallel g$

Beweis:

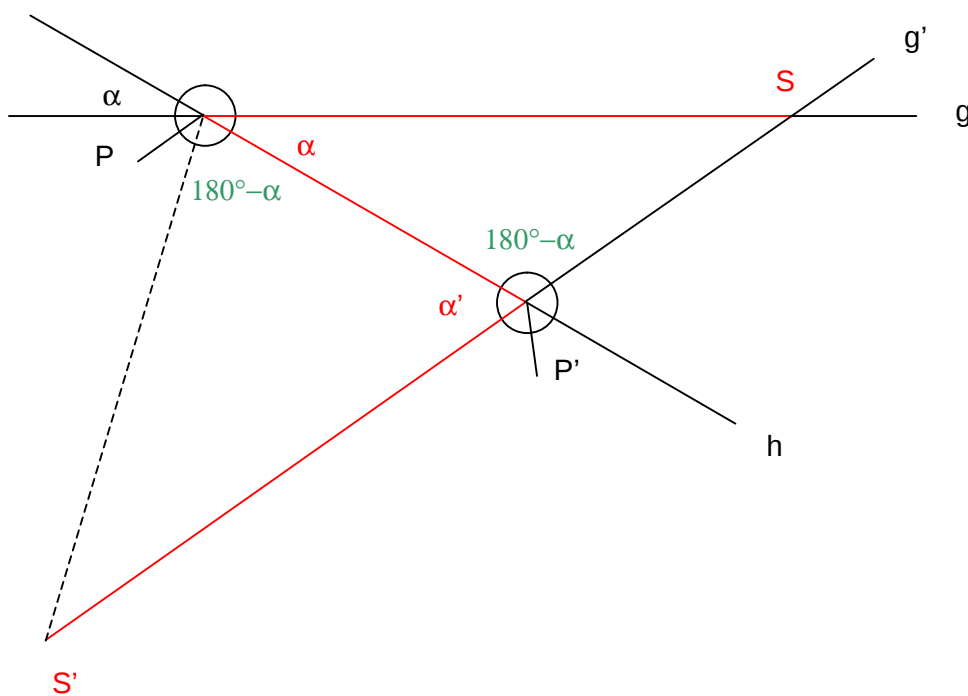
Angenommen es wäre g' nicht parallel zu g . Dann hätten g' und g einen Schnittpunkt S .

Auf g' markiert man den Punkt S' , der von P' die gleiche Entfernung hat wie S von P .

Nach dem Kongruenzaxiom (SWS) sind die Dreiecke $P'PS$ und $PP'S'$ kongruent und entsprechende Winkel sind gleich groß, speziell die Winkel bei P und P' sind $180^\circ - \alpha$.

Der Winkel SPS' hat das Maß $\alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$, das heißt, die Punkte S, P, S' sind kollinear und S' liegt auf g .

Damit haben also g' und g zwei Schnittpunkte S, S' , was einen Widerspruch darstellt.



Behauptung: $g' \parallel g \Rightarrow \alpha' = \alpha$

Beweis:

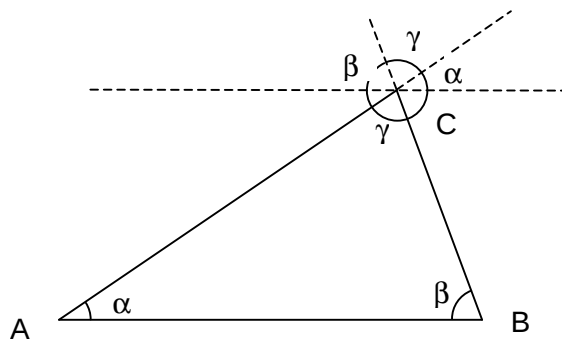
Angenommen $\alpha' < \alpha$. Dann gäbe es durch den Punkt P' eine Gerade g'' , die mit h einen Winkel α einschließt. g'' ist deshalb parallel zu g . Das heißt durch den Punkt P' gibt es zwei zu g parallele Geraden g' und g'' , was im Widerspruch zum Parallelenaxiom steht.

Winkelsummensatz im Dreieck

Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180° .

Beweis:

Wir zeichnen durch C die Parallele zu AB. Aufgrund des Stufenwinkelsatzes folgt die Behauptung.



Hat ein Dreieck einen rechten Winkel, so sind die beiden anderen Winkel spitz.

Beweis:

Sei $\gamma = 90^\circ$. Dann folgt nach dem Winkelsummensatz, dass $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist, als $\alpha < 90^\circ$ und $\beta < 90^\circ$.

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder nicht anliegende Innenwinkel.

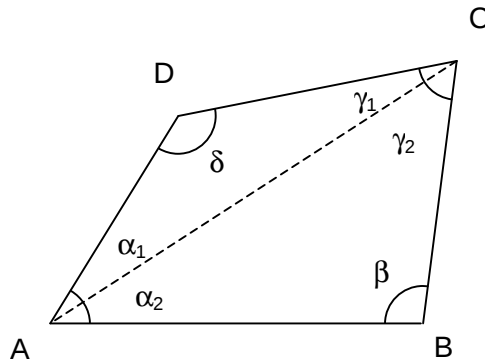
Beweis:

Sei α' der zu α gehörende Außenwinkel, d.h. $\alpha' + \alpha = 180^\circ$. Nach dem Winkelsummensatz folgt $\alpha' = 180^\circ - \alpha = \alpha + \beta + \gamma - \alpha = \beta + \gamma$. Also ist $\alpha' > \beta$ und $\alpha' > \gamma$.
q.e.d.

Winkelsummensatz im Viereck

Die Summe der Innenwinkel im Viereck beträgt 360° .

Beweis:

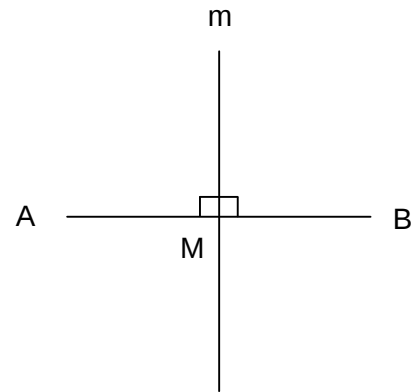


Die Diagonale [AC] teilt das Viereck in die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ und die Innenwinkel α und β in die Teilwinkel α_1 und α_2 bzw. γ_1 und γ_2 . Nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \gamma_1 + \delta = 180^\circ \\ \alpha_2 + \beta + \gamma_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Definition der Mittelsenkrechten

1. gegeben: Strecke $[AB]$
2. $M \in [AB]$ mit $MA=MB$
3. m durch M mit $m \perp AB$
4. m heißt Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$



Charakterisierung der Mittelsenkrechten

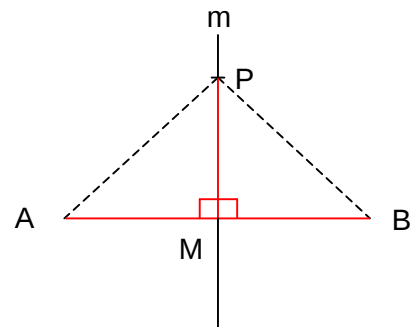
Ein Punkt P liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten von $[AB]$, wenn $PA=PB$

Kurz: $P \in m \Leftrightarrow PA=PB$

Beweis:

„ $P \in m \Rightarrow PA=PB$ “ :

Die Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$ sind nach dem Kongruenzaxiom (SWS) kongruent, das heißt, dass die Seiten $[PA]$ und $[PB]$ gleich lang sind.



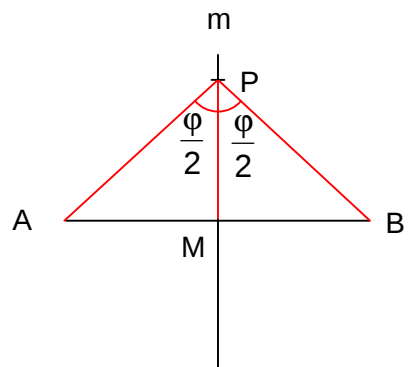
„ $PA=PB \Rightarrow P \in m$ “ :

$\varphi := \angle APB$

Sei m die Winkelhalbierende von φ

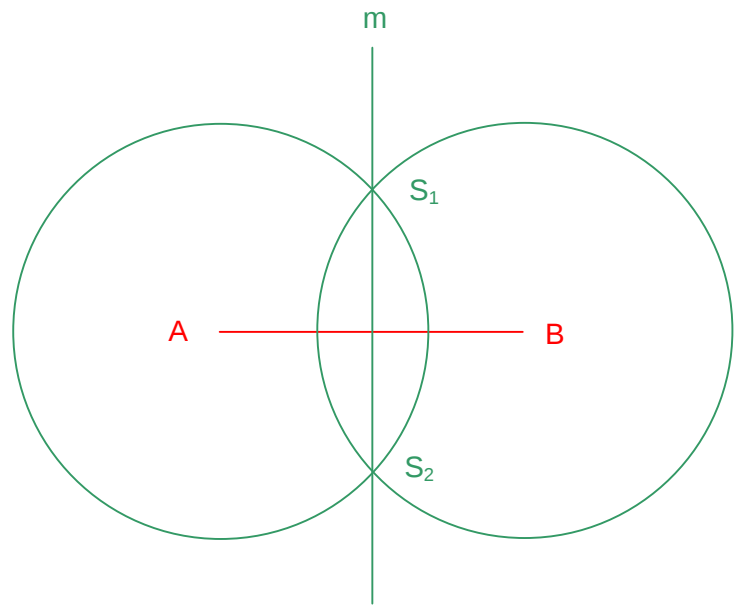
Die Dreiecke $\triangle APM$ und $\triangle BPM$ sind nach dem Kongruenzaxiom (SWS) kongruent, das heißt, dass die Seiten $[AM]$ und $[BM]$ gleich lang und die Winkel $\angle PMA$ und $\angle PMB$ gleich groß, also 90° sind.

Also sind M Mitte und m Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$ und $P \in m$.



Konstruktion der Mittelsenkrechten m der Strecke [AB]

1. gegeben: [AB]
2. $K_{A;r}$, $K_{B;r}$, $r > \frac{|AB|}{2}$
3. $K_{A;r} \cap K_{B;r} = \{S_1, S_2\}$
4. $m = S_1S_2$



Basiswinkelsatz

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenkelig, wenn die Basiswinkel gleich sind.

$$|CA| = |CB| \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Beweis:

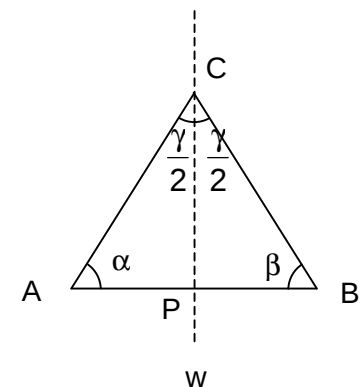
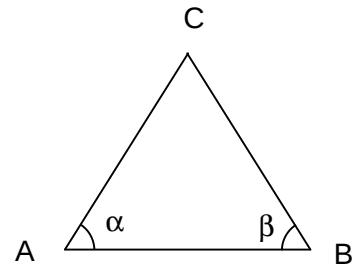
„ $|CA| = |CB| \Rightarrow \alpha = \beta$ “ :

$\gamma := \angle ACB$

Winkelhalbierende w von γ schneidet AB in P

Die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ sind nach dem Kongruenzaxiom (SWS) kongruent, das heißt die Winkel α und β sind gleich groß.

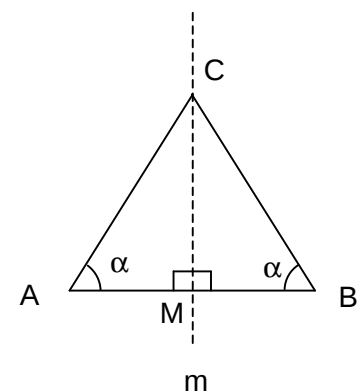
Anders: Nach Voraussetzung folgt, dass C auf der Mittelsenkrechten m von $[AB]$ liegt. Nach dem Kongruenzaxiom (SWS) sind die Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle BMC$ kongruent und insbesondere $\alpha = \beta$.



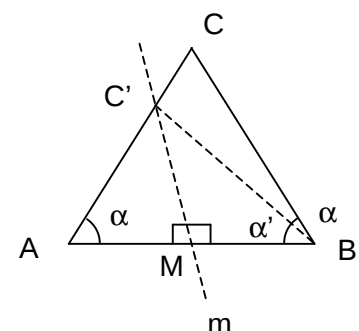
„ $\alpha, \beta = \alpha \Rightarrow |CA| = |CB|$ “ :

Sei m die Mittelsenkrechte von $[AB]$ durch M .

Wenn C auf m liegt, dann folgt nach dem Kongruenzaxiom (SWS), dass die Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle BMC$ kongruent sind. Insbesondere ist also $|CA| = |CB|$.



Andernfalls schneidet m nach dem Axiom von Pasch eine weitere Seite des Dreiecks $\triangle ABC$, z.B. $[AC]$ in C' . Nach dem Kongruenzaxiom (SWS) sind die Dreiecke $\triangle AMC'$ und $\triangle BMC'$ kongruent und insbesondere $\alpha = \alpha'$. Also ist $\alpha = \alpha' < \alpha$, was einen Widerspruch darstellt.



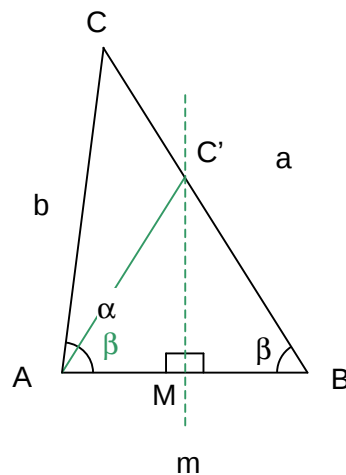
Seite und Gegenwinkel

Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber und dem größeren Winkel die größere Seite.

Beweis:

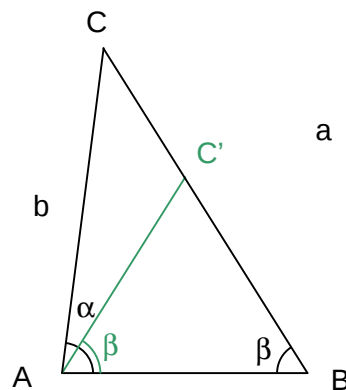
$$„a > b \Rightarrow \alpha > \beta“$$

Errichtet man auf der Seite [AB] die Mittelsenkrechte m , so schneidet m die Seite [BC] in C' und das Dreieck $\triangle ABC'$ ist gleichschenkelig mit den Basiswinkeln β . (Bemerkung: m kann die Seite [AC] nicht schneiden, denn wäre C'' der Schnittpunkt von m mit [AC], dann wäre $b = |AC| = |AC''| + |C''C| = |BC''| + |C''C| > |BC| = a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.). Weil C' im Inneren des Winkels α liegt, ist $\beta < \alpha$, also $\alpha > \beta$.



$$„\alpha > \beta \Rightarrow a > b“$$

Wir tragen in A an AB den Winkel β an, so daß der Schenkel die Seite [BC] in C' schneidet. Nach der Dreiecksungleichung und dem Basiswinkelsatz gilt dann $a = |BC| = |BC'| + |C'C| = |AC'| + |C'C| > |AC| = b$. q.e.d.



Definition der Kongruenz

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ heißen kongruent, wenn sie in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen.

$$c = |AB| = |A'B'| = c'$$

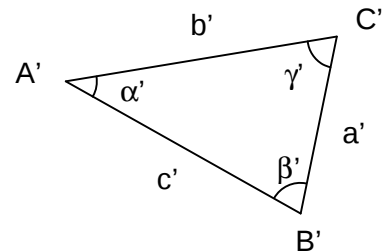
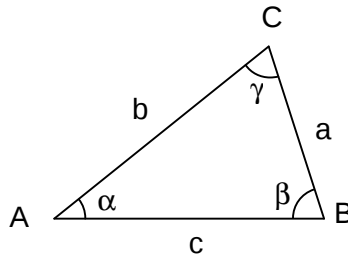
$$a = |BC| = |B'C'| = a'$$

$$b = |CA| = |C'A'| = b'$$

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

$$\gamma = \gamma'$$



Kongruenzaxiom (SWS)

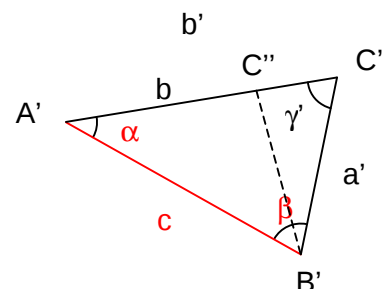
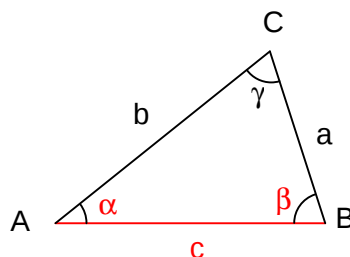
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Die folgenden Kongruenzsätze basieren auf dem Kongruenzaxiom bzw. auf dem aus dem Kongruenzaxiom folgenden Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke.

Kongruenzsatz (WSW)

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Beweis:



Sei $c = c'$ $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$

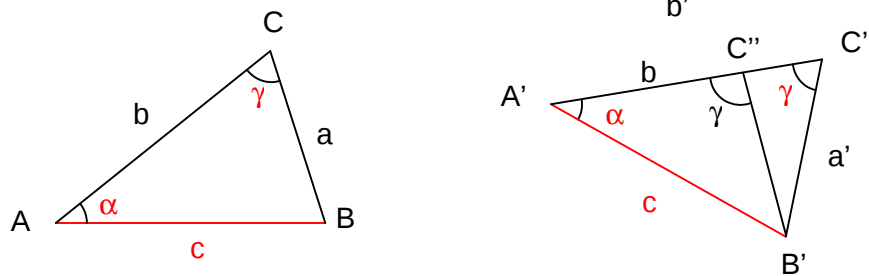
1. Fall: Falls $b' = b$ ist, sind die Dreiecke nach dem Kongruenzaxiom (SWS) kongruent.

2. Fall: Falls o.B.d.A. $b' < b$ ist, gibt es einen Punkt C'' auf b' , so dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C''$ nach dem Kongruenzaxiom (SWS) kongruent sind. Da C'' im Innern des Winkels β liegt, wäre $\beta = \angle C''B'A' < \angle C'B'A' = \beta$, was einen Widerspruch darstellt.

Kongruenzsatz (WWS)

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis:



1. Fall

$A'C' = AC \Rightarrow$ (SWS) $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$

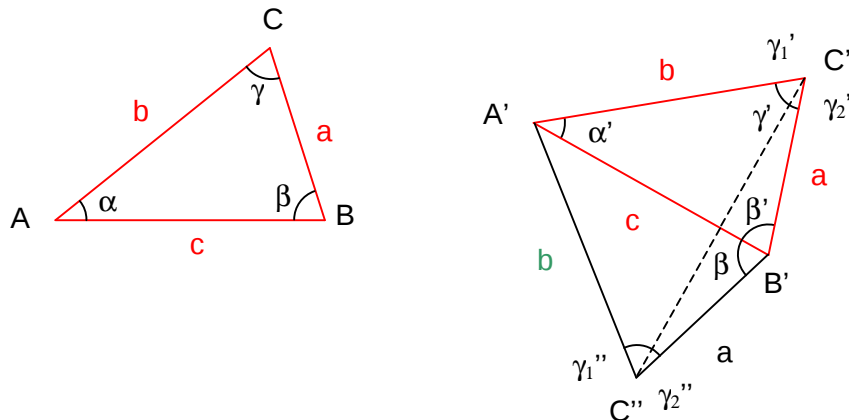
1. Fall

$A'C' > AC \Rightarrow$ es gibt ein Punkt C'' mit $A'C''C'$ und $|A'C''| = |AC| \Rightarrow$ (SWS) $\triangle A'C''B' \cong \triangle ABC \Rightarrow$ Winkelsumme im $\triangle C'C''B'$ ist größer als 180° , was einen Widerspruch darstellt.

Kongruenzsatz (SSS)

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen.

Beweis:



Wir konstruieren nach dem Kongruenzaxiom (SWS) ein zum Dreieck $\triangle ABC$ kongruentes Dreieck $\triangle A'B'C''$. Die Dreiecke $\triangle C'C''B'$ und $\triangle C'C''A'$ sind gleichschenkelig und deshalb sind die Basiswinkel gleich: $\gamma_1' = \gamma_1''$, $\gamma_2' = \gamma_2''$.

Die Winkel γ' bei C' bzw. γ'' bei C'' sind dann ebenfalls gleich:

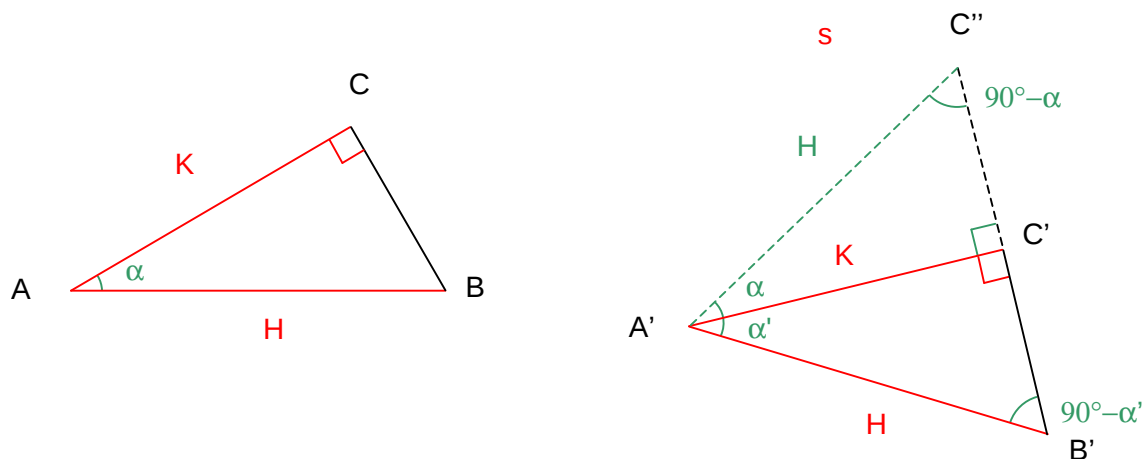
$$\gamma' = \gamma_1' + \gamma_2' = \gamma_1'' + \gamma_2'' = \gamma''$$

Aufgrund des Kongruenzaxioms (SWS) sind auch die beiden Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle A'B'C''$ kongruent, das heißt $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ sind aufgrund der Transitivität kongruent.

Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke

Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen.

Beweis:



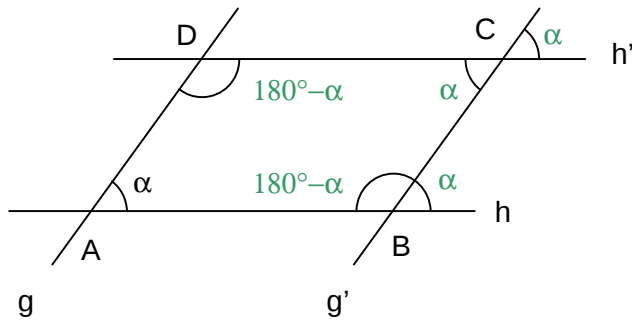
Wir konstruieren an das Dreieck $\triangle A'B'C'$ ein zum Dreieck $\triangle ABC$ kongruentes Dreieck $\triangle A'C''C'$, indem wir an die Kathete K den Winkel α und einen 90° -Winkel antragen (WSW). Das dadurch entstandene große Dreieck $\triangle A'B'C''$ ist gleichschenkelig mit den Basiswinkeln $90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha'$. Aufgrund des Winkelsummensatzes hat das Dreieck $\triangle A'B'C'$ bei A' ebenfalls den Winkel α . Nach dem Kongruenzaxiom (SWS) ist das Dreieck $\triangle A'B'C'$ kongruent zum Dreieck $\triangle A'C''C'$ und nach der Transitivität auch kongruent zu $\triangle ABC$.

Bemerkung:

Den Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke benötigt man für die Charakterisierung der Winkelhalbierenden.

Parallelogramm

Voraussetzungen: Winkelsätze, Kongruenzsätze



$g \parallel g'$ und $h \parallel h'$

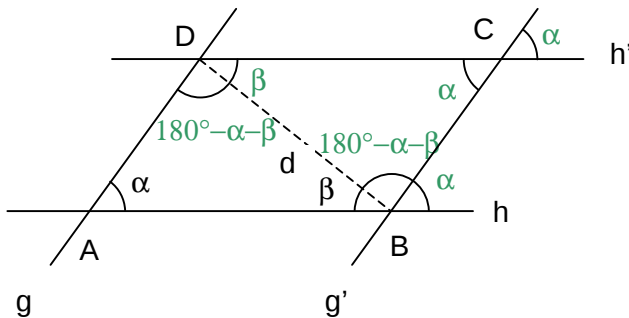
1. Das Viereck ABCD heißt Parallelogramm.

Aufgrund der Winkelsätze folgt:

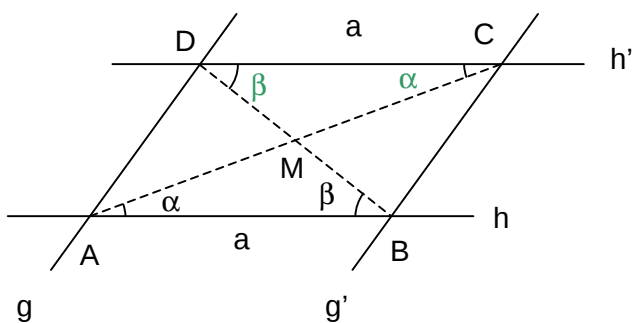
2. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß. Nebeneinander liegende Winkel ergänzen sich zu 180° .

Aufgrund des Kongruenzsatzes (WSW) folgt:

3. Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.



4. Die Diagonalen halbieren einander.



Die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle CDM$ sind aufgrund des Kongruenzsatzes (WSW) kongruent, also gilt :
 $AM = CM$, $BM = DM$

Lot von P auf g

Gegeben sei ein Punkt P und eine Gerade g. Dann gibt es eine Gerade l durch P, die senkrecht auf g steht. Die Gerade l ist eindeutig bestimmt.

Die Gerade l heißt **Lot durch P auf g**.

Der Schnittpunkt F von l mit g heißt **Lotfußpunkt**.

Beweis:

Existenz von l:

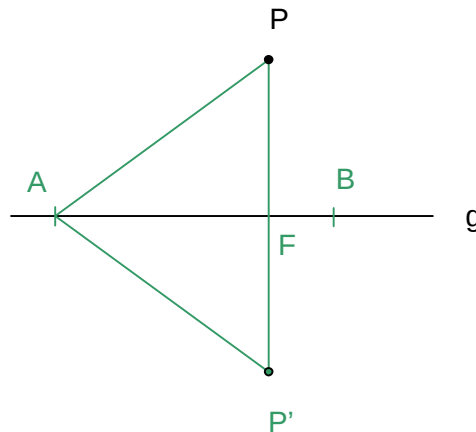
1. Fall: $P \in g$

Nach dem Geodreiecksaxiom existieren zum Winkelmaß 90° Punkte $Q \in g$ und $R \notin g$ mit $\angle QPR = 90^\circ$

2. Fall: $P \notin g$

Wir wählen zwei Punkte a und B auf g. Nach dem Geodreiecksaxiom gibt es einen Punkt P' mit folgenden Eigenschaften:

- P und P' liegen auf verschiedenen Halbebenen von g
- $\angle BAP = \angle BAP'$
- $|PA| = |PA'|$



F sei der Schnittpunkt der Geraden PP' mit g.

Falls $S = A$ ist, sind die Winkel $\angle BAP$ und $\angle BAP'$ kongruente Nebenwinkel und haben damit das Maß 90° . Die Gerade PP' ist also das gewünschte Lot l durch P auf g.

Falls $F \neq A$ ist, sind die Dreiecke $\triangle PAF$ und $\triangle P'AF$ nach dem Kongruenzaxiom (SWS) kongruent, so dass die Winkel $\angle PFA$ und $\angle P'FA$ kongruente Nebenwinkel sind und damit das Maß 90° haben. Auch in diesem Fall ist die Gerade PP' das gewünschte Lot l durch P auf g.

Eindeutigkeit von l:

Gäbe es durch P zwei Lote auf g, etwa l_1 und l_2 mit den Fußpunkten F_1 und F_2 , so wäre die Winkelsumme im $\triangle PF_1F_2$ größer als 180° im Widerspruch zum Winkelsummensatz.

Definition:

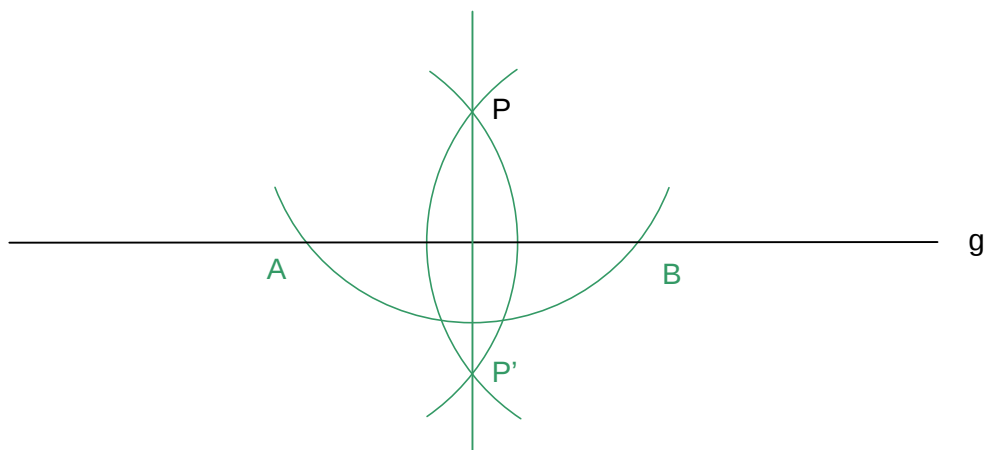
Seien ein Punkt P und eine Gerade g gegeben. Sei l das Lot durch P auf g mit dem Lotfußpunkt F . Die Länge der Strecke $[PF]$ heißt Abstand des IPFI $d(P,g) := |PF|$ heißt **Abstand des Punktes P von g** .

Bemerkung:

Sei P und g gegeben. Für alle $Q \in g$ gilt: $|PQ| \geq d(P,g)$

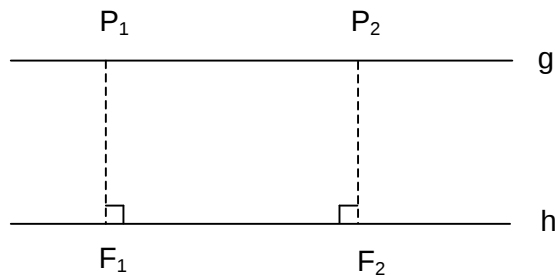
Konstruktion des Lotes l von P auf g

1. Gegeben: P, g
2. $K_{P,r}$ mit $r > d(P,g)$
3. $K_{P,r} \cap g = \{A,B\}$
4. $K_{A,r} \cap K_{B,r} = \{P, P'\}$
5. PP' ist Mittelsenkrechte von $[AB]$, PP' ist das Lot l durch P auf g .



Abstand zweier Parallelen

Gegeben seien die parallelen Geraden g und h . Wählt man auf g zwei Punkte P_1 und P_2 und zeichnet die Lote durch P_1 bzw. P_2 auf h mit den Lotfußpunkten F_1 bzw. F_2 , so entsteht das Parallelogramm $P_1P_2F_2F_1$. Insbesondere sind dann gegenüber liegende Seiten gleich lang, das heißt, es ist $|P_1F_1| = |P_2F_2|$.

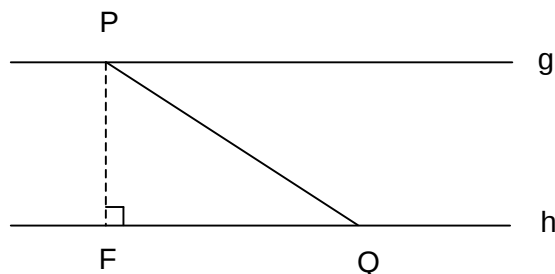


Definition: $d(g,h) := |P_1F_1|$ heißt **Abstand der Geraden g und h** .

Bemerkung:

Sei $g \parallel h$. Für alle $P \in g$ und $Q \in h$ gilt: $|PQ| \geq d(g,h)$

Beweis:



Wir fällen das Lot durch P auf h und erhalten den Lotfußpunkt F . Da im Dreieck $\triangle PFQ$ die Seite PQ dem größten (rechten) Winkel gegenüber liegt, folgt $|PQ| > |PF| = d(g,h)$. Falls $F=Q$ ist, folgt $|PQ| = |PF| = d(g,h)$. q.e.d.

Charakterisierung der Parallelen g zu h im Abstand a

Gegeben sei die Gerade h .

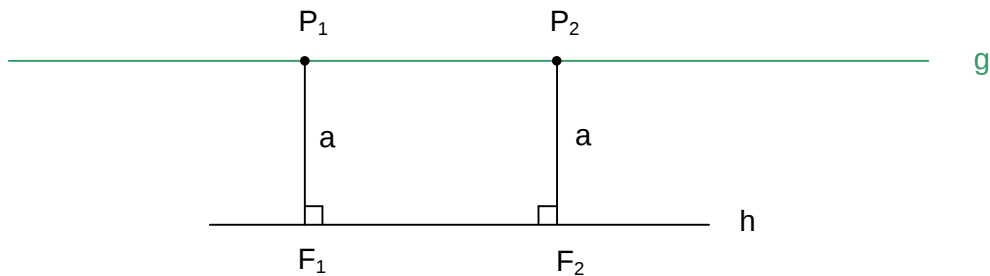
Ist g eine Gerade mit $g \parallel h$, dann gilt: $\forall P_1, P_2 \in g : d(P_1, h) = d(P_2, h)$

Beweis: klar

Umkehrung:

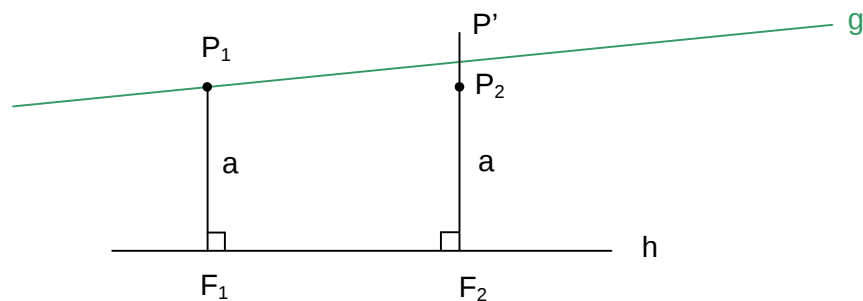
Gegeben sei die Gerade h .

Sind P_1 und P_2 zwei Punkte in der gleichen Halbebene von h mit $d(P_1, h) = d(P_2, h) = a$, dann liegen sie auf der Geraden g mit $g \parallel h$ und $d(g, h) = a$.



Beweis.

Sei g die zu h parallele Gerade durch P_1 . Dann ist $d(g, h) = a$. Wir zeigen, dass g die Gerade P_2F_2 in P_2 schneidet. Wäre nämlich $g \cap P_2F_2 = \{P'\}$ und $P' \neq P_2$, so gälte einerseits $d(P', h) \neq a$ und andererseits $d(P', h) = d(P_1, h) = a$.

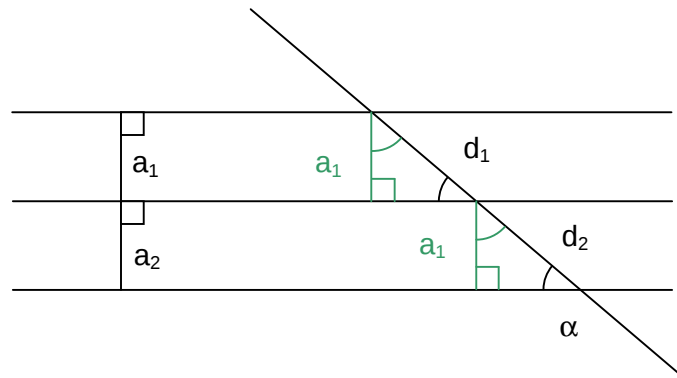


Konstruktion einer Parallelen g zu h im Abstand a

1. Gegeben seien h und a .
2. $F_1, F_2 \in h$
3. Lote l_1, l_2 durch F_1 bzw. F_2 zu h
4. $P_1, P_2 \in l_1$ bzw. l_2 auf der gleichen Halbebene von h mit $|P_1, F_1| = |P_2, F_2| = a$
5. P_1P_2 ist die gesuchte Gerade g

Parallelenschar in gleichem Abstand und Gerade

Gegeben sei eine Parallelenschar die von einer Geraden geschnitten wird.



Behauptung: $a_1 = a_2 \Leftrightarrow d_1 = d_2$

Beweis von " $a_1 = a_2 \Rightarrow d_1 = d_2$ " :

Die beiden Dreiecke mit den gleichen Seiten a_1 bzw. a_2 und den anliegenden Winkeln mit dem Maß 90° und $90^\circ - \alpha$ sind nach dem Kongruenzsatz (WSW) kongruent, und deshalb folgt $d_1 = d_2$.

Beweis von " $d_1 = d_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ " :

Analog nach (SWS).

Winkelhalbierende

Gegeben sei der Winkel $\angle BAC$ mit $\angle BAC = \alpha$. Nach dem Geodreiecksaxiom gibt es einen Punkt X mit $\angle BAX = \frac{1}{2}\alpha$ und $\angle XAC = \frac{1}{2}\alpha$. Die Gerade $w_\alpha = AX$ heißt **Winkelhalbierende**.

(Voraussetzung: Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke, Lot, Abstand Punkt-Gerade)

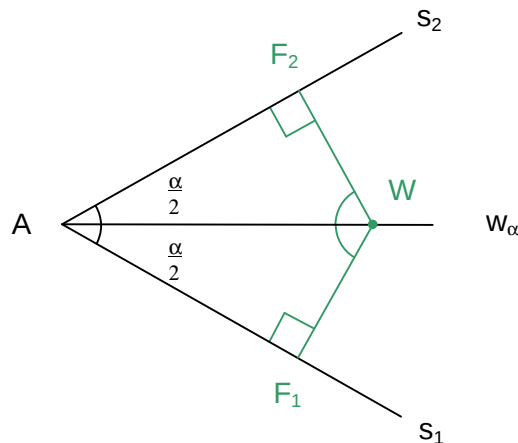
Charakterisierung der Winkelhalbierenden

Gegeben sei der Winkel $\angle(s_1, s_2)$ und ein Punkt W im Inneren des Winkels. W liegt genau dann auf der Winkelhalbierenden, wenn $d(W, s_1) = d(W, s_2)$

Behauptung:

$$W \in w_\alpha \Rightarrow d(W, s_1) = d(W, s_2)$$

Beweis:

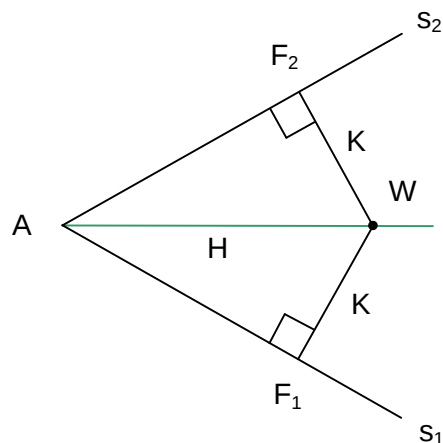


Wir fällen von W das Lot auf die Schenkel s_1, s_2 , die Lotfußpunkte seien mit F_1, F_2 bezeichnet. Die Dreiecke $\triangle AF_1W$ und $\triangle AF_2W$ mit den Winkeln $\frac{\alpha}{2}, 90^\circ, 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ sind aufgrund des Kongruenzsatzes (WSW) kongruent, das heißt $|AF_1| = |AF_2|$ und $|WF_1| = |WF_2|$. q.e.d.

Behauptung:

$$W \text{ mit } d(W, s_1) = d(W, s_2) \Rightarrow W \in w_\alpha$$

Beweis:



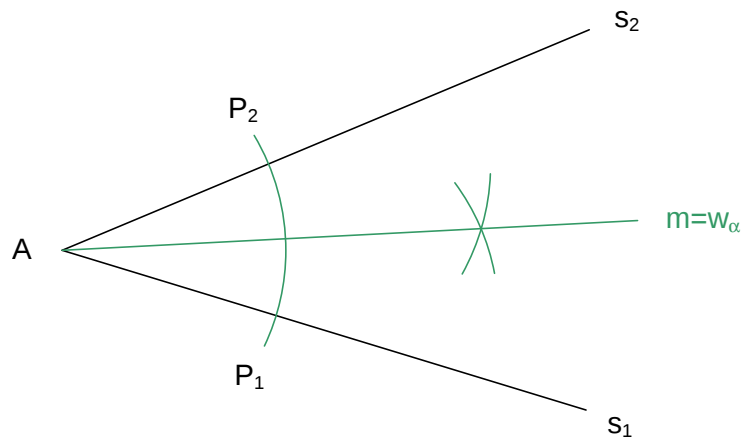
Aufgrund des Kongruenzsatzes für rechtwinklige Dreiecke sind die Dreiecke $\triangle AF_1W$ und $\triangle AF_2W$ kongruent, das heißt, die Winkel bei A sind gleich groß und $W \in w_\alpha$. Außerdem gilt, dass die Fußpunkte gleichweit vom Scheitel entfernt sind: $|AF_1| = |AF_2|$. q.e.d.

Konstruktion der Winkelhalbierenden

(beruht darauf, dass im gleichschenkligen Dreieck die Mittelsenkrechte der Basis und die Winkelhalbierende des Spitzenwinkels identisch sind.)

1. Gegeben sei der Winkel mit dem Scheitel A, den Schenkeln s_1 und s_2 und dem Maß α .
2. $K_{A,r} \cap s_1 = \{P_1\}$ $K_{A,r} \cap s_2 = \{P_2\}$
3. Konstruktion der Mittelsenkrechten m zu $[P_1P_2]$, $m \cap [P_1P_2] = \{M\}$
4. $m = w_\alpha$

Beweis:



Wir zeigen: $A \in m$ und m halbiert α :

Wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ ist $A \in m$.

Die Dreiecke $\triangle AMP_1$ und $\triangle AMP_2$ sind wegen (SWS) kongruent, das heißt, α wird durch m halbiert.

Wir zeigen: w_α halbiert $[P_1P_2]$ und steht senkrecht auf ihr:

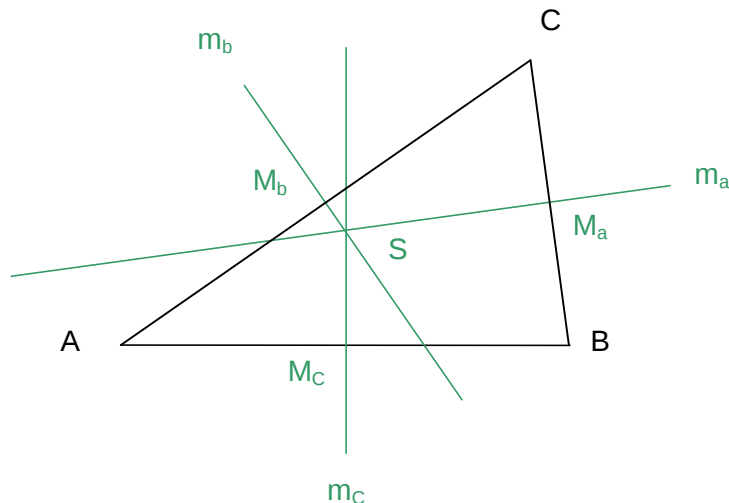
$w_\alpha \cap [P_1P_2] = \{X\}$. Wegen (SWS) sind die Dreiecke $\triangle AXP_1$ und $\triangle AXP_2$ kongruent, das heißt $|XP_1| = |XP_2|$ bzw. $X = M$. Außerdem sind die Winkel bei X Nebenwinkel mit gleichem Maß 90° .

q.e.d.

Besondere Punkte im Dreieck

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S.



Beweis.

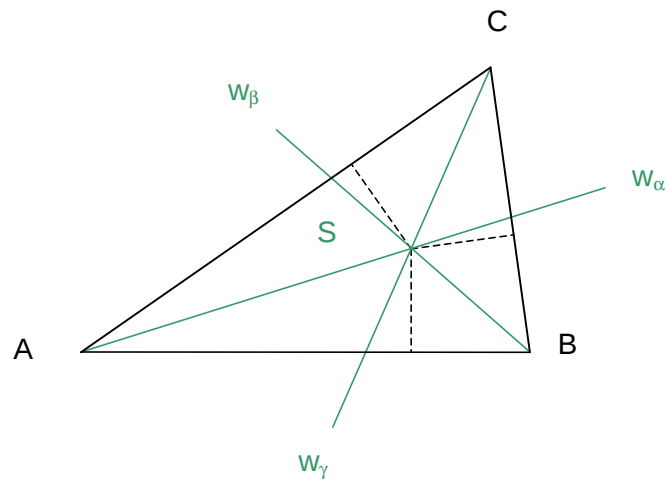
Sei $\{S\} = m_a \cap m_c$. Aufgrund der Eigenschaften der Punkte der Mittelsenkrechten gilt: $|SC| = |SB| = |SA|$, und aus der ersten Gleichung folgt, dass $S \in m_b$.

Bemerkung:

Der Punkt S ist von allen drei Eckpunkten A, B, C des Dreiecks gleich weit entfernt: $|SA| = |SC| = |SB| = r$, das heißt die Ecken A, B, C liegen auf einem Kreis um S mit Radius r. Der Kreis $K_{S,r}$ heißt **Umkreis**.

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Die Winkelhalbierenden $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S.



Beweis.

Sei $\{S\} = w_\alpha \cap w_\gamma$. Aufgrund der Eigenschaften der Punkte der Winkelhalbierenden gilt:

$d(S,c) = d(S,b)$ und $d(S,b) = d(S,a)$.

Daraus folgt, dass $d(S,c) = d(S,a)$ ist, also ist $S \in w_\beta$.

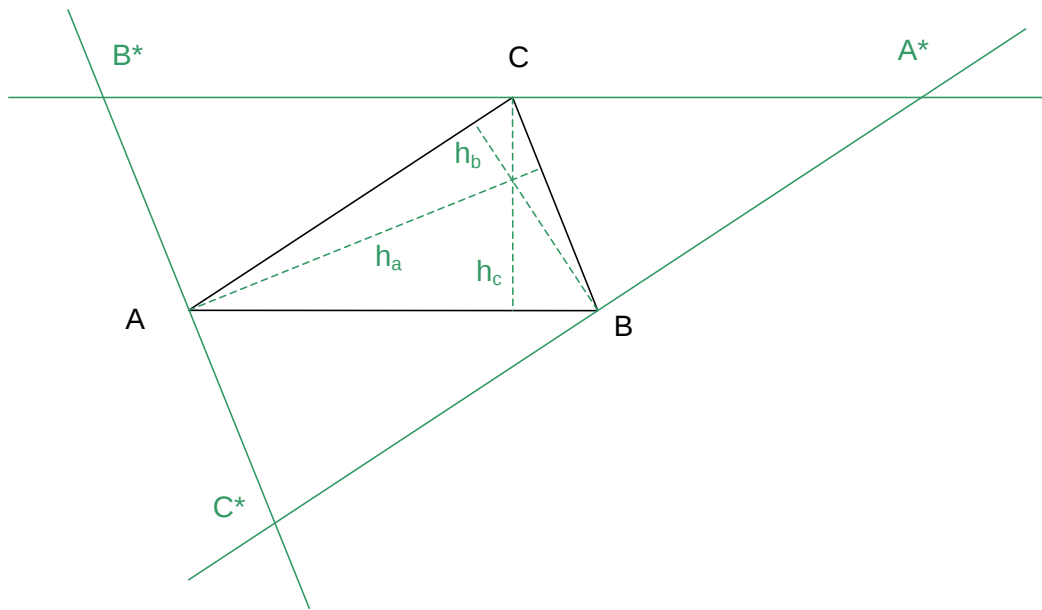
Bemerkung:

Der Punkt S ist von allen drei Seiten a, b, c des Dreiecks gleich weit entfernt: $d(S,a) = d(S,b) = d(S,c) = \rho$. Der Kreis $K_{S,\rho}$ (berührt die Dreiecksseiten und *) heißt **Inkreis**.

*) die Berührbedingung wird in einem späteren Kapitel erklärt

Höhenschnittpunkt

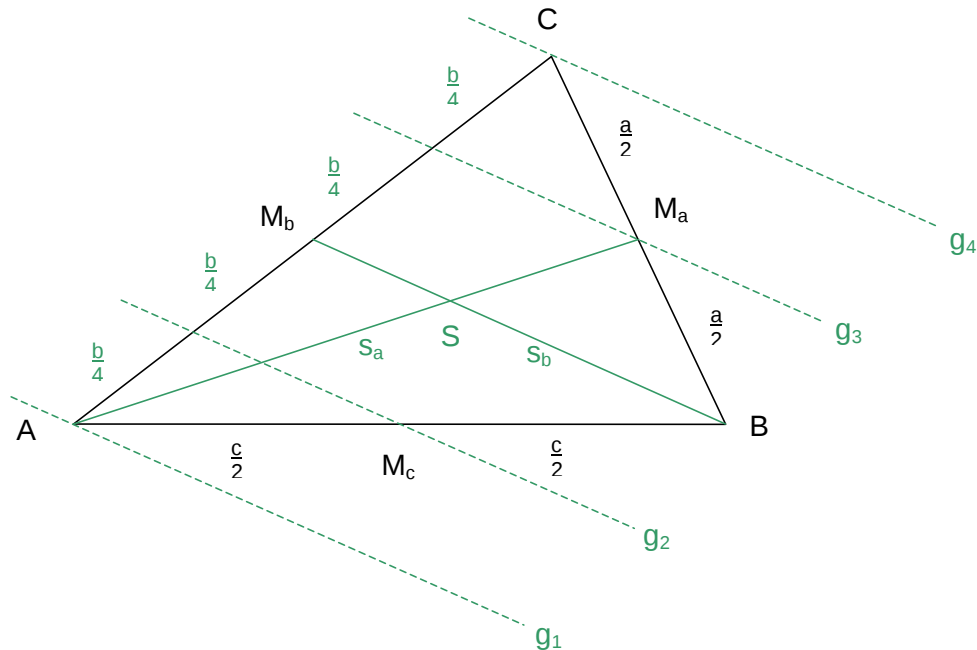
Zieht man durch jeden Eckpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ die Parallelen zur gegenüber liegenden Seite, so entstehen drei zum ursprünglichen Dreieck Dreiecke, die nach dem Kongruenzsatz (WSW) kongruent sind. Die vier Dreiecke bilden zusammen ein großes Dreieck $\triangle A^*B^*C^*$, dessen Mittelsenkrechten die Höhen des ursprünglichen Dreiecks sind, und welche sich in einem Punkt S schneiden. q.e.d.



Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Die Seitenhalbierenden s_a , s_b , s_c eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S .

Beweis.



Es seien M_a, M_b, M_c die Seitenmitten und S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_b . Zieht man durch die Punkte A, M_c, M_a, C die Parallelen g_1, g_2, g_3, g_4 zu s_b , so haben die Geraden g_1 und g_2 den gleichen Abstand wie g_2 und s_b , weil $|AM_c| = |M_cB|$ ist. Mit dem analogen Argument haben die Geraden s_b und g_3 gleichen Abstand wie g_3 und g_4 .

Daher werden die (gleichlangen) Abschnitte $[AM_b]$ und $[M_bC]$ der Seite b von den Geraden g_2 bzw. g_3 halbiert, das heißt, die Seite b wird durch g_2, s_b und g_3 geviertelt.

Daraus folgt, dass die Geraden g_2 und s_b den gleichen Abstand haben wie s_b und g_3 , also haben zwei nebeneinanderliegende Geraden dieser Parallelschar jeweils gleichen Abstand.

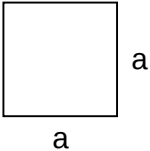
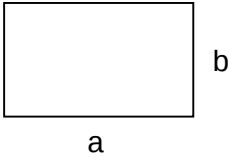
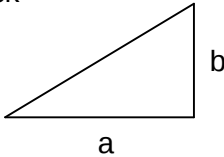
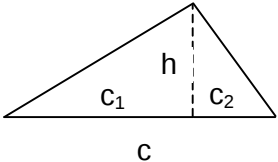
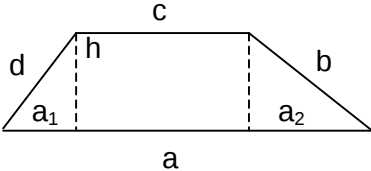
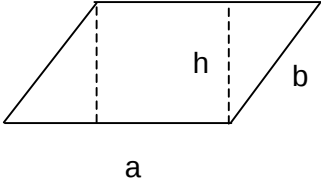
Daraus folgt, dass die Geraden g_2, s_b und g_3 die Seitenhalbierende s_a dritteln, oder anders gesagt, S teilt die Seitenhalbierende s_a im Verhältnis $2:1$.

Analog zeigt man, dass S die Seitenhalbierende s_b im Verhältnis $2:1$ teilt.

Warum liegt S auf der Seitenhalbierenden s_c ?

Sei S' der Schnittpunkt von s_c mit s_b . Dann teilt S' sowohl s_c als auch s_b im Verhältnis $2:1$. Also muss $S'=S$ gelten. q.e.d.

Formeln zum Flächeninhalt

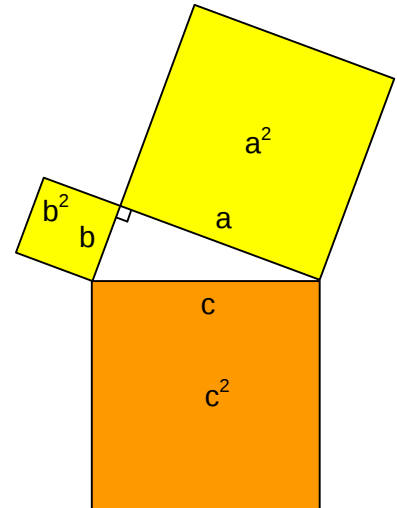
Quadrat 	$A = a \cdot a$
Rechteck 	$A = a \cdot b$
Rechtwinkliges Dreieck 	$A = \frac{a \cdot b}{2}$
Dreieck 	$A = \frac{c_1 \cdot h}{2} + \frac{c_2 \cdot h}{2}$ $A = \frac{(c_1 + c_2) \cdot h}{2}$ $A = \frac{c \cdot h}{2}$
Trapez 	$A = \frac{a_1 \cdot h}{2} + c \cdot h + \frac{a_2 \cdot h}{2}$ $A = \frac{a_1 \cdot h}{2} + \frac{2ch}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2}$ $A = \frac{(a_1 + 2c + a_2) \cdot h}{2}$ $A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$
Parallelogramm 	$c=a$ $A = a \cdot h$

Satz des Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat:

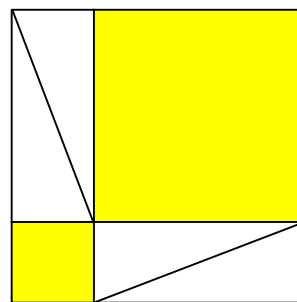
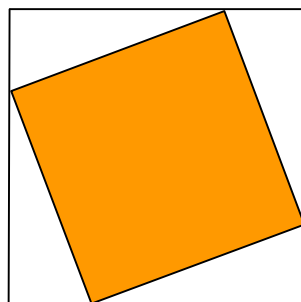
$$a^2 + b^2 = c^2$$

a,b : Katheten (schließen den rechten Winkel ein)
c : Hypotenuse



(Pythagoras: griechischer Mathematiker um ca. 500-580 v. Chr.)

Als die „einfachste“ Beweisfigur zum Satz des Pythagoras gilt die folgende:

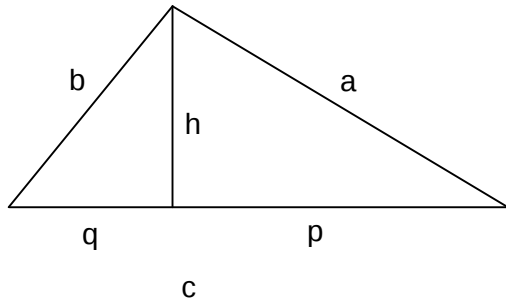


Berechnungen am (allgemeinen) Dreieck

Voraussetzungen: Satz des Pythagoras

Gegeben: a, b, c

Gesucht: p, q, h, A



$$h^2 + p^2 = a^2$$

$$h^2 + q^2 = b^2$$

$$p + q = c$$

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2$$

$$p^2 - (c - p)^2 = a^2 - b^2$$

$$p^2 - c^2 + 2cp - p^2 = a^2 - b^2$$

$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

analog: $q = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$

$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2)}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2c}$$

$$A = \frac{ch}{2}$$

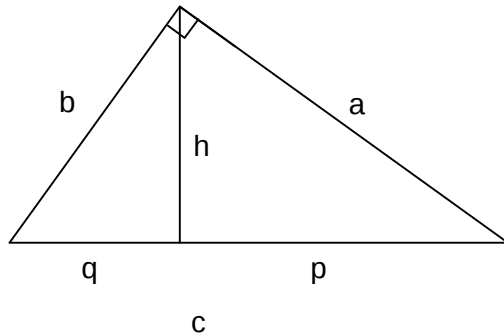
$$A = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{4}$$

Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

(Voraussetzungen : Satz des Pythagoras)

Gegeben: a, b , $\angle(a,b)=90^\circ$

Gesucht: c, p, q, h, A



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

$$p = \frac{a^2 - b^2 + a^2 + b^2}{2c}$$

$$p = \frac{a^2}{c}$$

analog: $q = \frac{b^2}{c}$

Kathetensatz	$a^2 = pc$	$b^2 = qc$
---------------------	------------	------------

$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$h^2 = b^2 - q^2$$

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2$$

$$2h^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

$$2h^2 = (p + q)^2 - p^2 - q^2$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$h^2 = pq$$

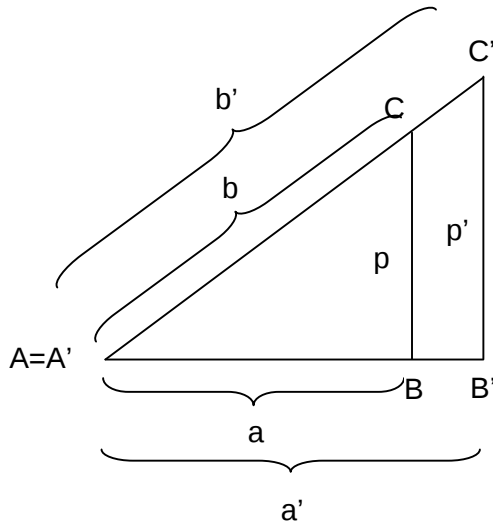
Höhensatz von Euklid	$h^2 = pq$
-----------------------------	------------

$A = \frac{ab}{2}$

Elementare Herleitung der Strahlensätze

(Voraussetzungen: Flächenformeln für Dreieck und Trapez, Satz des Pythagoras)

Gegeben sein ein rechtwinkliges Dreieck D_{ABC} mit den Seiten a, p, b . Verlängert man die Seite $a=AB$ bis zu B' und errichtet in B' die Parallele p' zu p , und verlängert man die Seite $b=AC$, so dass der Schnittpunkt C' gebildet wird, so erhält man ein größeres rechtwinkliges Dreieck $D_{A'B'C'}$:



Der Flächeninhalt des großen Dreiecks $D_{A'B'C'}$ setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten des kleinen Dreiecks D_{ABC} und des Trapezes $T_{BB'C'C}$:

$$\frac{a'p'}{2} = \frac{ap}{2} + \frac{p+p'}{2}(a'-a)$$

$$a'p' = ap + a'p - ap + a'p' - ap'$$

$$0 = a'p - ap'$$

$$ap' = a'p$$

$$\boxed{\frac{p'}{p} = \frac{a'}{a}}$$

Daraus folgt, dass die Seiten des großen Dreiecks p' und a' gleiche Vielfache von den Seiten des kleinen Dreiecks p und a sind:

$$p' = \frac{a'}{a} p$$

$$a' = \frac{a'}{a} a$$

Nach dem Satz des Pythagoras folgt für die Seiten b' bzw. b :

$$b'^2 = p'^2 + a'^2$$

$$b'^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 p^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 a^2$$

$$b'^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 (p^2 + a^2)$$

$$b'^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 b^2$$

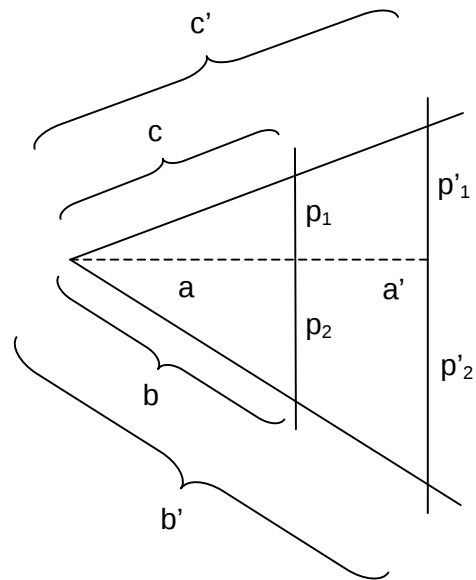
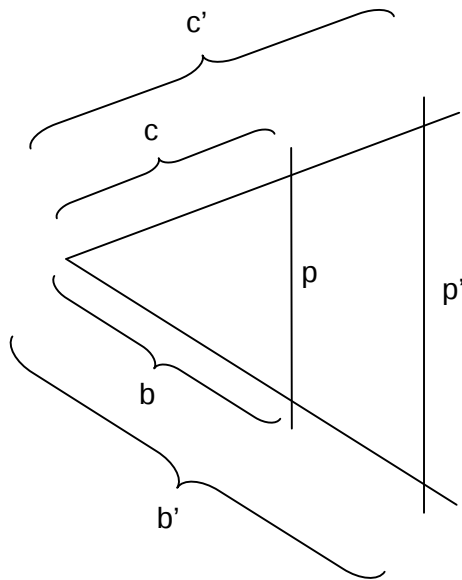
$$b' = \frac{a'}{a} b$$

$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$

Verallgemeinerung

Gegeben seien zwei Strahlen mit gemeinsamen Anfangspunkt, welche von zwei parallelen Geraden geschnitten werden.

Zeichnet man vom Scheitelpunkt die Senkrechte zu p bzw. p' , so erhält man die rechts stehende Figur:



1. Strahlensatz

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \quad \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{b'}{c'} = \frac{c'}{c}}$$

2. Strahlensatz

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{a'}{a} \quad \frac{p'_2}{p_2} = \frac{a'}{a}$$

$$p'_1 = \frac{a'}{a} p_1 \quad p'_2 = \frac{a'}{a} p_2$$

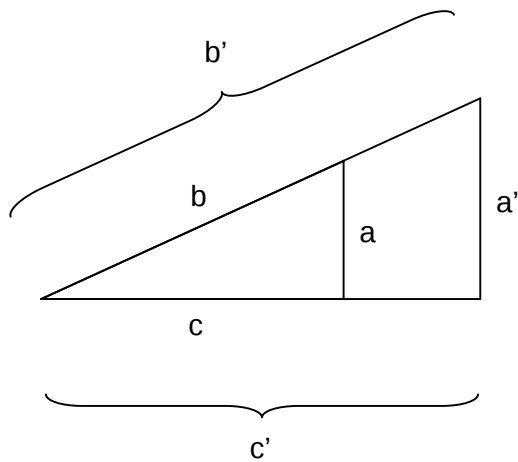
$$p'_1 + p'_2 = \frac{a'}{a} (p_1 + p_2)$$

$$p' = \frac{a'}{a} p$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{a'}{a}$$

$$\boxed{\frac{p'}{p} = \frac{b'}{b} \quad \frac{p'}{p} = \frac{c'}{c}}$$

Verhältnisleichungen bei „ineinander geschachtelten“ rechtwinkligen Dreiecken



Der Flächeninhalt des großen Dreiecks setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten des kleinen Dreiecks und des Trapezes :

$$\frac{c'a'}{2} = \frac{ca}{2} + \frac{a'+a}{2}(c'-c)$$

$$c'a' = ca + a'c' - a'c + ac' - ac$$

$$0 = -a'c + ac'$$

$$a'c = ac'$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = v$$

$\Leftrightarrow$

$$a' = va$$

$$c' = vc$$

Aufgrund des Satzes von Pythagoras gilt:

$$b'^2 = a'^2 + c'^2$$

$$b'^2 = (va)^2 + (vc)^2$$

$$b'^2 = v^2(a^2 + c^2)$$

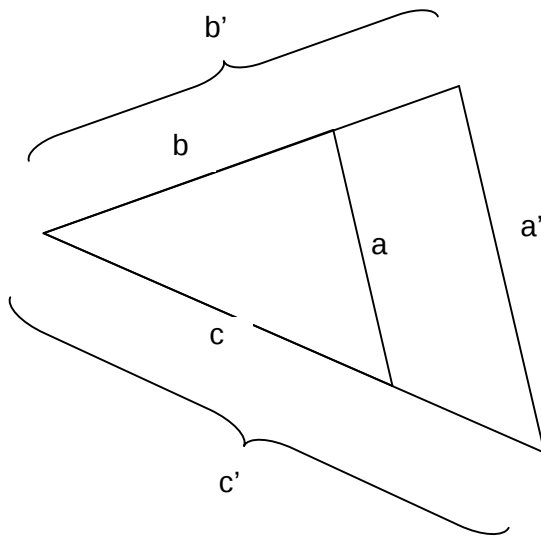
$$b'^2 = v^2b^2$$

$$b' = vb$$

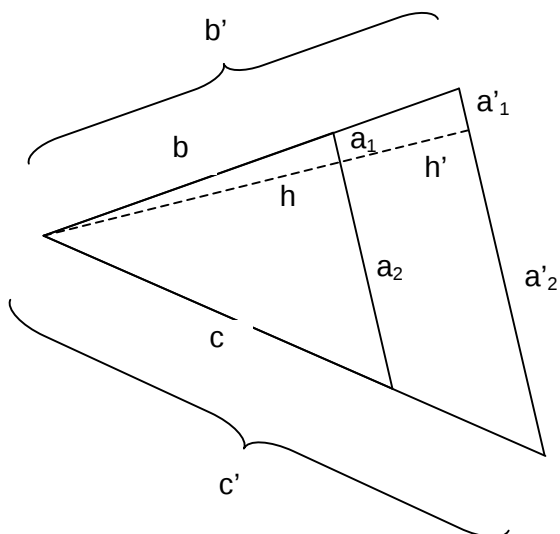
$$\frac{b'}{b} = v$$

$$b' = vb$$

Der Fall bei „ineinander geschachtelten“ allgemeinen Dreiecken



$$a' \parallel a$$



$$a_1 + a_2 = a$$

$$a'_1 + a'_2 = a'$$

$$a' \parallel a$$

$$a'_1 = va_1$$

$$b' = vb$$

$$h' = vh$$

$$a'_2 = va_2$$

$$c' = vc$$

$$h' = vh$$

Aus der Addition der jeweils ersten Gleichungen folgt:

$$a'_1 + a'_2 = va_1 + va_2$$

$$a' = va$$

Es gelten also auch in diesem Fall die drei Gleichungen:

$$a' = va$$

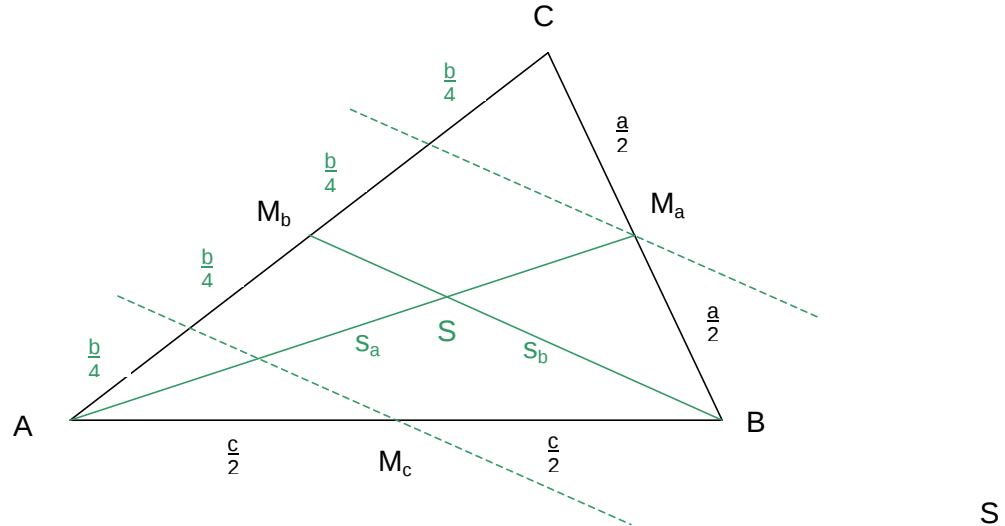
$$b' = vb$$

$$c' = vc$$

Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Die Seitenhalbierenden s_a , s_b , s_c eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S .

Beweis.



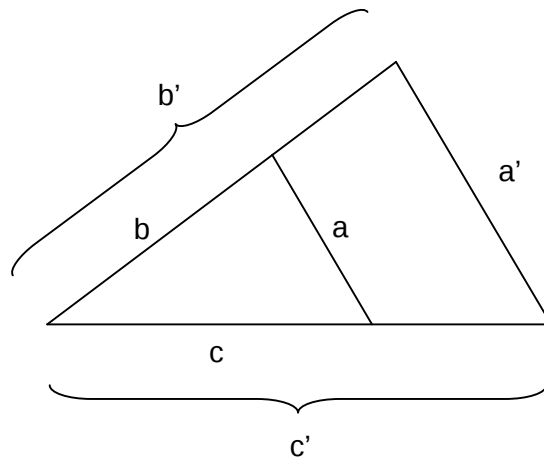
Es seien M_a, M_b, M_c die seitenmitten und S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_b . Zieht man durch M_a und M_c die Parallelen zu s_b , so wird die Seite b nach dem 1. Strahlensatz geviertelt. Ebenfalls nach dem 1. Strahlensatz teilt S die die Seitenhalbierende s_a im Verhältnis 2:1.

Analog zeigt man, dass S die Seitenhalbierende s_b im Verhältnis 2:1 teilt.

Warum liegt S auf der Seitenhalbierenden s_c ?

Sei S' der Schnittpunkt von s_c mit s_b . Dann teilt S' sowohl s_c als auch s_b im Verhältnis 2:1. Also muss $S'=S$ gelten. q.e.d.

Ähnliche Dreiecke



2. Strahlensatz

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = v$$

1. Strahlensatz

Definition

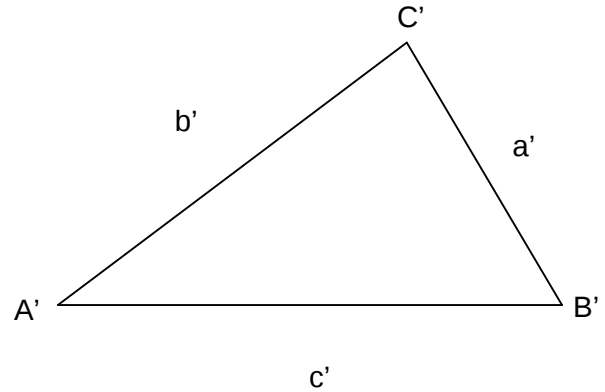
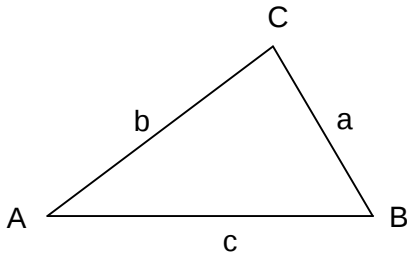
Zwei Dreiecke mit den Seiten a, b, c bzw. a', b', c' heißen **ähnlich**, wenn sie im Verhältnis dreier Seiten übereinstimmen:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Flächeninhalt ähnlicher Dreiecke

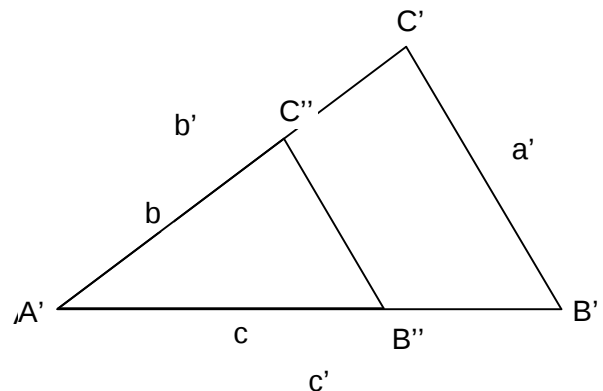
Die beiden Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ seien ähnlich, d.h. es gelte: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = v$

oder $a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$



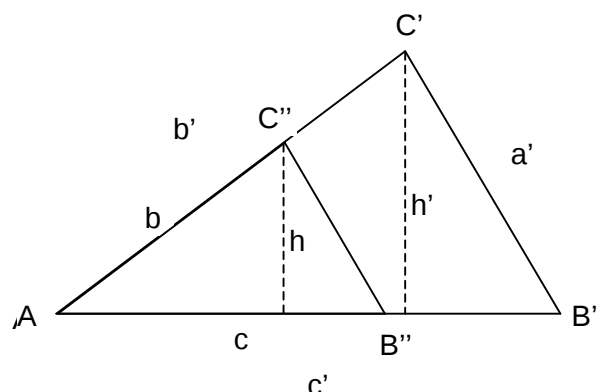
Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den Flächen der Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$.

Zeichnet man C'' und B'' , so dass $A'B'' = c$ und $A'C'' = b$ erhält man folgende Figur:



Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes sind die Strecken $B''C''$ und $B'C'$ parallel. Nach dem 2. Strahlensatz gilt $\frac{a'}{B''C''} = \frac{c'}{c} = v$, also ist $B''C'' = a$. Die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B''C''$ sind daher kongruent und insbesondere flächengleich.

Zeichnet man nun noch die Höhen h und h' ein, so gilt nach dem 2. Strahlensatz:



$$\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c} = v$$
$$h' = vh$$

Der Zusammenhang zwischen den Flächen der ähnlichen Dreiecke $\Delta A'B'C'$ und ΔABC ist:

$$A(\Delta A'B'C') = \frac{c'h'}{2} = \frac{vcvh}{2} = v^2 \frac{ch}{2} = v^2 A(\Delta A'B''C'') = v^2 A(\Delta ABC)$$

$$A(\Delta A'B'C') = v^2 \cdot A(\Delta ABC)$$

$\frac{A(\Delta A'B'C')}{A(\Delta ABC)} = v^2$
--

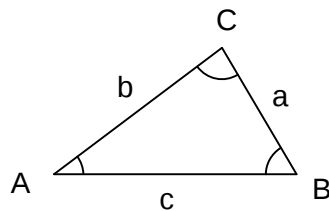
Ähnlichkeitssätze

- (1) Ähnliche Dreiecke stimmen in drei Winkeln überein.
- (2) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
- (3) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

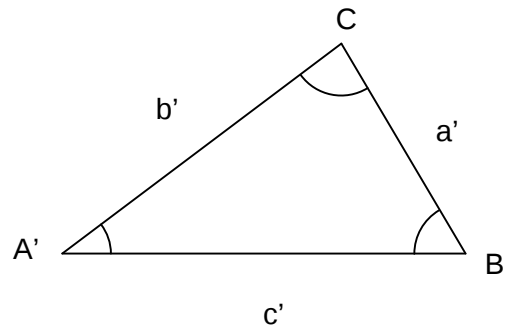
(1) Ähnliche Dreiecke stimmen in drei Winkeln überein.

Beweis:

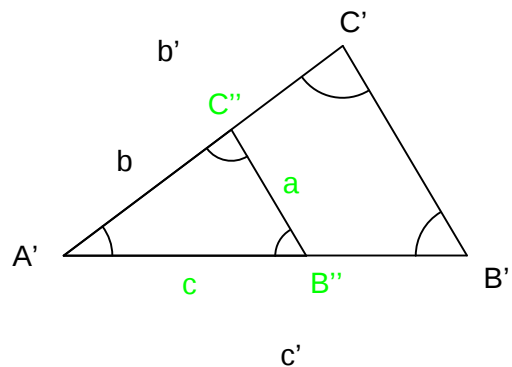
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = v$$



≈



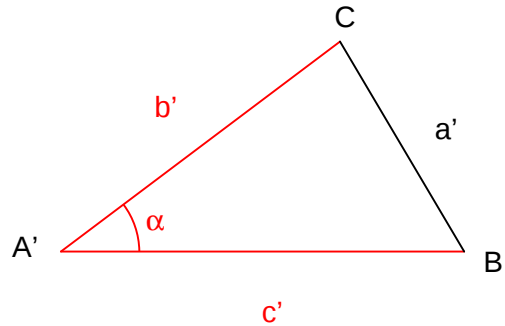
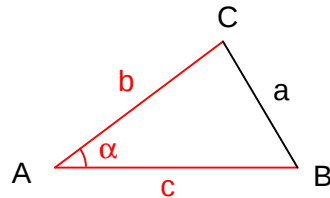
- 1. C'' mit A'C'' = b
- 2. g durch C'' || B'C'
- 3. g schneidet A'B' in B''
- 4. $\triangle A'B''C''$ und $\triangle A'B'C'$ stimmen in den Winkeln überein
- 5. $\frac{a'}{B''C''} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \Rightarrow B''C'' = a$
- 6. $\frac{c'}{A'B''} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow A'B'' = c$
- 7. $\triangle A'B''C'' \cong \triangle ABC$ nach (SSS)
- 8. $\triangle A'B''C''$ und $\triangle ABC$ stimmen in den Winkeln überein
- 9. $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ stimmen in den Winkeln überein



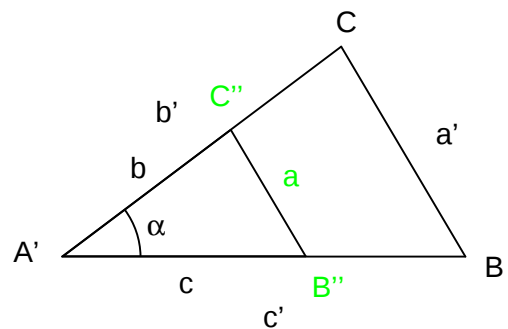
(2) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Beweis:

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = v$$

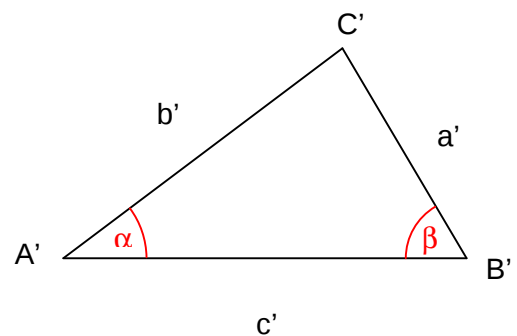
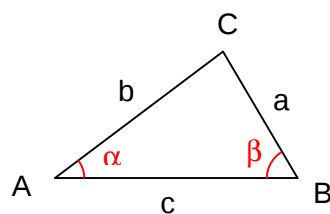


1. B'', C'' mit A'B'' = c, A'C'' = b
2. $\triangle A'B''C'' \cong \triangle ABC$
3. B''C'' = a
4. $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow B''C'' \parallel B'C'$
5. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = v$
6. $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$

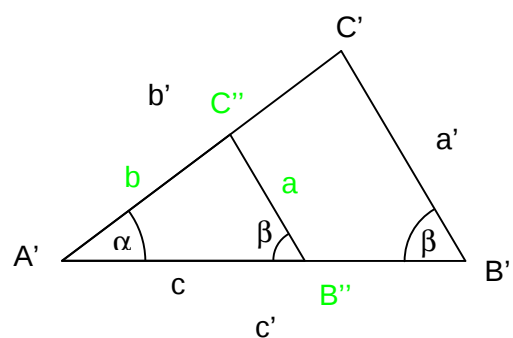


(3) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Beweis:

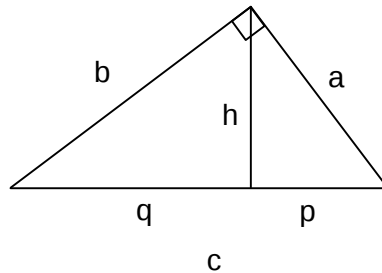


1. B'' mit A'B'' = c
2. g durch B'' $\parallel$ B'C'
3. g schneidet A'C' in C''
4. $\triangle A'B''C'' \cong \triangle ABC$ nach (WSW)
5. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$



Ähnlichkeit und Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck D mit den Seiten a, b, c . Die Höhe h auf c zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke D_1, D_2 . Alle drei Dreiecke stimmen in drei Winkeln überein und sind deshalb ähnlich. Es gelten die entsprechenden Verhältnissgleichungen und zusätzlich $c = p + q$.



D_1	D_2	D
p	h	a
h	q	b
a	b	c

Höhensatz

$$\boxed{\frac{p}{h} = \frac{h}{q}} \Rightarrow h^2 = pq$$

Kathetensätze

$$\boxed{\frac{q}{b} = \frac{b}{c}} \Rightarrow b^2 = cq \quad \text{analog:} \quad a^2 = cp$$

Satz des Pythagoras

$$a^2 = cp \quad b^2 = cq \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c(p + q) = c^2$$

Von den insgesamt 9 Verhältnisgleichungen greift man diejenigen heraus, welche nur 3 Variablen haben:

$$D_1 \sim D_2$$

$$\boxed{\frac{p}{h} = \frac{h}{q}}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{h}{b}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{q}{b}$$

$$D_1 \sim a$$

$$\frac{p}{h} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\frac{p}{a} = \frac{a}{c}}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{b}{c}$$

$$D_2 \sim a$$

$$\frac{h}{q} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{c}$$

$$\boxed{\frac{q}{b} = \frac{b}{c}}$$

Nach Umformung folgt:

$$h^2 = pq$$

$$a^2 = cp$$

$$b^2 = cq$$

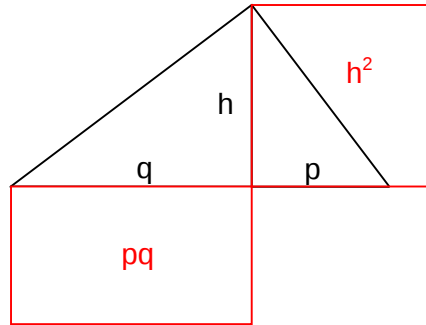
$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Höhensatz

$$h^2 = pq$$

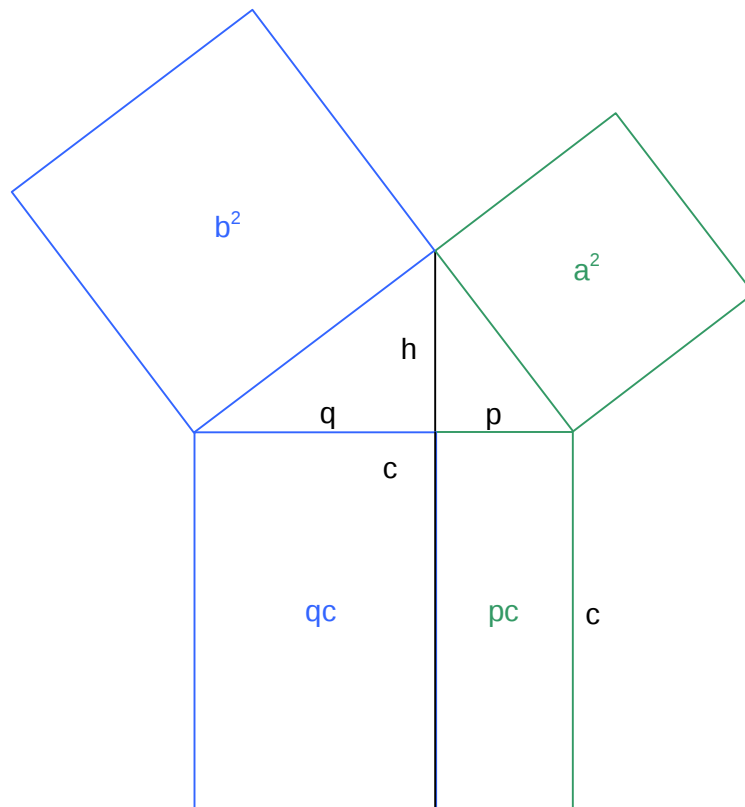


Kathetensätze und Satz des Pythagoras

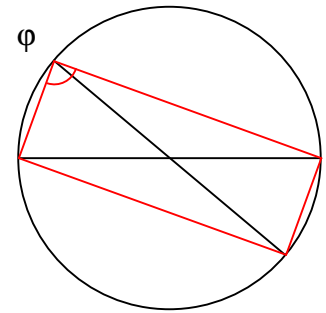
$$a^2 = pc$$

$$b^2 = qc$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

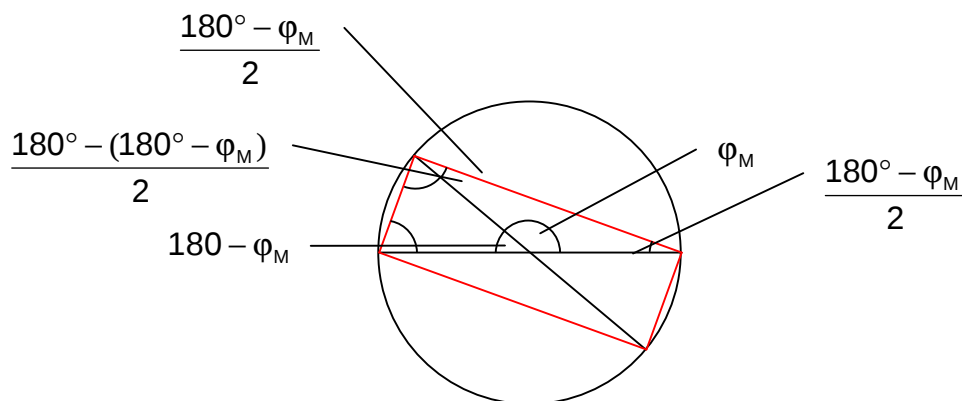


Zeichnet man in einen Kreies 2 Durchmesser und verbindet deren Endpunkte miteinander, so erhält man folgendes Bild:



Feststellung: Das erhaltende (rote) Viereck scheint ein Rechteck zu sein, d.h. $\varphi = 90^\circ$

Wie kann man begründen, dass die Innenwinkel des Vierecks rechte Winkel sind ?



Aufgrund der Innenwinkelsätze am allgemeinen und gleichschenkligen Dreieck erhält man die Innenwinkel φ des Vierecks zu :

$$\varphi = \frac{180^\circ - (180^\circ - \varphi_M)}{2} + \frac{180^\circ - \varphi_M}{2}$$

$$\varphi = 90^\circ$$

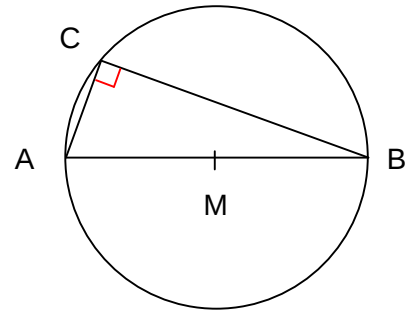
Satz von Thales

(Thales: griechischer Mathematiker ca. 624 - 547 v Chr.)

Liegt der Scheitel eines Winkels auf einem Halbkreis und gehen die Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers, so ist der Winkel ein rechter Winkel.

Kurz: Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

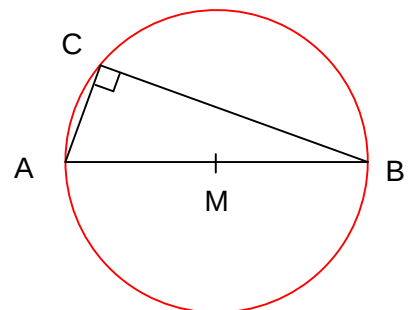
$$C \in K_{M \frac{AB}{2}} \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$$



Umkehrung des Satzes von Thales

Der Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks liegt auf dem Halbkreis über der gegenüberliegenden Seite. (Thaleskreis)

$$\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow C \in K_{M \frac{AB}{2}}$$



Beweis:

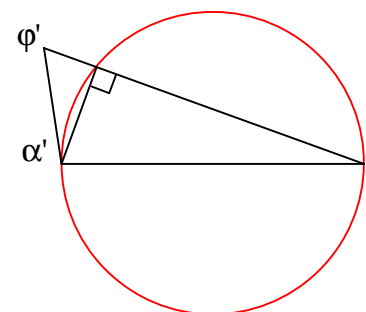
Wir zeigen: Liegt der Scheitel des Winkels innerhalb oder außerhalb des Kreises, so ist sein Maß ungleich 90° .

Der Scheitel des Winkels φ' liege außerhalb des Thaleskreises:

$$\varphi' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha'$$

$$\varphi' = 90^\circ - \alpha'$$

$$\varphi' < 90^\circ$$



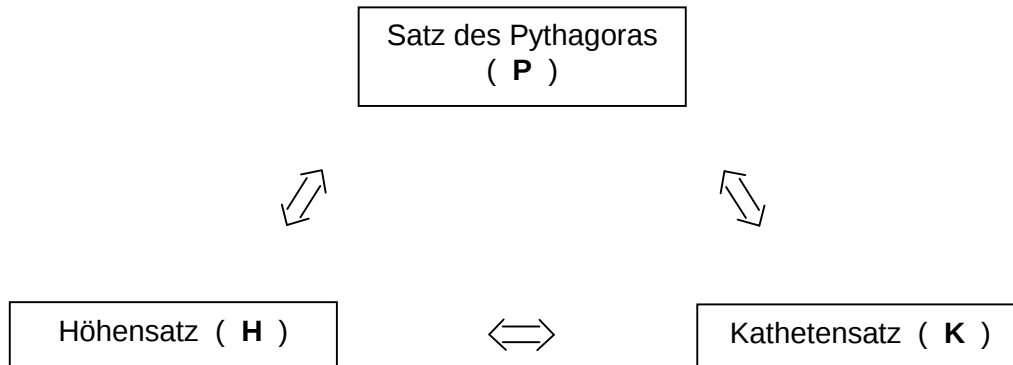
Der Scheitel des Winkels φ' liege innerhalb des Thaleskreises:

Analog zeigt man, dass $\varphi' > 90^\circ$ ist.

Äquivalenz der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a , b und der Hypotenuse c . Die Höhe h auf c zerlege die Hypotenuse in die Abschnitte p und q , so dass $c = p + q$ ist.

Dann sind die Flächensätze äquivalent:



Beweis:

P $\Rightarrow$ K

$$b^2 = h^2 + q^2 \quad h^2 = a^2 - p^2 \quad c = p + q$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + h^2 + q^2 = (p + q)^2$$

$$a^2 + a^2 - p^2 + q^2 = (p + q)^2$$

$$2a^2 - p^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$2a^2 = 2p^2 + 2pq$$

$$a^2 = (p + q)p$$

$$a^2 = cp$$

K $\Rightarrow$ P

$$a^2 = cp \quad b^2 = cq$$

$$a^2 + b^2 = cp + cq$$

$$a^2 + b^2 = c(p + q)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

P $\Rightarrow$ H

$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = p + q$$

$$h^2 = b^2 - q^2$$

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2$$

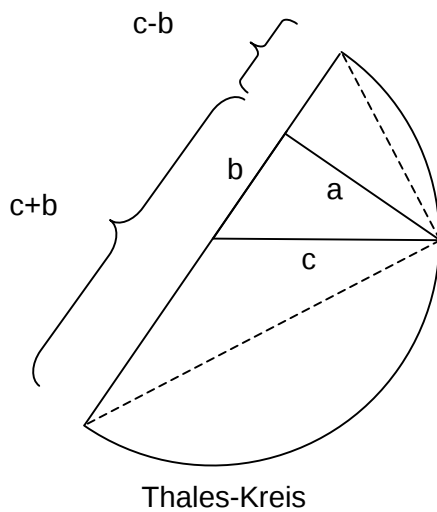
$$2h^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

$$2h^2 = (p + q)^2 - p^2 - q^2$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$h^2 = pq$$

H $\Rightarrow$ P

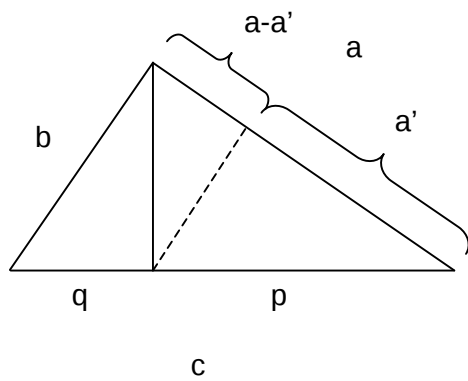


$$a^2 = (c + b)(c - b)$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

K $\Rightarrow$ H



$$h^2 = a(a - a')$$

$$p^2 = aa'$$

$$a^2 = cp$$

$$h^2 = a(a - a')$$

$$h^2 = a^2 - aa'$$

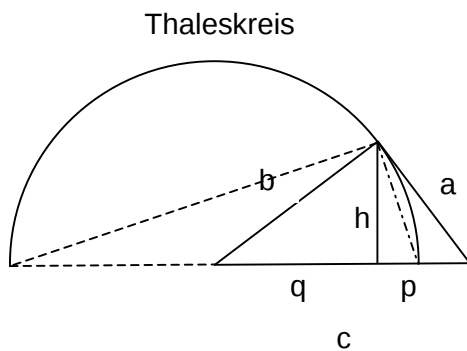
$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$h^2 = cp - p^2$$

$$h^2 = p(c - p)$$

$$h^2 = pq$$

H $\Rightarrow$ K



$$h^2 = (b + q)(b - q)$$

$$\Rightarrow h^2 = b^2 - q^2$$

$$h^2 = pq$$

$$b^2 - q^2 = pq$$

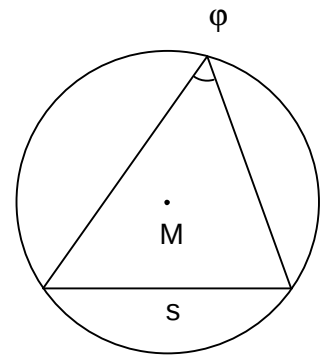
$$b^2 = pq + q^2$$

$$b^2 = (p + q)q$$

$$b^2 = cq$$

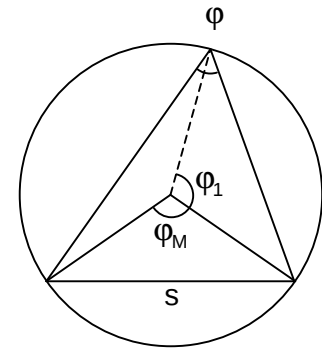
analog: $a^2 = cp$

Gegeben sei ein Kreis und eine Sehne s mit dem Umfangswinkel φ .
Ist dessen Winkelmaß unabhängig von der Lage auf dem Kreis ?



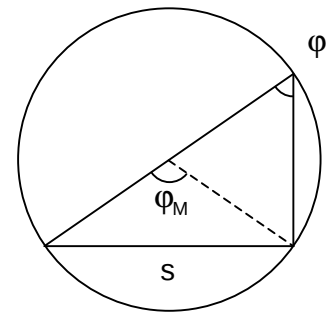
$$\varphi = \frac{180^\circ - \varphi_1}{2} + \frac{180^\circ - (360^\circ - \varphi_1 - \varphi_M)}{2}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_M}{2}$$



$$\varphi = \frac{180^\circ - (180^\circ - \varphi_M)}{2}$$

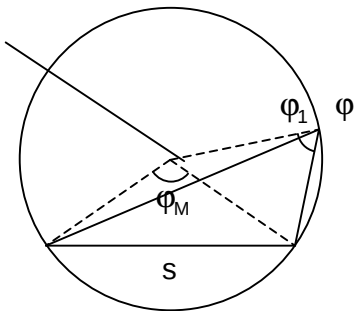
$$\varphi = \frac{\varphi_M}{2}$$



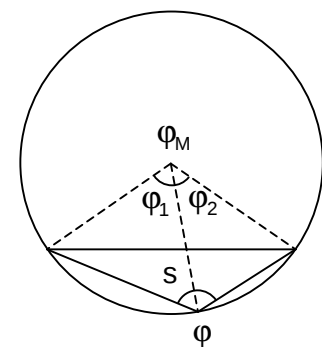
$$\varphi = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\varphi_1 - \varphi_M)}{2} - \varphi_1$$

$$\varphi = \frac{\varphi_M}{2}$$

$$180^\circ - 2\varphi_1 - \varphi_M$$



$$\left(\begin{array}{l} \varphi_M = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi = \frac{180^\circ - \varphi_1}{2} + \frac{180^\circ - \varphi_2}{2} \\ \varphi = \frac{360^\circ - \varphi_M}{2} \end{array} \right)$$



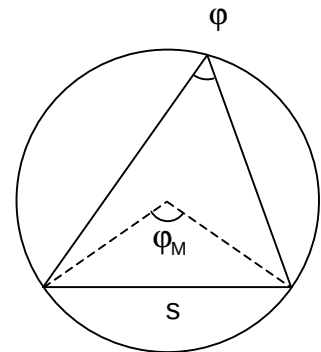
Umfangswinkelsatz

Umfangswinkel über der gleichen Sehne sind gleich groß.

Speziell:

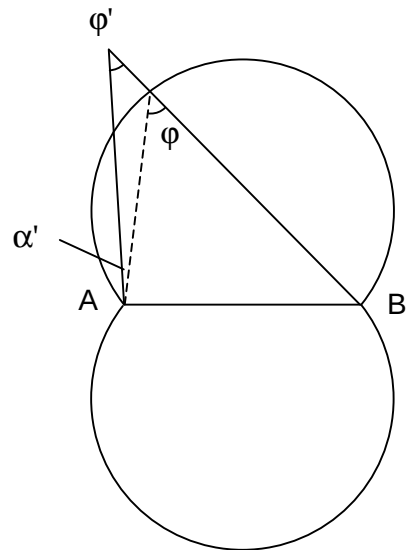
Ist φ_M der Mittelpunktswinkel der Sehne s und φ ein Umfangswinkel über der Sehne, so gilt :

$$\varphi = \frac{\varphi_M}{2}$$



Umkehrung des Umfangswinkelsatzes

Gegeben sei eine Strecke AB. Alle Punkte, von denen aus die Strecke AB unter dem konstantem Winkel φ erscheint, liegen auf zwei Kreisbögen, mit AB als gemeinsamer Sehne.



Beweis:

Wir zeigen wir, dass wenn der Scheitel eines Winkels außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt, sein Maß nicht gleich φ sein kann.

Der Scheitel von φ' liege außerhalb der Kreisbögen:

$$\varphi' = 180^\circ - (180^\circ - \varphi) - \alpha'$$

$$\varphi' = \varphi - \alpha'$$

$$\varphi' < \varphi$$

Der Scheitel von φ' liege außerhalb der Kreisbögen: Analog Analog zeigt man dass $\varphi' > \varphi$ ist.

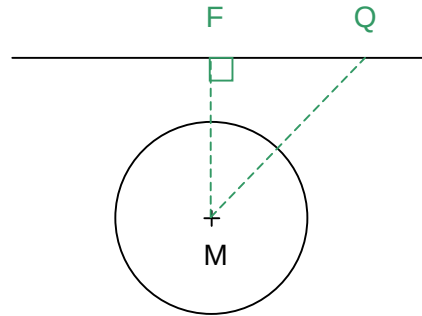
Kreis und Gerade

Gegeben sei ein Kreis $K_{M,r}$ und eine Gerade g . Das Lot von M auf g habe den Lotfußpunkt F .

1. Fall : $IMFI > r$

Für alle Punkte $Q \neq F$ auf g gilt dann: $IMQI > IMFI > r$

Somit liegen alle Punkte der Geraden g außerhalb des Kreises. In diesem Fall heißt die Gerade g **Passante**.

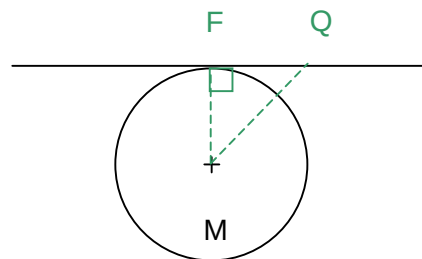


2. Fall : $IMFI = r$

Der Lotfußpunkt F liegt auf dem Kreis. Für alle Punkte $Q \neq F$ auf g gilt dann: $IMQI > IMFI = r$

Alle Punkte der Geraden außer F liegen außerhalb des Kreises. In diesem Fall heißt die Gerade g **Tangente** und der Lotfußpunkt F heißt **Berührungspunkt**.

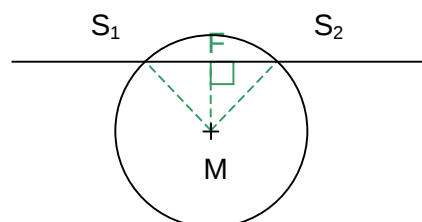
Der **Berührungsradius** MF steht senkrecht auf g .



3. Fall : $IMFI < r$

Wir wählen auf g zwei Punkte S_1 und S_2 mit $IFS_1I = IFS_2I = \sqrt{r^2 - IMFI^2}$. dann gilt nach dem Satz des Pythagoras $IMS_1I = \sqrt{IMFI^2 + IFS_1I^2} = \sqrt{IMFI^2 + r^2 - IMFI^2} = r$. Analog folgt, dass $IMS_2I = r$ ist. Die Punkte S_1 und S_2 liegen also auf dem Kreis. Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion gibt es keine weiteren Punkte von g die auf dem Kreis liegen.

Die Gerade g heißt **Sekante**.



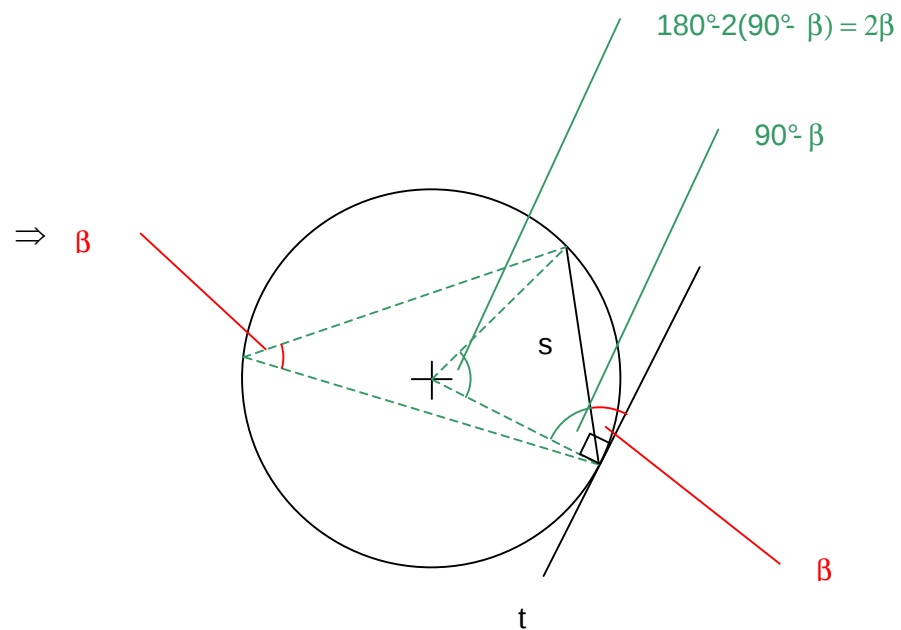
Sehnen-Tangentenwinkel-Satz

Umfangswinkel und Sehnen-Tangentenwinkel über der gleichen Sehne sind gleich.

s: Sehne

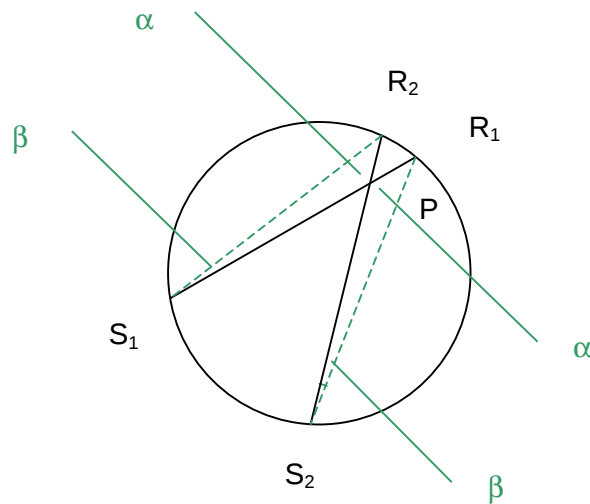
t: Tangente

β : Umfangswinkel, Sehnen-Tangentenwinkel



Sehnensatz

Zeichnet man durch einem Punkt innerhalb eines Kreises zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der entsprechenden Abschnitte der anderen Sehne.



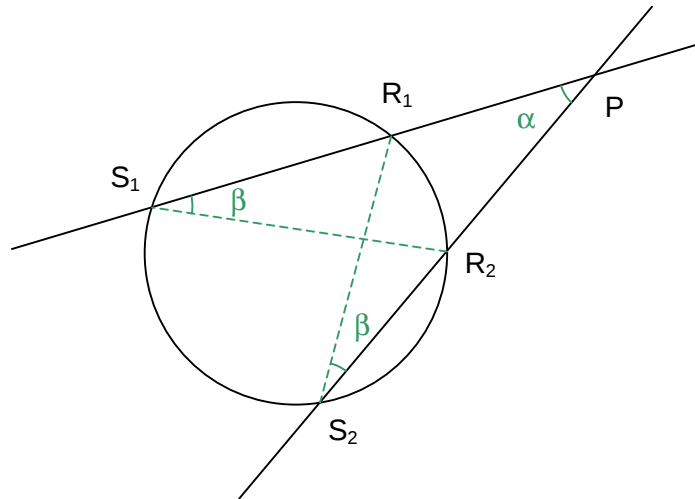
Die Dreiecke $\Delta S_2 R_1 P$ und $\Delta S_1 R_2 P$ sind ähnlich , deshalb gilt:

$$\frac{PR_1}{PS_2} = \frac{PR_2}{PS_1}$$

$PR_1 \cdot PS_1 = PR_2 \cdot PS_2$

Sekantensatz

Zeichnet man an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises zwei Sekanten, so ist das Produkt der vom Punkt aus gemessenen Abschnitte auf einer Sekante gleich dem Produkt der entsprechenden Abschnitte auf der anderen Sekante.



Die Dreiecke $\triangle S_2R_1P$ und $\triangle S_1R_2P$ stimmen nach dem Umfangswinkelsatz in β und ebenso in α überein und sind deshalb ähnlich. Es gilt daher

$$\frac{PR_1}{PS_2} = \frac{PR_2}{PS_1}$$

$$PR_1 \cdot PS_1 = PR_2 \cdot PS_2$$

Sekanten-Tangenten-Satz

Wird in der Grenzlage eine Sekante zur Tangente, so gehen die Punkte R_2 und S_2 in den Berührungspunkt T über und Peripheriewinkel und Sehnen-Tangentenwinkel sind gleich β . Wegen des Ähnlichkeitssatzes gilt

$$\frac{PR_1}{PT} = \frac{PT}{PS_1}$$

$$PR_1 \cdot PS_1 = PT^2$$

