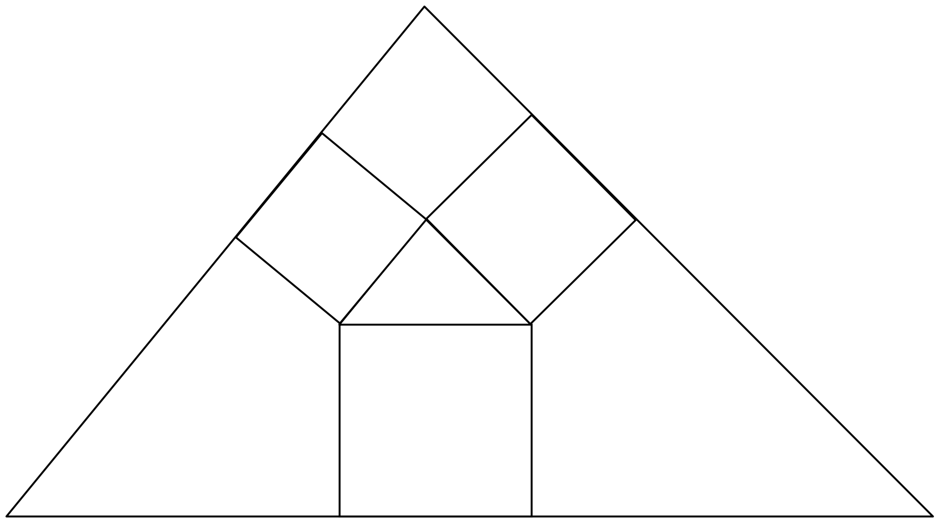
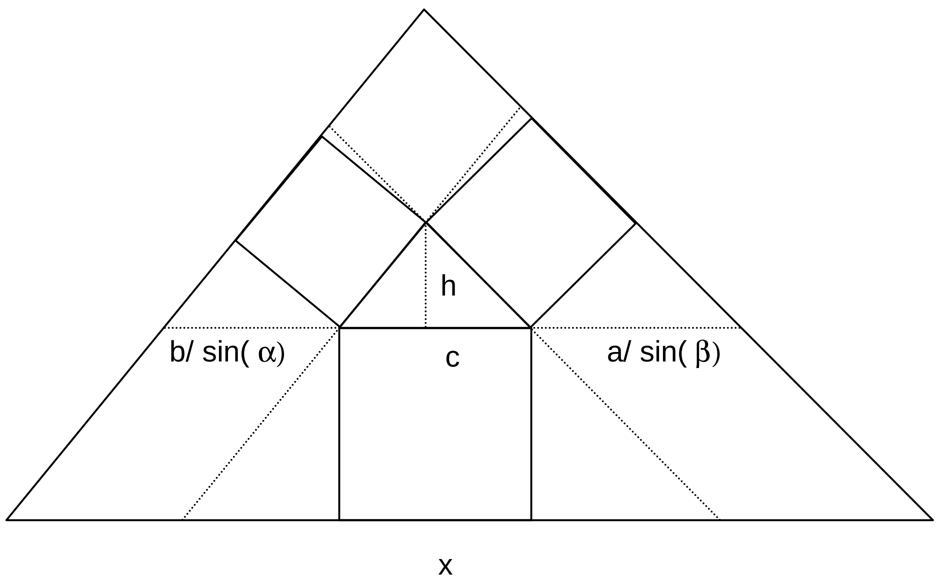
Ähnliche Hülldreiecke

Arno Fehringer Juni 2008

Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks ABC die Quadrate und umhüllt diese Figur mit einem Dreieck A'B'C' , dann ist dieses Dreieck dem ersten ähnlich. Wie groß ist der entsprechende Ähnlichkeitsfaktor k ?



Die Ecken, Seiten und Winkel des Dreiecks ABC seien in kanonischer Weise bezeichnet. Nun verlängert man die Seiten des Dreiecks bis zu dem umhüllenden Dreieck A'B'C' .



Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$x : c = (c+h) : h$

$x = c(c/h + 1)$

Wegen $h = 2A/c$ bzw. $c/h = c^2/2A$, wobei A die Fläche des Dreiecks ABC ist, folgt für die Seite c'= A'B' des Dreiecks A'B'C' :

$x + a / \sin(\alpha) + b / \sin(\beta) =$

$c(c/h + 1) + b / \sin(\alpha) + a / \sin(\beta) =$

$c(c^2 / 2A + 1) + b / \sin(\alpha) + a / \sin(\beta) =$

$c(c^2 + 2A) / 2A + b / \sin(\alpha) + a / \sin(\beta) =$

$c(c^2 + 2A) / 2A + b^2 c / bc \sin(\alpha) + a^2 c / ac \sin(\beta) =$

$c(c^2 + 2A) / 2A + b^2 c / 2A + a^2 c / 2A =$

$c(a^2 + b^2 + c^2 + 2A) / 2A$

Also
$c' = c(a^2 + b^2 + c^2 + 2A) / 2A$

Hieraus erhält man den Ähnlichkeitsfaktor $k := c' / c$ für die ähnlichen Dreiecke ABC bzw. A'B'C' zu

$\boxed{k = (a^2 + b^2 + c^2 + 2A) / 2A}$

Der Flächeninhalt A' des Dreiecks A'B'C' ergibt sich zu

$A' = k^2 A$

$A' = ((a^2 + b^2 + c^2 + 2A)^2 / 4A^2)A$

$\boxed{A' = (a^2 + b^2 + c^2 + 2A)^2 / 4A}$