Die Axiome der Geometrie

1. Axiom: Inzidenzaxiom. *Es gibt Punkte und Geraden; jede Gerade ist eine Teilmenge der Punktmenge. Durch je zwei verschiedene Punkte P und Q gibt es genau eine Gerade; diese Gerade bezeichnen wir mit PQ. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.*

2. Axiom: Linealaxiom. *Je zwei Punkten P, Q ist ihr Abstand $/PQ/$ zugeordnet; $/PQ/$ ist eine reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:*

a) $/PQ/ \geq 0$, $/PQ/ = 0$ *genau dann, wenn* $P = Q$;
b) $/PQ/ = /QP/$;
c) $/PQ/ \leq /PR/ + /RQ/$; *Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung.*

Wir fordern weiterhin, dass jede nichtnegative reelle Zahl auch als Abstand vorkommen kann

Definition: Gegeben sind drei verschiedene Punkte P, R, Q auf einer Geraden. Wir sagen, R liegt dann **zwischen** P und Q, wenn gilt: $|PQ| = |PR| + |RQ|$. Wir schreiben dann P-R-Q.

Definition: Seien A und B zwei verschiedene Punkte.
Dann besteht die **Strecke** [AB] aus den Punkten A und B und allen Punkten der Geraden AB, die *zwischen* A und B liegen.
Unter einem **Strahl** [AB verstehen wir die Punkte A und B, sowie alle Punkte X zwischen A und B und alle Punkte Y für die gilt, dass B zwischen A und Y liegt.

Definition: Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, dann bezeichnen wir mit **Dreieck ABC** oder ΔABC die Punktmenge mit den **Ecken** A, B, C und den **Seiten** [AB], [BC], [CA]. $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Die Seiten eines Dreiecks sind also Strecken und keine Geraden.

3. Axiom: Axiom von Pasch. (Moritz Pasch, 1843 - 1930). *Sei ΔABC ein Dreieck, und sei* g *eine Gerade, die keine Ecke des Dreiecks enthält. Dann gilt: Wenn* g *eine Seite des Dreiecks* ΔABC *trifft, dann trifft* g *genau eine weitere Seite von* ΔABC.

Definition:
Seien A, B zwei Punkte der Ebene, g eine Gerade der Ebene mit $A \notin g$ und $B \notin g$. A und B liegen **auf derselben Seite von g**, wenn $[AB] \cap g = \{ \}$.
Unter einer offenen Halbebene H(g, $A \notin g$) verstehen wir die Menge aller Punkte der Ebene, die mit A auf derselben Seite von g liegen.

Definition: Seien R, S und T drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist der **Winkel** $\angle RST$ die Vereinigung der Strahlen [SR und [ST, das heißt:

$$\angle RST = [SR \cup [ST.$$

Man nennt S den **Scheitel** und [SR und [ST die **Schenkel** des Winkels $\angle RST$. Wenn wir die Ebene noch orientieren, d. h. einen Umlaufsinn dreier Punkte festlegen, die nicht auf einer Geraden liegen, dann können wir auch von einem orientierten Winkel sprechen und zwischen $\angle RST$ und $\angle TSR$ unterscheiden.

In einem Dreieck ΔABC können wir die Winkel übersichtlich und kurz bezeichnen: Winkel eines Dreiecks, $\angle A$ ist der Winkel $\angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle BCA$. Man nennt $\angle A$ den „Winkel bei A“ und spricht von den Winkeln $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ des Dreiecks □ABC.

4. Axiom: Geodreieckaxiom. Jedem Winkel $\angle RST$ wird ein Winkelmaß $|\angle RST|$ zugeordnet. Dies ist eine reelle Zahl x mit zwischen $0 < x < 180$. Diese Zuordnung hat die folgenden beiden Eigenschaften:
(1) Seien g eine Gerade, R und S zwei Punkte auf g, und H eine der beiden Halbebene H(P, g), $p \notin g$. α sei eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Dann gibt es einen Punkt T in H(P, g) so dass der Winkel $\angle RST$ genau das Maß α hat.
(2) Sei U ein Punkt im Innern des Winkels $\angle RST$. Dann ist

$$|\angle RST| = |\angle TSU| + |\angle USR|.$$

Definition: Wir nennen zwei Strecken **kongruent**, wenn sie gleich lang sind; zwei Winkel heißen **kongruent**, wenn sie das gleiche Maß haben. Zum Beispiel sind alle Winkel vom Maß 30° kongruent.

Definition. Seien ΔABC und $\Delta A'B'C'$ Dreiecke. Wir sagen, dass ΔABC und $\Delta A'B'C'$ **kongruent** sind (und schreiben dafür $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$), falls folgende Aussagen gelten:

$$/AB/ = /A'B'/,\ /BC/ = /B'C'/,\ /CA/ = /C'A'/$$

und

$$/\angle A/ = /\angle A'/,\ /\angle B/ = /\angle B'/,\ /\angle C/ = /\angle C'/.$$

5. Axiom: Kongruenzaxiom. *Es gilt der Kongruenzsatz* SWS.

6. Axiom:Parallelenaxiom. *Zu jedem Punkt* P *und jeder Geraden* g mit $P \notin g$ *gibt es genau eine Gerade* h *durch* P, *die keinen Punkt mit* g *gemeinsam hat („parallel“ zu* g *ist).*

7.Axiom: *Kongruente Flächen haben den gleichen Flächeninhalt*:
a) $F_1 \cong F_2 \Rightarrow |F_1| = |F_2|$
b) Ist eine Fläche in n Teilflächen F_1 F_2, ... F_n zerlegt, so gilt:
$|F| = |F_1| + |F_2| + \ldots + |F_n|$

E*in Rechteck mit den Seitenlängen* $a, b \in \mathbf{R}$ hat *den Flächeninhalt* $a \cdot b$ Insbesondere hat dann ein Quadrat der Seitenlänge a den Flächeninhalt a^2.

Auszug aus: H. G. **Weigand**: Geometrie als Wissenschaft und Kultur, Vorlesungsskript