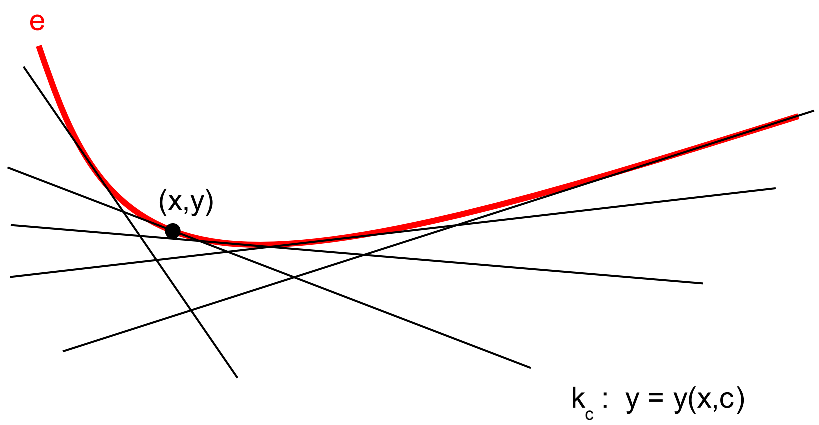
# Einhüllende einer Kurvenschar

Mai 2011

Gegeben sei eine Kurvenschar $k_c$ , $c \varepsilon R$.




Wir nehmen an, dass die Gleichung der Kurvenschar in impliziter Form gegeben ist :

(1) $F(x,y,c) = 0$

Eine **Einhüllende** e der Kurvenschar ist eine Kurve, bei der jeder Punkt genau eine Scharkurve berührt. Die Punkte von e genügen also ebenfalls der Gleichung (1).

Wir nehmen an, dass die **Einhüllende** e durch die Funktionsgleichung y = y(x) dargestellt werden kann:

e: $y = y(x)$

Dann bekommt man die Ableitung $y'(x)$ durch Ableiten der Gleichung (1) nach x:

(2) $F_x(x,y,c) + F_y(x,y,c)\, y'(x) = 0$

Man kann andererseits die Punkte von e auch als eine durch c parametrisierte Kurve auffassen, denn für jeden Punkt (x,y) gibt es genau ein c, so dass (x,y) = (x(c) , y(c)) Berührpunkt an die Scharkurve $k_c$ ist.

Nimmt man an, dass x(c) und y(c) differenzierbar von c abhängen, kann man die Gleichung (1) nach c ableiten:

$$F_x(x,y,c)\,x'(c) + F_y(x,y,c)\,y'(c) + F_c(x,y,c) = 0$$

Vorausgesetzt, dass $x'(c)$ nicht gleich 0 ist, folgt:

(3) $$F_x(x,y,c) + F_y(x,y,c)\frac{y'(c)}{x'(c)} + \frac{F_c(x,y,c)}{x'(c)} = 0$$

Da $\frac{y'(c)}{x'(c)} = y'(x)$ ist, folgt aus (2) und (3)

$$\frac{F_c(x,y,c)}{x'(c)} = 0$$

und damit als weitere Bedingung für die Einhüllende e :

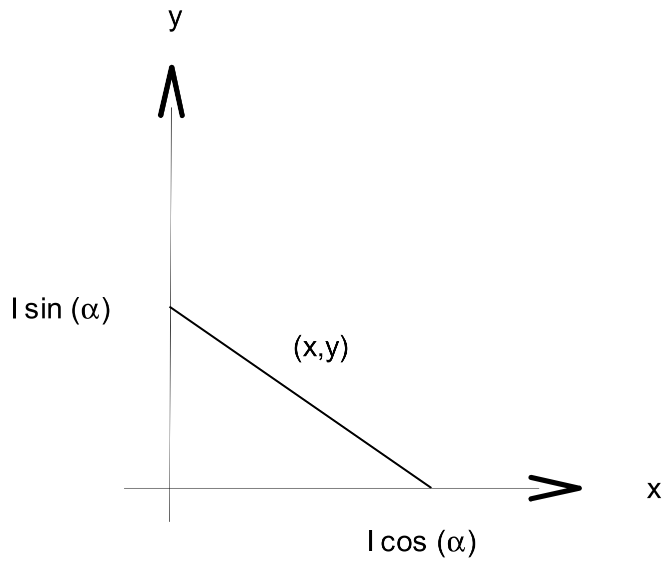
(4) $$F_c(x,y,c) = 0$$

Es kann nun möglich sein, den Parameter c aus den Gleichungen (1) und (4) zu eliminieren, um ein (implizite) Gleichung für die Einhüllende e zu bekommen :

$$E(x,y) = 0$$

Beispiel 1: Die „gleitende“ Strecke

Eine Strecke der Länge l gleite entlang der Koordinatenachsen und erzeuge eine entsprechende Geradenschar $k_\alpha$ , wobei $\alpha$ der Winkel der Geraden zur positiven x-Achse ist.




Geradengleichung der Schargerade:

$$y = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} x + l \sin(\alpha)$$

$$F(x,y,\alpha) = y + \tan(\alpha)\, x - l \sin(\alpha) = 0$$

$$F_\alpha(x,y,\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} x - l\cos(\alpha) = 0$$

=> $\quad x = l\cos^3(\alpha)$

=>

$$y = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\; l\cos^3(\alpha) + l\sin(\alpha)$$

$$y = -\sin(\alpha)\; l\cos^2(\alpha) + l\sin(\alpha)$$

$$y = l\sin(\alpha)(-\cos^2(\alpha) + 1)$$

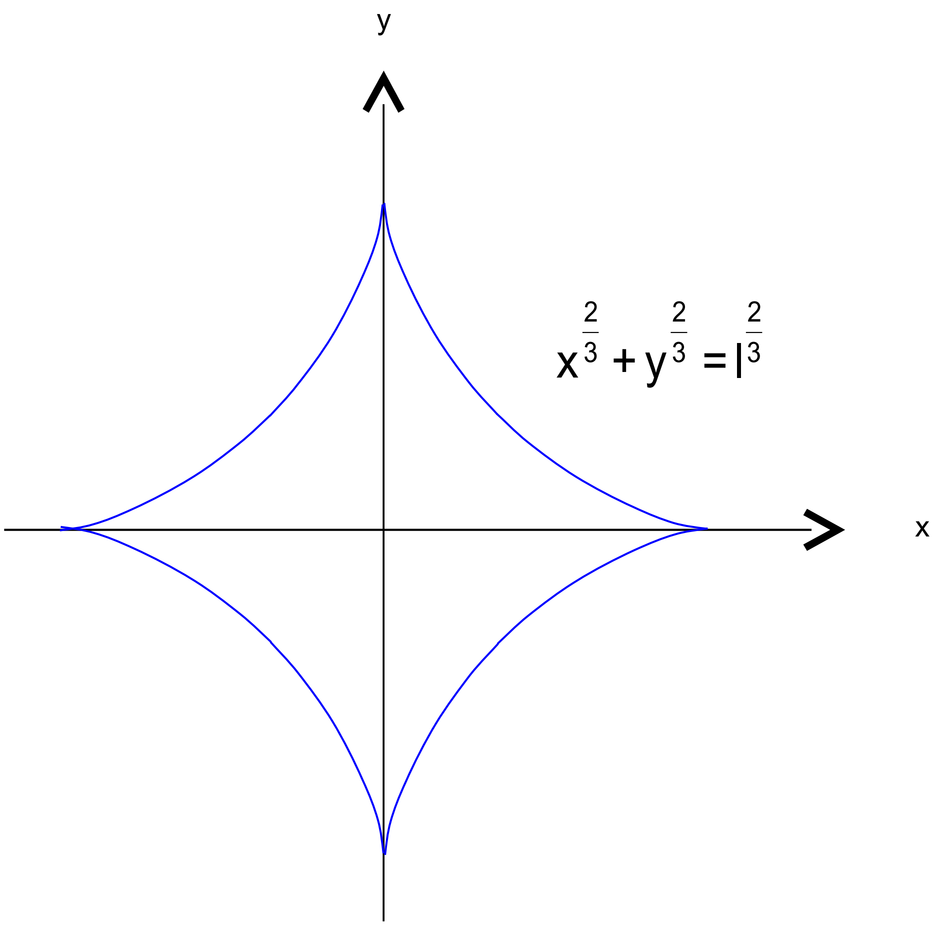
=> $\quad y = l\sin^3(\alpha)$

Die parameterfreie Darstellung der Einhüllenden bekommt man aus der Umformungen der Parametergleichungen nach $\sin^2(\alpha)$ und $\cos^2(\alpha)$ in Kombination mit der Gleichung $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

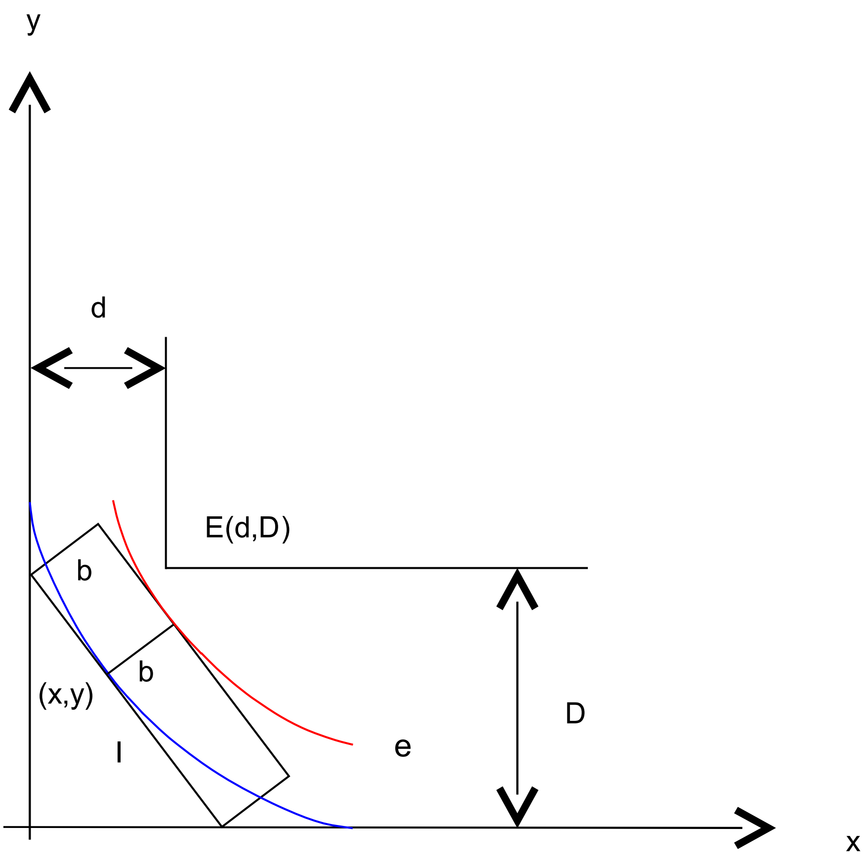
$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}} = 1$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

Dies ist die Gleichung der sogenannten **Astroide**.



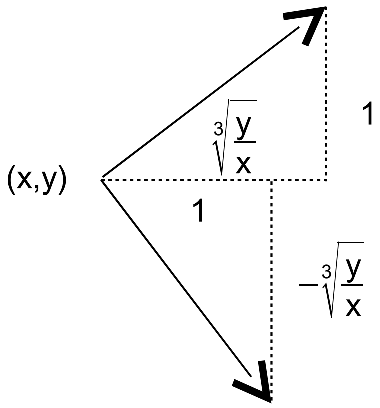
Beispiel 2 :
Transport eines Rechtecks der Länge l und der Breite b durch einen rechwinkligen Kanal mit den unterschiedliche Breiten D und d




Die Bewegung der „inneren Länge" des Rechtecks erzeugt eine Einhüllende e , im Abstand b von der Astroiden.

Die Steigung der Tangente im Punkt (x,y) erhält man aus der Ableitung der Astroidengleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$ nach x:

$$y'(x) = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$




Der normierte Normalenvektor lautet:

$$\left( \frac{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}^{2}+1}} \qquad \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}^{2}+1}} \right)$$

Man muss nun zum Punkt (x,y) nur das b-fache des normierten Normalenvektors addieren, um den korrespondieren Punkt zu bekommen und damit eine Parameterdarstellung der Einhüllenden e der „inneren Länge“ des Rechtecks:

$$\left( x+b\frac{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}^{2}+1}} \qquad y+\frac{b}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}^{2}+1}} \right)$$

Die Durchgängigkeit der Rechtecks durch den Kanal ist gegeben, wenn der Eckpunkt E=(d,D) oberhalb der Einhüllenden e liegt, das heißt

$$D > y(d)+\frac{b}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{y(d)}{d}}^{2}+1}} \quad ,$$

wobei y(d) aus der Gleichung $d^{\frac{2}{3}}+y(d)^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$ zu entnehmen ist.

## Quellen:

**Mag. Raimund Hermann:** Die rutschende Leiter 1
teachers.brg-schoren.ac.at/her/mathematik/wpg/Rutschende_Leiter.docx

**F. Natterer:** Vorlesungsskript Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 1998