Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt

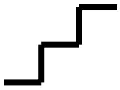
Arno Fehringer, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

März 2014

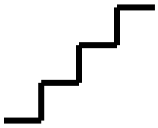
Treppensteigen

Auf wie viele Arten kann man eine Treppe mit n Stufen begehen, wenn man 1 oder 2 Stufen auf einmal nehmen kann?

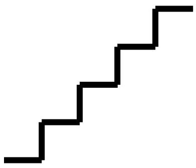
1



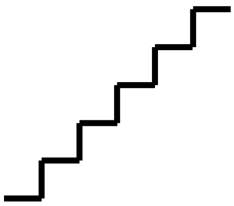
11 , 2



111 , 12 , 21



1111 , 112 , 121 , 211 , 22



11111 , 1112 , 1121 , 1211 , 2111 , 122 , 212 , 221

Die Anzahlen sind gegeben durch die Folge A_n mit n=1,2,3, …

$A_1=1$ $A_2=2$ $A_3=3$ $A_4=5$ $A_5=8$ . . .

Eine 5-stufige Treppe kann man mit dem Begehen von 1 Stufe starten, worauf die verbleibende 4-stufige Treppe auf $A_4=5$ Arten begangen werden kann.
Die 5-stufige Treppe kann man aber auch mit dem Begehen von 2 Stufen starten, worauf die verbleibende 3-stufige Treppe auf $A_3=3$ Arten begangen werden kann.

Es gilt also $A_5=A_4+A_3 = 5+3=8$

Allgemein lautet das Bildungsgesetz der Zahlenfolge:

$A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$ für n=1,2,3, …

Fortsetzung/Umbenennung der Zahlenfolge

$A_{n+2} - A_{n+1} = A_n$ für $n=1,2,3, \ldots$

.
.
.

$A_5 = 8 \quad =: F_6$

$A_4 = 5 \quad =: F_5$

$A_3 = 3 \quad =: F_4$

$A_2 = 2 \quad =: F_3$

$A_1 = 1 \quad =: F_2$

$A_0 = 1 \quad =: F_1$

$A_{-1} = 0 \quad =: F_0$

$A_{-2} = 1 \quad =: F_{-1}$

$A_{-3} = -1 \quad =: F_{-2}$

$A_{-4} = 2 \quad =: F_{-3}$

$A_{-5} = -3 \quad =: F_{-4}$

$A_{-6} = 5 \quad =: F_{-5}$

$A_{-7} = -8 \quad =: F_{-6}$

.
.
.

Definition:

Die Zahlenfolge F_1=1 F_2=1 F_3=2 F_4=3 F_5 =8 . . .

heißt **Fibonacci-Zahlenfolge** zu Ehren von **Fibonacci** = **Filius Bonacci** = **Leonardo da Pisa** , **(1170 - 1240)** , der in seinem **Liber Abacci 1202** diese Zahlenfolge im Zusammenhang mit der Vermehrung von Kaninchen erwähnte.

http://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Die **Fibonacci-Zahlkenfolge** ist rekursiv gegeben durch

$F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, n= 1,2,3 ,...

Betrachtet man das multiplikative Wachstum der Fiobonacci-Folge

$$. . . . F_n \rightarrow F_{n+1} \rightarrow F_{n+2} . . .$$

mit den entsprechenden **Wachstumsfaktoren** v_n , v_{n+1} , so gilt

$$v_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ und } v_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} .$$

Es ist

$$v_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = 1 + \frac{1}{v_n} .$$

Daraus folgt:

$$F_{n+1} = v_n F_n$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} F_{n+2}$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{v_n}} F_{n+2}$$

$$F_{n+1}^2 = \frac{v_n}{1 + \frac{1}{v_n}} F_n F_{n+2}$$

$$F_{n+1}^2 = \frac{v_n^{\ 2}}{v_n + 1} F_n F_{n+2}$$

Wie verhält sich der Faktor $\dfrac{v_n^{\,2}}{v_n + 1}$?

Es ist

$$\frac{v_n^{\,2}}{v_n + 1} = \frac{\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)^2}{\dfrac{F_{n+1}}{F_n} + 1} = \frac{F_{n+1}^2}{F_n F_{n+2}} \quad .$$

Die Tabellierung in Abhängigkeit von n ergibt, dass der Nenner des Buches $\dfrac{F_{n+1}^2}{F_n F_{n+2}}$ um 1 größer ist, als der Zähler für ungerade n, und um 1 kleiner ist für gerade n:

$$\boxed{F_u F_{u+2} = F_{u+1}^2 + 1 \quad , \quad F_{u+1} F_{u+3} = F_{u+2}^2 - 1 \quad \text{für} \quad u = 1,3,5,\ldots} \quad .$$

Beweis:

I: Für u=1 ist die Behauptung wahr:

$$F_1 F_3 = F_2^2 + 1 \qquad F_2 F_4 = F_3^2 - 1$$
$$1 \cdot 2 = 1^2 + 1 \qquad 1 \cdot 3 = 2^2 - 1$$

II: Wenn die Behauptung für u wahr ist, ist sie auch für u+2 wahr:

$$F_{u+2} F_{u+4} = F_{u+3}^2 + 1$$

$$(F_u + F_{u+1})(F_{u+2} + F_{u+3}) = (F_{u+1} + F_{u+2})^2 + 1$$

$$(F_u + F_{u+1})(F_u + F_{u+1} + F_{u+1} + F_{u+2}) = (F_{u+1} + F_u + F_{u+1})^2 + 1$$

$$(F_u + F_{u+1})(F_u + 3F_{u+1}) = (F_{u+1} + F_u + F_{u+1})^2 + 1$$

$$(F_u + F_{u+1})(2F_u + 3F_{u+1}) = (F_u + 2F_{u+1})^2 + 1$$

$$2F_u^2 + 5F_u F_{u+1} + 3F_{u+1}^2 = F_u^2 + 4F_u F_{u+1} + 4F_{u+1}^2 + 1$$

$$F_u^2 + F_u F_{u+1} = F_{u+1}^2 + 1$$

$$F_u (F_u + F_{u+1}) = F_{u+1}^2 + 1$$

$$F_u F_{u+2} = F_{u+1}^2 + 1$$

Die letzte Gleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Analoge Überlegung:

$$F_{u+3}F_{u+5} = F_{u+4}^2 - 1$$

$$(F_{u+1}+F_{u+2})(2F_{u+1}+3F_{u+2}) = (F_{u+1}+2F_{u+2})^2 - 1$$

$$2F_{u+1}^2 + 5F_{u+1}F_{u+2} + 3F_{u+2}^2 = F_{u+1}^2 + 4F_{u+1}F_{u+2} + 4F_{u+2}^2 - 1$$

$$F_{u+1}^2 + F_{u+1}F_{u+2} = F_{u+2}^2 - 1$$

$$F_{u+1}(F_{u+1}+F_{u+2}) = F_{u+2}^2 - 1$$

$$F_{u+1}F_{u+3} = F_{u+2}^2 - 1$$

Die letzte Gleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Betrachtung der Wachstumsfaktoren der Fibonacci-Folge

Die **Fibonacci-Zahlkenfolge** ist rekursiv gegeben durch

$F_1=1 \quad , \quad F_2=1 \quad , \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad , \; n= 1,2,3 ,...$

Betrachtet man das multiplikative Wachstum der Folge

$. \; . \; . \; . \; F_n \rightarrow F_{n+1} \rightarrow F_{n+2} \; . \; . \; .$

mit den entsprechenden **Wachstumsfaktoren** v_n , v_{n+1} , so gilt

$$v_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{und} \quad v_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \quad .$$

Es folgt

$$v_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}}$$

$$v_1 = \frac{1}{1} = 1$$
$$v_2 = \frac{2}{1} = 2$$
$$v_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$v_4 = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{3}$$
$$v_5 = \frac{8}{5} = 1{,}6$$
$$v_6 = \frac{13}{8} = 1{,}625$$
$$v_7 = \frac{21}{13} = 1{,}\overline{615384}$$
$$v_8 = \frac{34}{21} = 1{,}\overline{619047}$$

.
.
.

Vermutung: v_n ist eine alternierende Folge, speziell:

Die Folge der $v_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ der **Wachstumsfaktoren der Fibonaccizahlenfolge** bilden eine **Intervallschachtelung mit dem Zentrum** φ .

Beweis:

Wir zeigen:

1) $v_u = \frac{F_{u+1}}{F_u}$, $u = 1, 3, 5 \ldots$ ist monoton wachsend.

2) $v_{u+1} = \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}}$, $u = 1, 3, 5 \ldots$ ist monoton fallend.

3) $v_u < v_{u+1}$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

4) $[v_{u+2} ; v_{u+3}] \subset [v_u ; v_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

5) $[v_{u+2} ; v_{u+3}] \subset [v_u ; v_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

Zu 1)

$$v_1 < v_3$$
$$\frac{1}{1} < \frac{3}{2}$$ ist eine wahre Aussage.

Angenommen, es gelte $x_u < x_{u+2}$ für eine ungerade Zahl u. Dann folgt:

$$v_{u+2} < v_{u+4}$$
$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_u}} < 1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+2}}}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{v_u}} < \frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+2}}}$$
$$1+\frac{1}{v_u} > 1+\frac{1}{v_{u+2}}$$
$$\frac{1}{v_u} > \frac{1}{v_{u+2}}$$
$$v_u < v_{u+2}$$

Die letzte Ungleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Zu 2)

$$v_2 > v_4$$
$$\frac{2}{1} > \frac{5}{3}$$ ist eine wahre Aussage.

Angenommen, es gelte $v_{u+1} > v_{u+3}$ für eine ungerade Zahl u. Dann folgt:

$$v_{u+3} > v_{u+5}$$
$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+1}}} > 1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+3}}}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+1}}} > \frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+3}}}$$
$$1+\frac{1}{v_{u+1}} < 1+\frac{1}{v_{u+1}}$$
$$\frac{1}{v_{u+1}} < \frac{1}{v_{u+3}}$$
$$v_{u+1} > v_{u+3}$$

Die letzte Ungleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Zu 3)

$$v_1 < v_2$$
$$\frac{1}{1} < \frac{2}{1}$$ ist eine wahre Aussage.

Angenommen, es gelte $x_u < x_{u+1}$ für eine ungerade Zahl u. Dann folgt:

$$v_{u+2} < v_{u+3}$$
$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_u}} < 1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+1}}}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{v_u}} < \frac{1}{1+\frac{1}{v_{u+1}}}$$
$$1+\frac{1}{v_{u+1}} > 1+\frac{1}{v_{u+1}}$$
$$\frac{1}{v_{u+1}} > \frac{1}{v_{u+3}}$$
$$v_{u+1} < v_{u+3}$$

Die letzte Ungleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Zu 4)

$[v_{u+2}\ ;\ v_{u+3}] \subset [v_u\ ;\ v_{u+1}]$, $u = 1,\ 3,\ 5\ ...$ folgt aus 1), 2) ,3) .

Zu 5)

$$\lim_{u\to\infty} v_{u+1} - v_u = \lim_{u\to\infty} \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} - \frac{F_{u+1}}{F_u} = \lim_{u\to\infty} \frac{F_u F_{u+2} - F_{u+1}^2}{F_u F_{u+1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{F_u F_{u+1}}$$

Wir müssen zeigen, dass die Folgen F_u , F_{u+1} über alle Grenzen hinaus wachsen:

Behauptung:
$F_u \geq u$, $F_{u+1} \geq u+1$ für alle $u \geq 5$.

Beweis:
$F_5 \geq 5$, $F_{5+1} \geq 5+1$ ist eine wahre Aussage.

Es gelte $F_u \geq u$, $F_{u+1} \geq u+1$ für eine ungerade Zahl $u \geq 5$. Dann folgt.

$$\begin{aligned}
F_{u+2} &= F_{u+1} + F_u \\
F_{u+2} &\geq u+1 + u \\
F_{u+2} &\geq u+1 + 1 \\
F_{u+2} &\geq u+2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{u+3} &= F_{u+2} + F_{u+1} \\
F_{u+3} &\geq u+2 + u+1 \\
F_{u+3} &\geq u+1 + 1+1 \\
F_{u+3} &\geq u+3
\end{aligned}$$

Nun folgt für den Grenzwert:

$$\lim_{u\to\infty} v_{u+1} - v_u = \lim_{u\to\infty} \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} - \frac{F_{u+1}}{F_u} = \lim_{u\to\infty} \frac{F_u F_{u+2} - F_{u+1}^2}{F_u F_{u+1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{F_u F_{u+1}} \leq \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u(u+1)} = 0 \ .$$

Damit ist $[v_u\ ;\ v_{u+1}]$, $u = 1,\ 3,\ 5\ ...$ eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum φ .

Es gilt: $\lim_{n\to\infty} v_n = \varphi$

Es folgt weiter:

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

$$\lim_{u \to \infty} v_{n+1} = \lim_{u \to \infty} 1 + \frac{1}{v_n}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Lösungen:

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Spezielle Zahlenfolgen

Arithmetische Folge :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d \quad , \quad d \neq 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$a_1 \qquad a_1 + d \qquad a_1 + 2d \qquad a_1 + 3d \qquad a_1 + 4d \qquad a_1 + 5d \qquad . \quad . \quad .$$

Geometrische Folge :

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1} \quad , \quad a_1 \neq 0 \quad , \quad q \neq 0,\ 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$a_1 \qquad a_1 q \qquad a_1 q^2 \qquad a_1 q^3 \qquad a_1 q^4 \qquad a_1 q^5 \qquad . \quad . \quad .$$

Lukas-Folge (Verallgemeinerte Fibonacci-Folge), **Édouard Lucas (1842 – 1891)** :

$$\boxed{a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$$

Weder kann eine **Geometrische Folge**, noch eine **Lucas-Folge** , **arithmetisch** sein.

$$a_1 q^n \; - \; a_1 q^{n-1} \; = \; a_1 q^{n-1}(q-1)$$

$$a_1 q^{n+1} \; - \; a_1 q^n \; = \; a_1 q^n(q-1) \; \neq \; a_1 q^{n-1}(q-1) \; = \; a_1 q^n \; - \; a_1 q^{n-1}$$

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3=a_2+a_1 \qquad a_4=a_3+a_2 \qquad a_5=a_4+a_3 \qquad . \;\; . \;\; .$$

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_2+a_1 \qquad 2a_2+a_1 \qquad 3a_2+2a_1 \qquad . \;\; . \;\; .$$

$$a_2-a_1 \qquad a_1 \qquad a_2 \qquad a_2-a_1$$

Es gibt **Lukas-Folgen**, die **geometrisch** sind.

$$a_{n+2} \; = \; a_{n+1} \; + \; a_n$$

$$a_1 q^{n+1} \; = \; a_1 q^n \; + \; a_1 q^{n-1}$$

$$q^2 \; = \; q \; + \; 1$$

$$q_1 \; = \; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; \approx \; -0{,}618... \qquad , \qquad q_2 \; = \; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; \approx \; 1{,}618...$$

Monoton wachsende Folge:

$$a_1 \qquad a_1 q_2 \qquad a_1 q_2^2 \qquad a_1 q_2^3 \qquad a_1 q_2^4 \qquad a_1 q_2^5 \qquad . \;\; . \;\; .$$

Alternierende Folge:

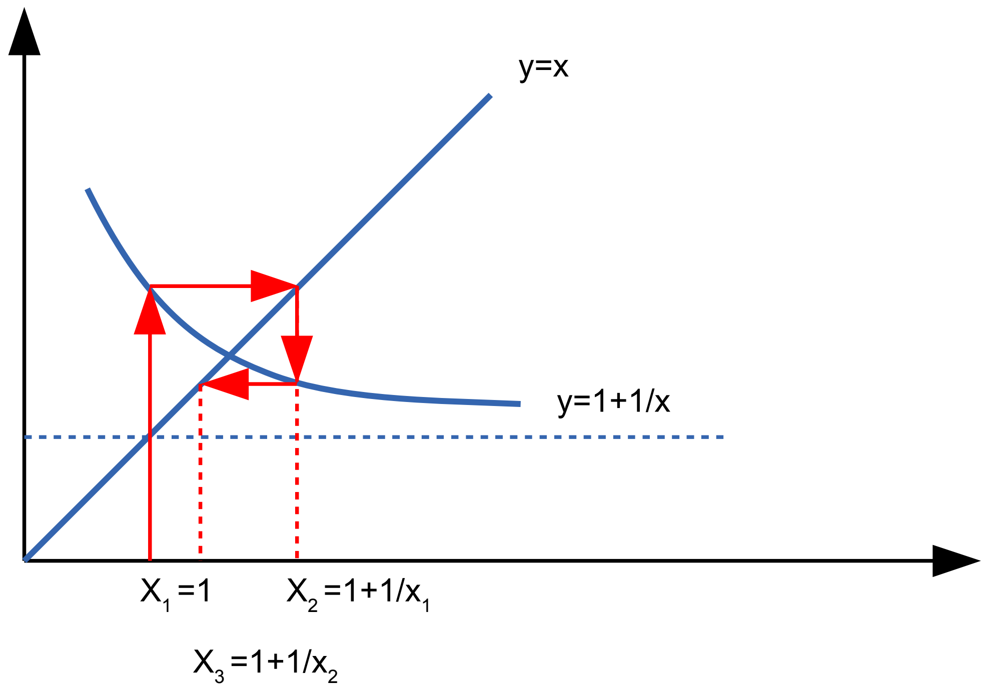
$$a_1 \qquad a_1 q_1 \qquad a_1 q_1^2 \qquad a_1 q_1^3 \qquad a_1 q_1^4 \qquad a_1 q_1^5 \qquad . \;\; . \;\; .$$

Definition:

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...$$

Approximation von φ durch Iteration:

Die Zahl φ ist eine Lösung folgender Gleichung $x^2 = x + 1$ bzw. $x = 1 + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.



Bildungsgesetz der Iteration:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad . \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{x_4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

.
.
.

Im Zähler und Nenner treten die **Fibonaccizahlen** auf:

$$x_1 = \frac{1}{1} =: \frac{Z_1}{N_1}$$

$$x_2 = \frac{2}{1} =: \frac{Z_2}{N_2}$$

.
.
.

$$x_n =: \frac{Z_n}{N_n}$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{N_n}{Z_n} = \frac{Z_n + N_n}{Z_n} =: \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$$

$$x_{n+2} = 1 + \frac{N_{n+1}}{Z_{n+1}} = \frac{Z_{n+1} + N_{n+1}}{Z_{n+1}} = \frac{Z_{n+1} + Z_n}{Z_{n+1}} =: \frac{Z_{n+2}}{N_{n+2}}$$

$$x_{n+3} = 1 + \frac{N_{n+2}}{Z_{n+2}} = \frac{Z_{n+2} + N_{n+2}}{Z_{n+2}} = \frac{Z_{n+2} + Z_n}{Z_{n+2}} =: \frac{Z_{n+3}}{N_{n+3}}$$

.
.
.

Man sieht:

$$Z_1 = 1 \quad , \quad Z_2 = 2 \quad , \quad Z_{n+2} = Z_{n+1} + Z_n$$

$$N_1 = 1 \quad , \quad N_2 = 1 \quad , \quad N_{n+2} = Z_{n+1} = Z_n + N_n = N_{n+1} + N_n$$

Speziell:

$$N_n = F_n$$

$$Z_n = F_{n+1}$$

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Die Folge der $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ sind also gerade die **Wachstumsfaktoren der Fibonaccizahlenfolge**.

Die Folge der $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ der **Wachstumsfaktoren der Fibonaccizahlenfolge** bilden eine **Intervallschachtelung mit dem Zentrum** φ .

Beweis:

Wir zeigen:

1) $x_u = \frac{F_{u+1}}{F_u}$, $u = 1, 3, 5 \ldots$ ist monoton wachsend.

2) $x_{u+1} = \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}}$, $u = 1, 3, 5 \ldots$ ist monoton fallend.

3) $x_u < x_{u+1}$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

4) $[x_{u+2} \; ; \; x_{u+3}] \subset [x_u \; ; \; x_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

5) $[x_{u+2} \; ; \; x_{u+3}] \subset [x_u \; ; \; x_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

Zu 1)

$$x_1 < x_3$$

$$\frac{1}{1} < \frac{3}{2} \quad \text{ist eine wahre Aussage.}$$

Angenommen, es gelte $x_u < x_{u+2}$ für eine ungerade Zahl u. Dann folgt:

$$x_{u+2} < x_{u+4}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_u}} < 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+2}}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_u}} < \frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+2}}}$$

$$1+\frac{1}{x_u} > 1+\frac{1}{x_{u+2}}$$

$$\frac{1}{x_u} > \frac{1}{x_{u+2}}$$

$$x_u < x_{u+2}$$

Die letzte Ungleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Zu 2)

$$x_2 > x_4$$

$$\frac{2}{1} > \frac{5}{3} \quad \text{ist eine wahre Aussage.}$$

Angenommen, es gelte $x_{u+1} > x_{u+3}$ für eine ungerade Zahl u. Dann folgt:

$$x_{u+3} > x_{u+5}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+1}}} > 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+3}}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+1}}} > \frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+3}}}$$

$$1+\frac{1}{x_{u+1}} < 1+\frac{1}{x_{u+1}}$$

$$\frac{1}{x_{u+1}} < \frac{1}{x_{u+3}}$$

$$x_{u+1} > x_{u+3}$$

Die letzte Ungleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Zu 3)

$$x_1 < x_2$$
$$\frac{1}{1} < \frac{2}{1} \quad \text{ist eine wahre Aussage.}$$

Angenommen, es gelte $x_u < x_{u+1}$ für eine ungerade Zahl u. Dann folgt:

$$x_{u+2} < x_{u+3}$$
$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_u}} < 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+1}}}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_u}} < \frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+1}}}$$
$$1+\frac{1}{x_{u+1}} > 1+\frac{1}{x_{u+1}}$$
$$\frac{1}{x_{u+1}} > \frac{1}{x_{u+3}}$$
$$x_{u+1} < x_{u+3}$$

Die letzte Ungleichung ist nach Induktionsvoraussetzung wahr.

Zu 4)

$[x_{u+2} \; ; \; x_{u+3}] \subset [x_u \; ; \; x_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$ folgt aus 1), 2) ,3) .

Zu 5)

$$\lim_{u \to \infty} x_{u+1} - x_u = \lim_{u \to \infty} \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} - \frac{F_{u+1}}{F_u} = \lim_{u \to \infty} \frac{F_u F_{u+2} - F_{u+1}^{\;2}}{F_u F_{u+1}} = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{F_u F_{u+1}}$$

Wir müssen zeigen, dass die Folgen F_u , F_{u+1} über alle Grenzen hinaus wachsen:

Behauptung:
$F_u \geq u$, $F_{u+1} \geq u+1$ für alle $u \geq 5$.

Beweis:
$F_5 \geq 5$, $F_{5+1} \geq 5+1$ ist eine wahre Aussage.

Es gelte $F_u \geq u$, $F_{u+1} \geq u+1$ für eine ungerade Zahl $u \geq 5$. Dann folgt.

$F_{u+2} = F_{u+1} + F_u$
$F_{u+2} \geq u+1 + u$
$F_{u+2} \geq u+1 + 1$
$F_{u+2} \geq u+2$

$F_{u+3} = F_{u+2} + F_{u+1}$
$F_{u+3} \geq u+2 + u+1$
$F_{u+3} \geq u+1 + 1+1$
$F_{u+3} \geq u+3$

Nun folgt für den Grenzwert:

$$\lim_{u\to\infty} x_{u+1} - x_u = \lim_{u\to\infty} \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} - \frac{F_{u+1}}{F_u} = \lim_{u\to\infty} \frac{F_u F_{u+2} - F_{u+1}^{\;2}}{F_u F_{u+1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{F_u F_{u+1}} \leq \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u(u+1)} = 0$$

Damit ist $[x_u \; ; \; x_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$ eine Intervallschachtelung.

Die Zahl φ ist **Zentrum der Intervallschachtelung** $[x_u \; ; \; x_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \ldots$.

Beweis:

$x_1 = 1 \leq \varphi$. Sei $x_u \leq \varphi$ für eine ungerade Zahl u . Dann folgt:

$$\frac{1}{x_u} \geq \frac{1}{\varphi}$$

$$1+\frac{1}{x_u} \geq 1+\frac{1}{\varphi}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_u}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_u}} \leq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}$$

$$x_{u+2} \leq \frac{2\varphi+1}{\varphi+1}$$

Frage: $\frac{2\varphi+1}{\varphi+1} \leq \varphi$?

Antwort:

$$\frac{2\varphi+1}{\varphi+1} \leq \varphi$$

$$2\varphi+1 \leq \varphi(\varphi+1)$$

$$2\varphi+1 \leq \varphi^2+\varphi$$

$\varphi+1 \leq \varphi^2$ ist eine wahre Aussage.

Also ist $x_{u+2} = \frac{2\varphi+1}{\varphi+1} \leq \varphi$.

$x_2 = \frac{2}{1} \geq \varphi$. Sei $x_{u+1} \geq \varphi$ für eine ungerade Zahl u . Dann folgt:

$$\frac{1}{x_{u+1}} \leq \frac{1}{\varphi}$$

$$1+\frac{1}{x_{u+1}} \leq 1+\frac{1}{\varphi}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+1}}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{u+1}}} \geq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}$$

$$x_{u+3} \geq \frac{2\varphi+1}{\varphi+1}$$

Frage: $\frac{2\varphi+1}{\varphi+1} \geq \varphi$?

Antwort:

$$\frac{2\varphi+1}{\varphi+1} \geq \varphi$$

$$2\varphi+1 \geq \varphi(\varphi+1)$$

$$2\varphi+1 \geq \varphi^2+\varphi$$

$\varphi+1 \geq \varphi^2$ ist eine wahre Aussage.

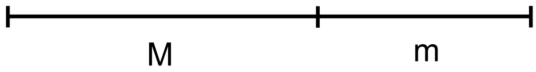
Also ist $x_{u+3} = \frac{2\varphi+1}{\varphi+1} \geq \varphi$. Damit ist der Beweis durch **Vollständige Induktion** erbracht.

Folgerung: $\boxed{\lim_{u\to\infty} x_u = \lim_{u\to\infty} \frac{F_{u+1}}{F_u} = \varphi}$ monoton wachsend,

$\boxed{\lim_{u\to\infty} x_{u+1} = \lim_{u\to\infty} \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} = \varphi}$ monoton fallend.

Teilung im Goldenen Schnitt

Eine gegeben Strecke soll so unterteilt werden, dass sich die größere Strecke zur kleineren verhält wie die ganze Strecke zur größeren:



$$\frac{M}{m} = \frac{M+m}{M}$$

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{m}{M}$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 = \frac{M}{m} + 1$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0$$

Die Lösung ist dieser quadratischen Gleichung ist gegeben durch:

$$\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Die Zahl $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für das Verhältnis der größeren Teilstrecke zur kleineren heißt **Zahl des Goldenen Schnitts**.

Lucca Pacioli (1445 – 1514) hat im Jahre 1509 ein Buch mit dem Titel **Divina Proportione** veröffentlicht.

Das Verhältnis des **Goldenen Schnitts** wird auch schon in den **Elementen** von **Euklid (~ – 300)** , Prop **II** 11 , behandelt.

Luca Pacioli (1445 - 1514)

Portrait Luca Paciolis, gemalt von **Jacopo Barbari**, **1495**

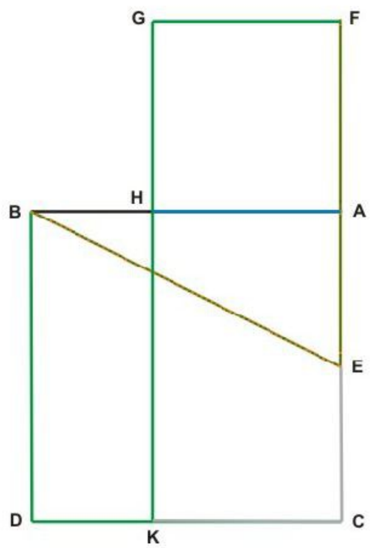
http://de.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli

Elemente des **Euklid (~ – 300),** Buch II

II.11.
Eine Strecke so zu teilen, dass das Rechteck, das die ganze Strecke mit einem Teil ergibt, gleich dem Quadrat über dem andern Teil ist.

Die Strecke AB soll so in zwei geteilt werden, dass das Rechteck aus AB mit dem einen Teil gleich dem Quadrat über dem anderen Teil ist.

Es ist über AB das Quadrat ABCD zu errichten, AC im Punkt E in zwei gleiche Teile zu teilen, und BE zu ziehen. Sodann ist CA bis F so zu verlängern, dass EF gleich BE ist. Wird über AF das Quadrat FAHG errichtet und GH bis K verlängert, dann, sage ich, die Strecke AB ist in H so geteilt, dass das Rechteck aus AB mit BH gleich dem Quadrat über AH ist.



Es ist AC in E halbiert und in A um FA verlängert, also ist das Rechteck, das die ganze verlängerte Strecke CF mit der Verlängerung FA ergibt, zusammen mit dem Quadrat über AE gleich dem Quadrat über EF.
Es ist EF gleich EB, deshalb ist das Rechteck aus CF mit FA zusammen mit dem Quadrat über AE gleich dem Quadrat über EB.

Da EAB ein rechter Winkel ist, sind die Quadrate über BA und AE zusammen gleich dem Quadrat über EB, damit ist das Rechteck aus CF mit FA zusammen mit dem Quadrat über AE gleich den Quadraten über BA und AE zusammen.

Von beidem das gleiche Quadrat über AE weggenommen, ist das Rechteck aus CF mit FA gleich dem Quadrat über BA.
Da AF gleich FG, ist das Rechteck aus CF mit FA gleich dem Rechteck aus CF mit FG.
Von ABDC und auch vom Rechteck aus CF mit FG das gleiche Rechteck aus AH mit HK weggenommen, ist das Quadrat über AH gleich dem Rechteck aus BH mit HK.

Es ist HK gleich AB, deshalb ist das Quadrat über AH gleich dem Rechteck aus HB mit BA, was auszuführen war.

Anmerkung:

Ist AB = 1, dann ist BE = $((1 + (1/2)^2)^{1/2} = 5^{1/2} / 2$ [wie I.47.]
AH = AF = $(5^{1/2} - 1) / 2$ ist damit der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Strecke AB.

http://www.opera-platonis.de/euklid/eb2/eb209.htm

Die **Goldene Schnittzahl** $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 = x + 1 \quad \text{bzw.} \quad x = 1 + \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

ist **Zentrum der Intervallschachtelung** $[x_u \; ; \; x_{u+1}]$, $u = 1, 3, 5 \; ...$, wobei gilt:

$$x_1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{x_4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

.
.
.

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = \left. 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} \right\} \text{Kettenbruch mit n Bruchstrichen}$$

$$x_u = \frac{F_{u+1}}{F_u} \quad , \quad x_{u+1} = \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} \quad , \quad u = 1, 3, 5, ... \quad ,$$

Quotientenfolge der Fibonaccizahlen:

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\lim_{u \to \infty} x_u = \lim_{u \to \infty} \frac{F_{u+1}}{F_u} = \varphi \quad \text{monoton wachsend,}$$

$$\lim_{u \to \infty} x_{u+1} = \lim_{u \to \infty} \frac{F_{u+2}}{F_{u+1}} = \varphi \quad \text{monoton fallend.}$$

Lukas-Folge (Verallgemeinerte Fibonacci-Folge), **Édouard Lucas (1842 – 1891)** :

$$a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

Konkrete Darstellung:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1a_1 \\
a_2 &= 1a_2 \\
a_3 &= 1a_2 + 1a_1 \\
a_4 &= 2a_2 + 1a_1 \\
a_5 &= 3a_2 + 2a_1 \\
a_6 &= 5a_2 + 3a_1 \\
a_7 &= 8a_2 + 5a_1 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

Allgemeine Darstellung:

a_1

a_2

$$a_{n+2} = F_{n+1} a_2 + F_n a_1 \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Die Folgenglieder der **Lukas-Folge** sind Linearkombinationen der beiden Anfangsglieder a_2 , a_1 . Die Koeffizienten durchlaufen versetzt die Folge der **Fibonacci-Zahlen**.

Die Formel von **Binet**; **Jacques Binet (1786 – 1856)** :

$$x^2 = x + 1$$

Lösungen:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Aus den Gleichungen $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\psi^2 = \psi + 1$ folgt:

$$\begin{array}{lllll}
\varphi & = & & = & 1\varphi + 0 \\
\varphi^2 & = & \varphi + 1 & = & 1\varphi + 1 \\
\varphi^3 & = & \varphi^2 + \varphi & = & 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 & = & \varphi^3 + \varphi^2 & = & 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 & = & \varphi^4 + \varphi^3 & = & 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 & = & \varphi^5 + \varphi^4 & = & 8\varphi + 5 \\
. & & & & \\
. & & & & \\
. & & & & \\
\varphi^n & = & \varphi^n + \varphi^{n-1} & = & F_n\varphi + F_{n-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\psi & = & & = & 1\psi + 0 \\
\psi^2 & = & \psi + 1 & = & 1\psi + 1 \\
\psi^3 & = & \psi^2 + \psi & = & 2\psi + 1 \\
\psi^4 & = & \psi^3 + \psi^2 & = & 3\psi + 2 \\
\psi^5 & = & \psi^4 + \psi^3 & = & 5\psi + 3 \\
\psi^6 & = & \psi^5 + \psi^4 & = & 8\psi + 5 \\
. & & & & \\
. & & & & \\
. & & & & \\
\psi^n & = & \psi^n + \psi^{n-1} & = & F_n\psi + F_{n-1}
\end{array}$$

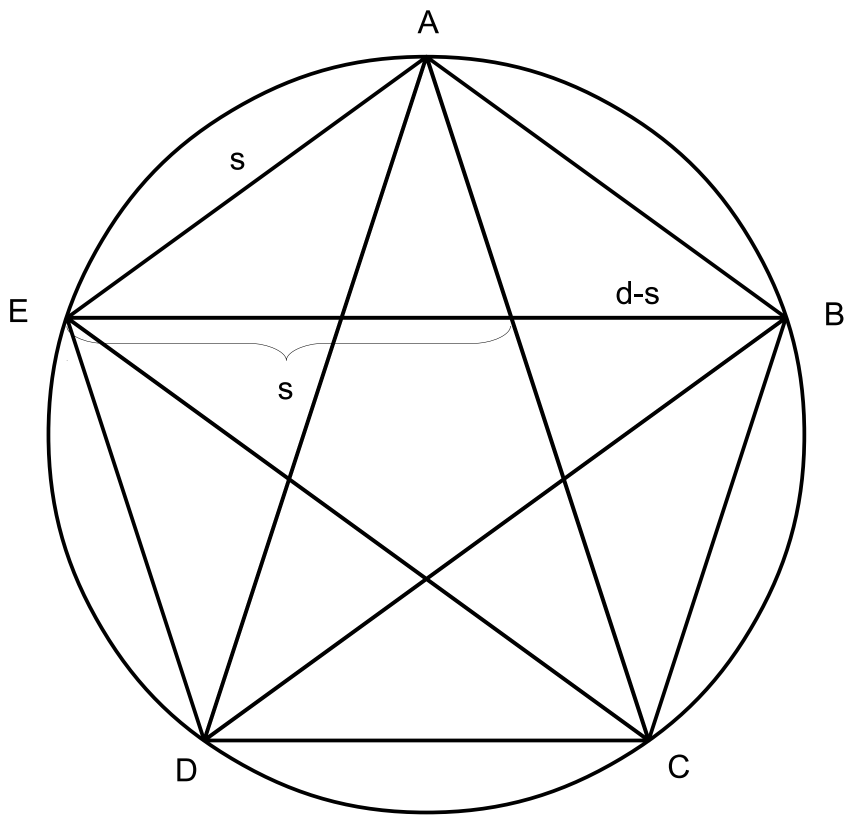
Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen, erhält man:

$$\varphi^n - \psi^n = F_n(\varphi - \psi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_n &= \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} \\ F_n &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}}$$

Explizite Formel zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen, **Binet - Formel** .

Der **Goldene Schnitt** am Pentagramm



Die Diagonalen im Pentagon teilen einander im Goldenen Schnitt,

$$\frac{s}{d-s} = \frac{d}{s} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{d}{s}\right)^2 = \frac{d}{s} + 1$$

Der Beweis folgt nach Wiederholung der geometrische Axiome und grundlegenden Sätze.

Axiome, Definitionen, Folgerungen der Geometrie

Axiom 1 : Inzidenz-Axiome

$\exists\ M=\{P : P \text{ ist ein Punkt}\} \wedge \exists\ N=\{g : g \text{ ist eine Gerade}\}$

$\forall g\in N : g\subset M$

$\forall g,h\in N : \#g\cap h\leq 1$

$\forall P,Q\in M\ \exists!\ g\in N : P,Q\in g \quad ; \quad PQ:=g$

$\exists\ P,Q,R \in M : P\notin QR\ ,\ Q\notin RP\ ,\ R\notin PQ$

Definitionen 1 - 6

$P,Q,R \in g: \quad P<R<Q$ (R liegt zwischen P und Q) $\Leftrightarrow |PQ|=|PR|+|RQ|$

$P,Q : \quad \overline{PQ}=\{R : R\in PQ \wedge P<R<Q\}$ Strecke

$P,Q : \quad \overrightarrow{PQ}:=P \cup Q \cup \{R : R\in PQ \wedge (P<R<Q \vee P<Q<R)\}$ Halbgerade

A,B,C mit $C\notin AB : \quad \Delta ABC:=\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CA}$ Dreieck

$a:=\overline{BC},\ b:=\overline{CA},\ c:=\overline{AB}:$ Seiten von ΔABC

$A,B,C :$ Ecken von ΔABC

Axiom 2 : Lineal-Axiom

$\forall P,Q\in M : P,Q \rightarrow d=:|PQ| \in\mathbb{R}_{\geq 0}$, Abstand der Punkte

$\forall P,Q,R \in M :$

$|PQ|=0\Leftrightarrow P=Q$

$|PQ|=|QP|$

Dreiecksungleichung: $|PQ|\geq|PR|+|RQ|$

$\forall\ d\in\mathbb{R}_{\geq 0}\ \exists\ P,Q$ mit $|PQ|=d$

Axiom 3 : Axiom von Pasch

$\Delta ABC,\ g$ mit $A,B,C \notin g:$

$g\cap a\neq\{\} \Rightarrow g\cap b\neq\{\} \wedge g\cap c=\{\} \quad \vee \quad g\cap b=\{\} \wedge g\cap c\neq\{\}$

Definitionen 7 - 11

$P,Q,\ \notin\ g$: P und Q liegen auf der gleichen Seite von g $\Leftrightarrow$ $\overline{PQ}\cap g=\{\}$

$P\notin g$: $H(P,g)\ :=\ \{Q\ :\ \overline{PQ}\cap g=\{\}\ \}$ Halbebene

$R,S,T\notin g$: $<RST:=\overrightarrow{SR}\cup\overrightarrow{SR}$ Winkel

S Scheitel; $\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}$ Schenkel

ΔABC: $\alpha:=\ <BAC$ $\beta:=\ <CBA$ $\gamma:=\ <ACB$

Axiom 4 : Winkel-Axiom

$R,S,T\notin g$: $<RST\ \rightarrow\ w=:|\ <RST|\in[0;180]\subset\mathbb{R}$

$|\ <RST|=0\ \Leftrightarrow\ T\in\overrightarrow{SR}$

$|\ <RST|=180\ \Leftrightarrow\ T\in SR\ \wedge\ T<S<R$

$SR=g,\ H(P,g)\ ,\ w\in(0;180)\ :\ \exists\ T\in H(P,g)$ mit $|\ <RST|=w$

Inneres von $<RST\ :=\ \{\ U\ :\ 0\ <\ |\ <RSU|\ <\ |\ <RST|\ \}$

$U\in$ Inneres von $<RST\ \Rightarrow\ |\ <RST|\ =\ |\ <RSU|\ +\ |\ <UST|$

Definition 12

$\Delta ABC,\ \Delta A'B'C'$ sind kongruent, $\Delta ABC\ \simeq\ \Delta A'B'C'$,

$\Leftrightarrow$

$a=a',\ \ b=b',\ \ c=c',\ \ \alpha=\alpha',\ \ \beta=\beta',\ \ \gamma=\gamma'$

Axiom 5 : Kongruenz-Axiom

$\Delta ABC,\ \Delta A'B'C'$: $a=a'\ \wedge\ b=b'\ \wedge\ \gamma=\gamma'\ \Rightarrow\ \Delta ABC\ \simeq\ \Delta A'B'C'$

Definition 13

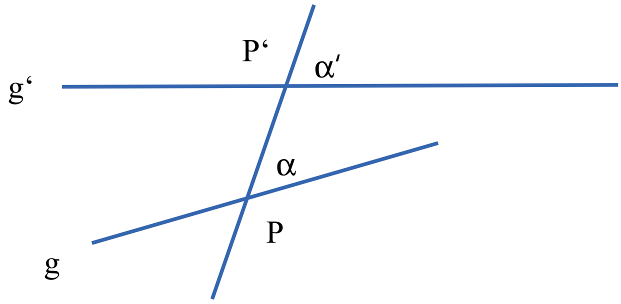
g und h sind parallel, $g\parallel h$, $\Leftrightarrow$ $g\cap h=\{\}$

Axiom 6 : Parallelen-Axiom

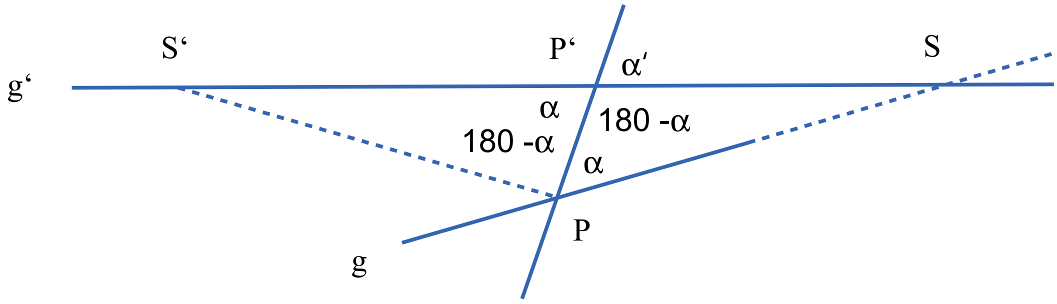
$\forall g,P$ mit $P\notin g$ $\exists!$ h mit $h\parallel g$

Satz 1 :

$\alpha=\alpha' \quad \Rightarrow \quad g \| g'$



Beweis:



Annahme $\neg g \| g' \quad \Rightarrow \quad g \cap g' = \{S\}$

$\Rightarrow \quad \exists\ S' \in g'$ mit $|S'P'| = |SP|$

$\Rightarrow \quad \Delta S'P'P \simeq \Delta SPP'$

$\Rightarrow \quad <P'PS' = <PP'S = 180-\alpha$

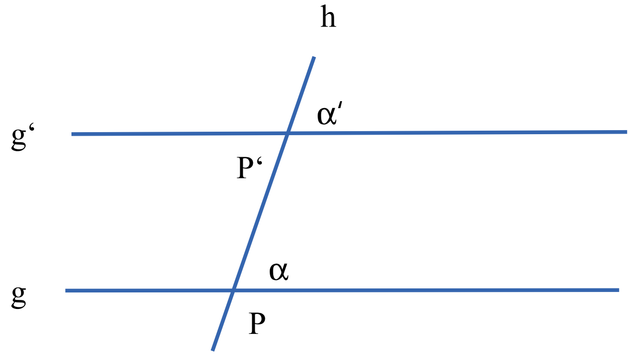
$\Rightarrow \quad <SPS' = \alpha + 180 - \alpha = 180$

$\Rightarrow \quad S' \in g$

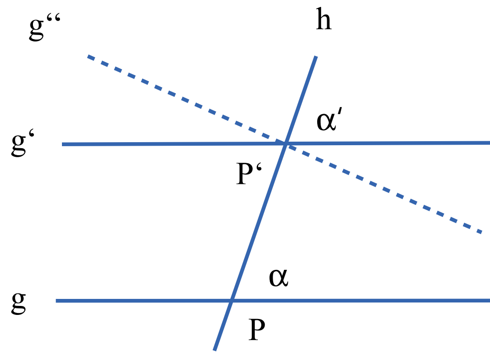
$\Rightarrow \quad g \cap g' = \{S; S'\}$ Widerspruch zu Axiom 1

Satz 2 :

$g \parallel g' \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha'$



Beweis:



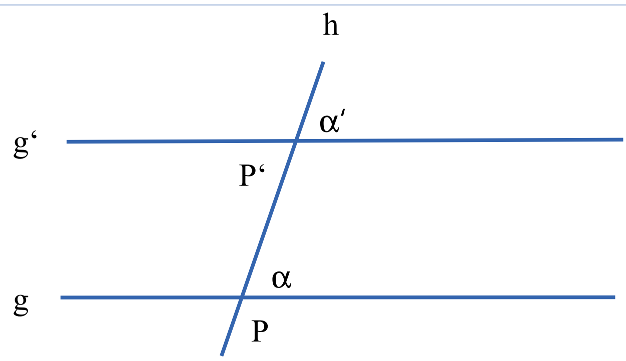
Annahme $\alpha > \alpha'$

$\Rightarrow \quad \exists \ g'' \ \text{ mit } \ P' \in g'' \wedge \ \sphericalangle g''h = \alpha$

$\Rightarrow \quad g'' \parallel g \qquad \text{Widerspruch zum Parallelen-Axiom 6}$

Satz 3 (Parallelität und Stufenwinkel) :

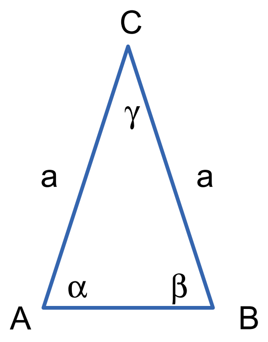
$g \parallel g' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha'$



Die Geraden sind g und g‘ sind genau dann parallel, wenn die Stufenwinkel α und α‘ gleich groß sind.

Satz 4 :

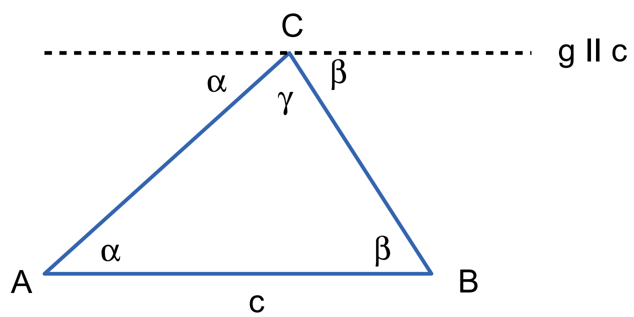
Basiswinkel am gleichschenkligen Dreieck sind gleich: $\alpha = \beta$



Beweis : $\Delta ABC \simeq \Delta BAC \Rightarrow \alpha = \beta$

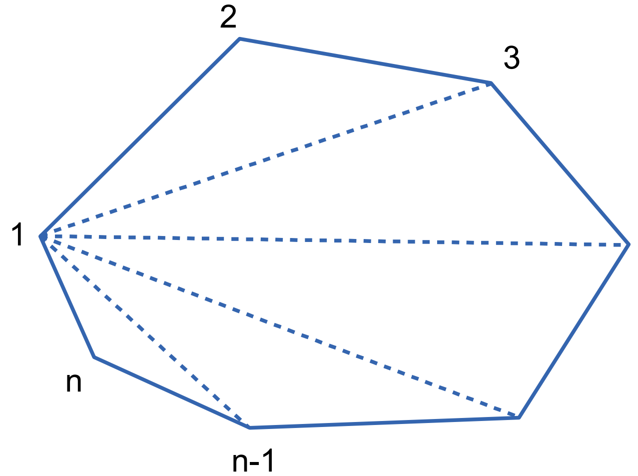
Satz 5 :

Die Innenwinkelsumme am Dreieck ist : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Satz 6 :

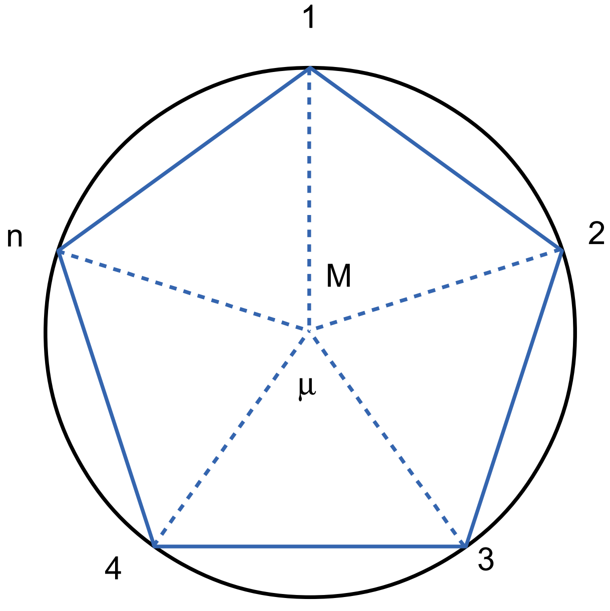
Die Innenwinkelsumme am n - Eck ist : $(n-2)180°$



Die Innenwinkelsumme des n- Ecks ist die Summe der Innenwinkel der n-2 Dreiecke $\Delta 123$, … , $\Delta 1(n-1)n$, also $(n-2)180°$.

Satz 7 :

Die Innenwinkel am regelmäßigen n - Dreieck sind : $\frac{(n-2)}{n}180°$



Die Dreiecke $\Delta 1M2$, $\Delta 2M3$, ... ,$\Delta(n-2)M(n-1)$, $\Delta(n-1)Mn$ mit den

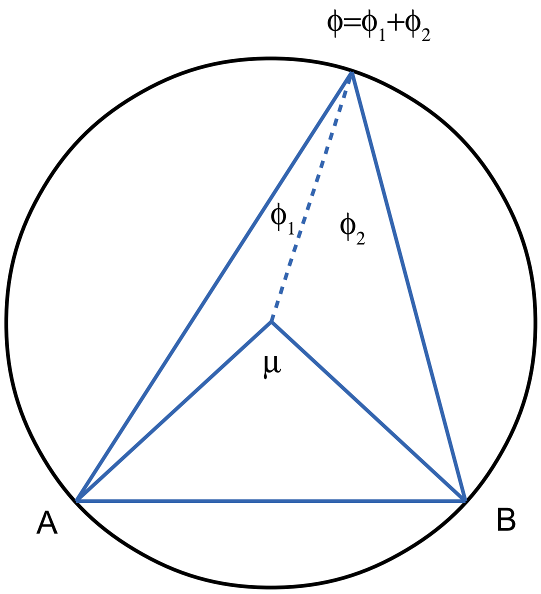
Mittelpunktswinkeln $\mu = \frac{360°}{n}$ sind nach dem **Kongruenzaxiom 5** kongruent, deshalb

sind die Innenwinkel gleich $\frac{(n-2)}{n}180°$.

Satz 8 :

Der Peripheriewinkel zu einer Sehne $\overline{AB}$ sind halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel : $\varphi = \frac{\mu}{2}$.

Beweis :



$$\mu + 180° - 2\varphi_1 + 180° - 2\varphi_2 = 360°$$

$$\mu - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 = 0$$

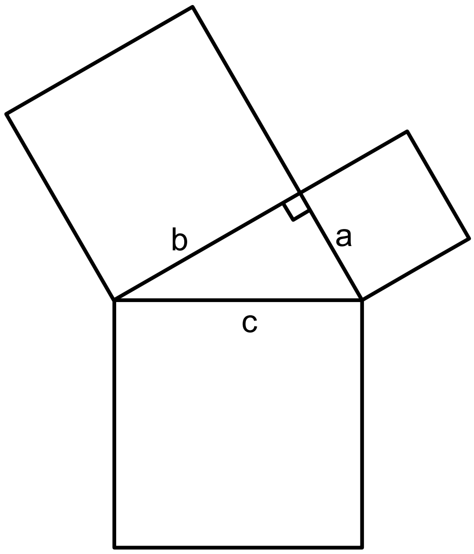
$$\mu - 2\varphi = 0$$

$$\mu = 2\varphi$$

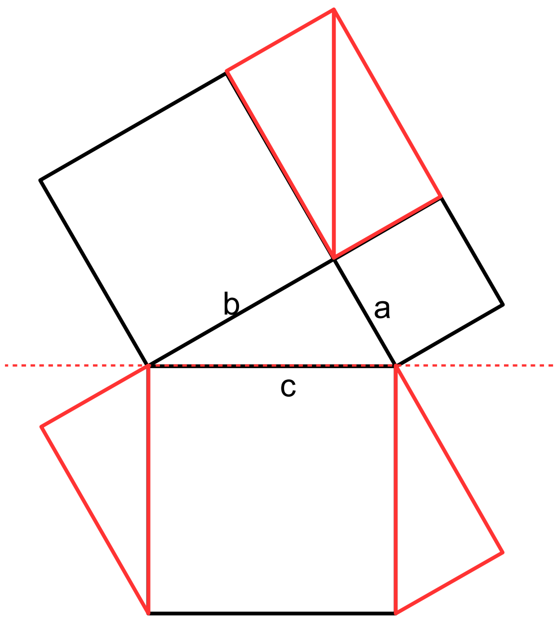
$$\varphi = \frac{\mu}{2}$$

Satz des Pythagoras (Pythagoras, ~ -500) :

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$



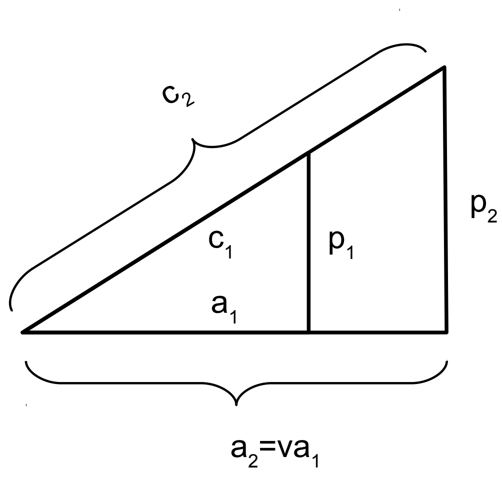
Beweis :



$$a^2 + b^2 + 3\frac{ab}{2} = c^2 + 3\frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Strahlensätze (speziell) :



Flächenbetrachtung :

$$\frac{a_1 p_1}{2} + \frac{p_1+p_2}{2}(a_2-a_1) = \frac{a_2 p_2}{2}$$

$$a_1 p_1 + (p_1+p_2)(a_2-a_1) = a_2 p_2$$

ä

$$a_1 p_1 + p_1 a_2 - p_1 a_1 + p_2 a_2 - p_2 a_1 = a_2 p_2$$

$$p_1 a_2 - p_2 a_1 = 0$$

$$p_1 a_2 = p_2 a_1$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{a_2}{a_1}} \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = v p_1$$

Satz des Pythagoras.

$$c_2 = \sqrt{a_2^2 + p_2^2}$$

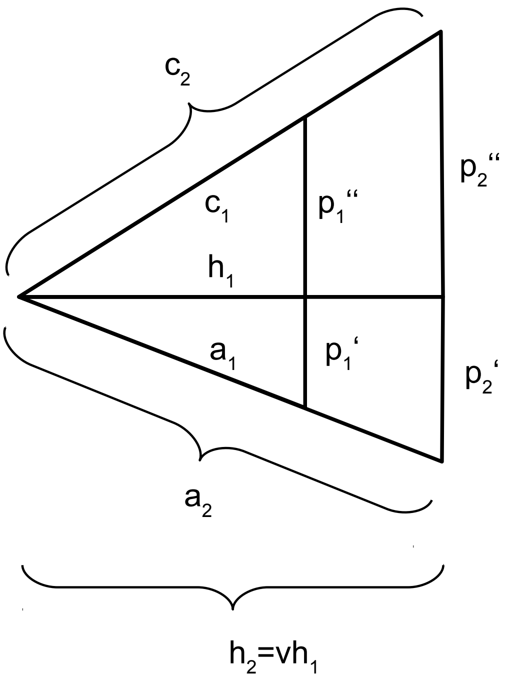
$$c_2 = \sqrt{(va_1)^2 + (vp_1)^2}$$

$$c_2 = v\sqrt{(a_1)^2 + (p_1)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad c_2 = vc_1$$

$$\boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{a_2}{a_1}}$$

Strahlensätze (allgemein) :



$$
\begin{aligned}
h_2 &= vh_1\\
p_2' &= vp_1'\\
p_2'' &= vp_1''\\
a_2 &= va_1\\
c_2 &= vc_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2 &= p_2' + p_2''\\
p_2 &= vp_1' + vp_1''\\
p_2 &= v(p_1' + p_1'')\\
p_2 &= vp_1
\end{aligned}
$$

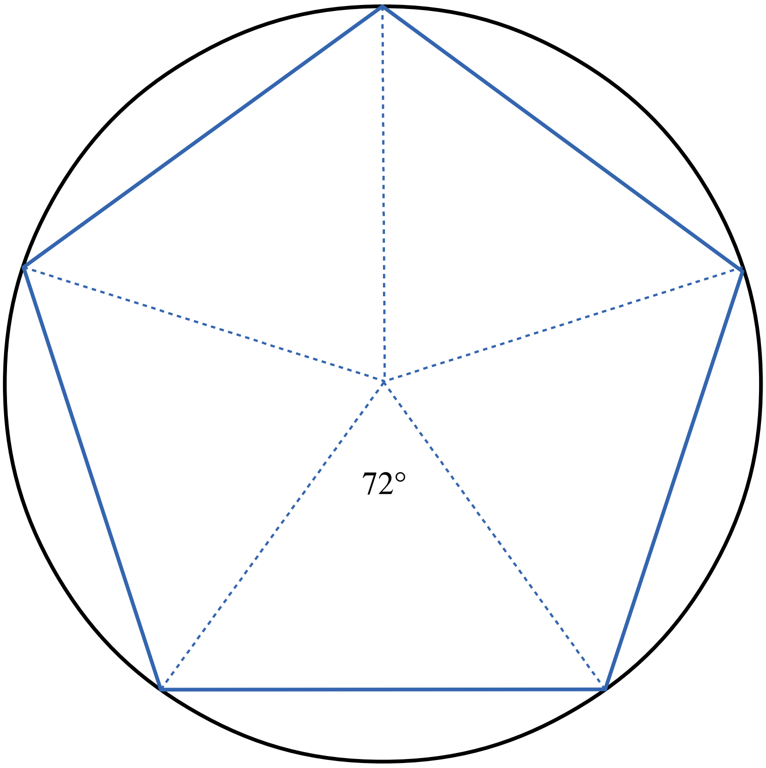
I. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

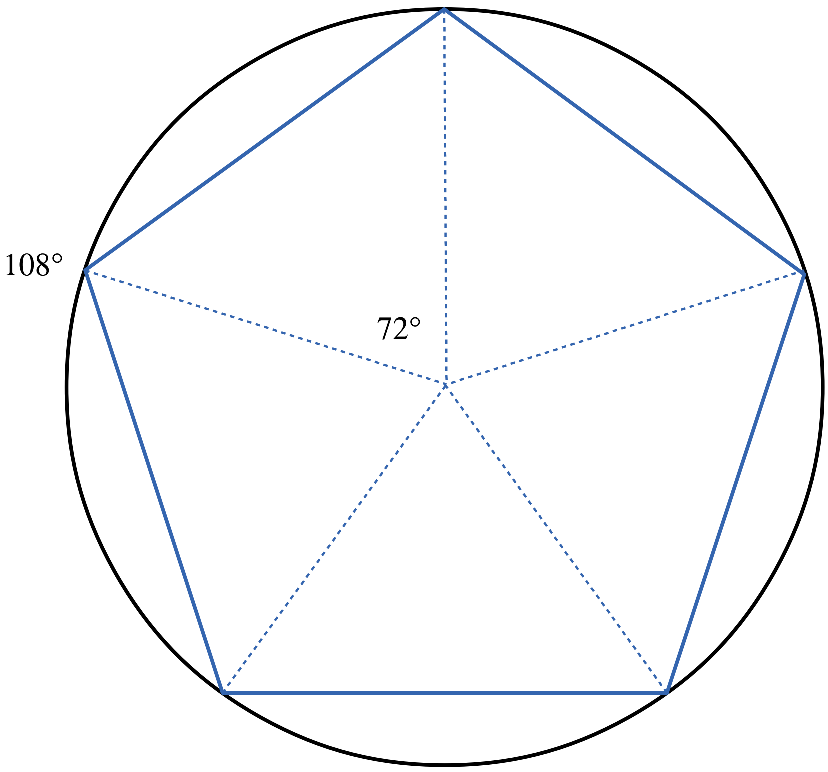
II. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{a_2}{a_1} \quad , \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

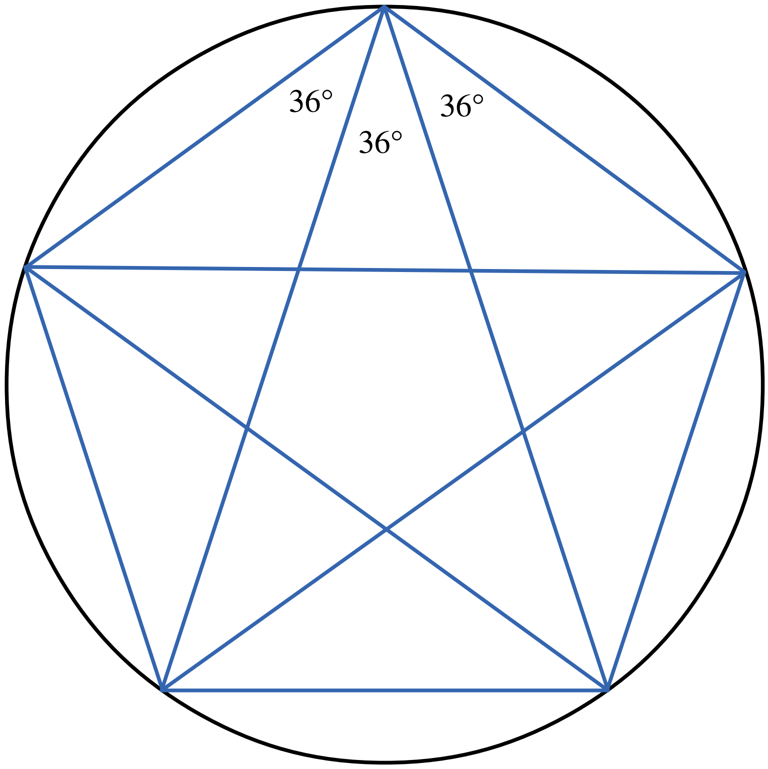
Der **Goldene Schnitt** am Pentagramm (Beweis)



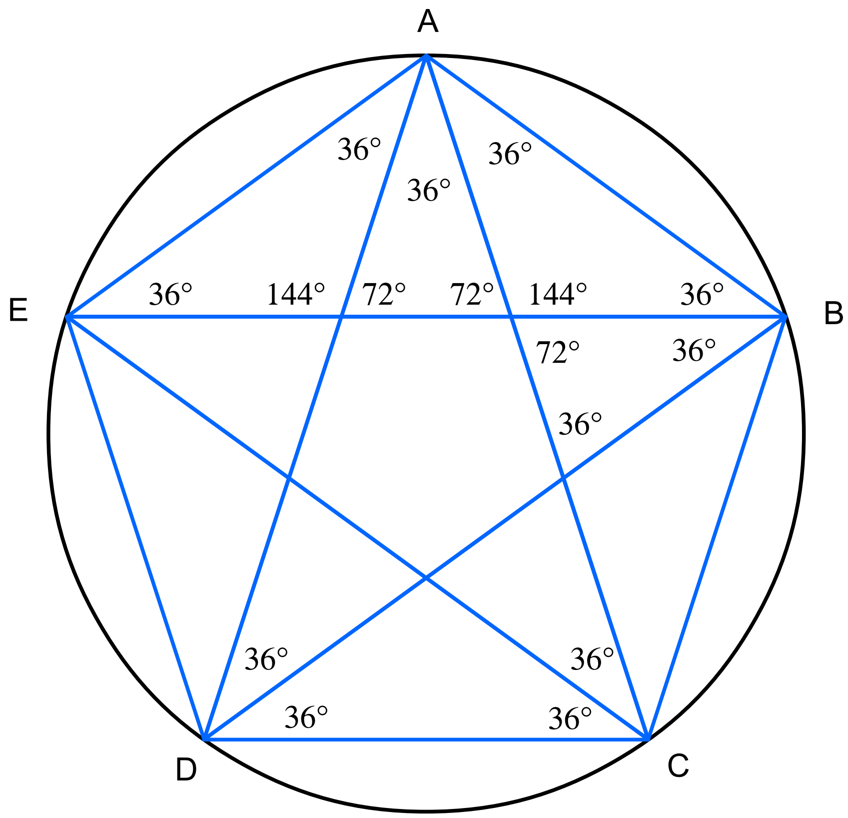
Die Mittelpunktswinkel zu den Seiten des regelmäßigen im 5-Ecks sind 360°:5=72°.



Die Innenwinkel des regelmäßigen 5-Ecks sind 2(180°-72°):2=108°.

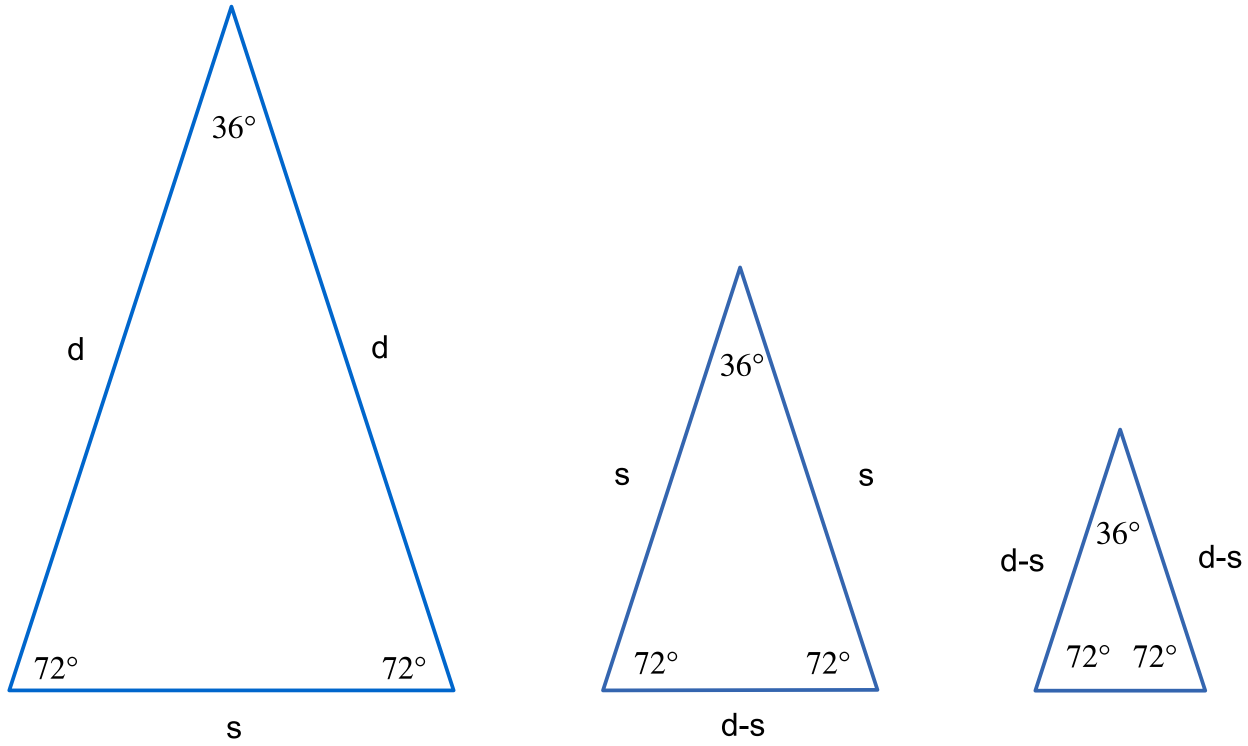


Die Peripheriewinkel zu den Seiten des regelmäßigen 5-Ecks betragen 72°:2=36°.



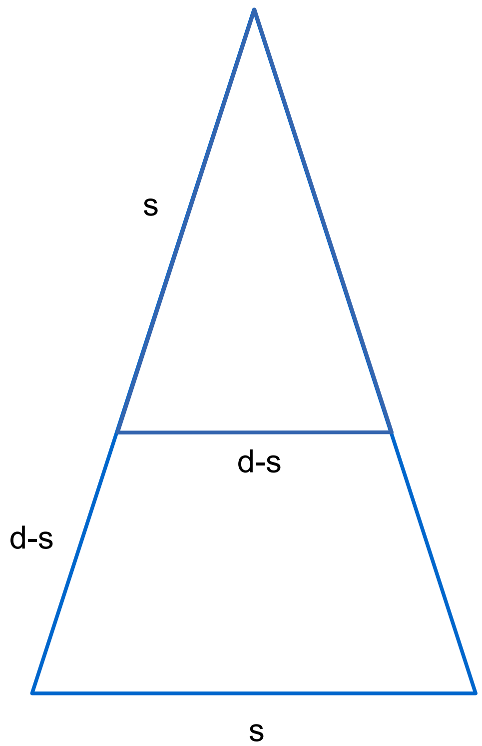
Da die Dreiecke ΔADE und ΔACB kongruent sind, ist ΔACD gleichschenklig mit den Basiswinkeln 72° und dem Spitzenwinkel 36°.

Insgesamt gibt es 3 unterschiedlich große gleichschenklige Dreiecke mit den Basiswinkeln 72° und den Spitzenwinkeln 36° .



2. Strahlensatz.

$$\frac{s}{d-s} = \frac{d}{s} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{d}{s}\right)^2 = \frac{d}{s} + 1$$



Lucas-Zahlenfolgen

Lukas-Folge (Verallgemeinerte Fibonacci-Folge), **Édouard Lucas (1842 – 1891)** :

$$a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= 0a_2 + 1a_1 \\
L_2 &= 1a_2 + 0a_1 \\
L_3 &= 1a_2 + 1a_1 \\
L_4 &= 2a_2 + 1a_1 \\
L_5 &= 3a_2 + 2a_1 \\
L_6 &= 5a_2 + 3a_1 \\
L_7 &= 8a_2 + 5a_1 \\
L_8 &= 13a_2 + 8a_1 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$L_n = F_{n-1}a_2 + F_{n-2}a_1 \ ,$$

wobei die Koeffizienten „versetzt“ die **Fibonaccizahlenfolge** durchlaufen.

Betrachtung der Wachstumsfaktoren der Lucas-Folge:

$$V_n := \frac{L_{n+1}}{L_n}$$

$$V_{n+2} = \frac{L_{n+3}}{L_{n+2}}$$

$$V_{n+2} = \frac{F_{n+2}a_2 + F_{n+1}a_1}{F_{n+1}a_2 + F_n a_1}$$

$$V_{n+2} = \frac{(F_{n+1} + F_n)a_2 + F_{n+1}a_1}{F_{n+1}a_2 + F_n a_1}$$

$$V_{n+2} = \frac{\left(\frac{F_{n+1}}{F_n} + 1\right)a_2 + \frac{F_{n+1}}{F_n}a_1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}a_2 + a_1}$$

Grenzwertbetrachtung:

$$\lim_{n\to\infty} V_{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{F_{n+1}}{F_n} + 1\right)a_2 + \frac{F_{n+1}}{F_n}a_1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}a_2 + a_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_{n+2} = \frac{(\varphi + 1)a_2 + \varphi a_1}{\varphi a_2 + a_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_{n+2} = \frac{\varphi^2 a_2 + \varphi a_1}{\varphi a_2 + a_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_{n+2} = \frac{\varphi(\varphi a_2 + a_1)}{\varphi a_2 + a_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_{n+2} = \varphi$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \varphi}$$