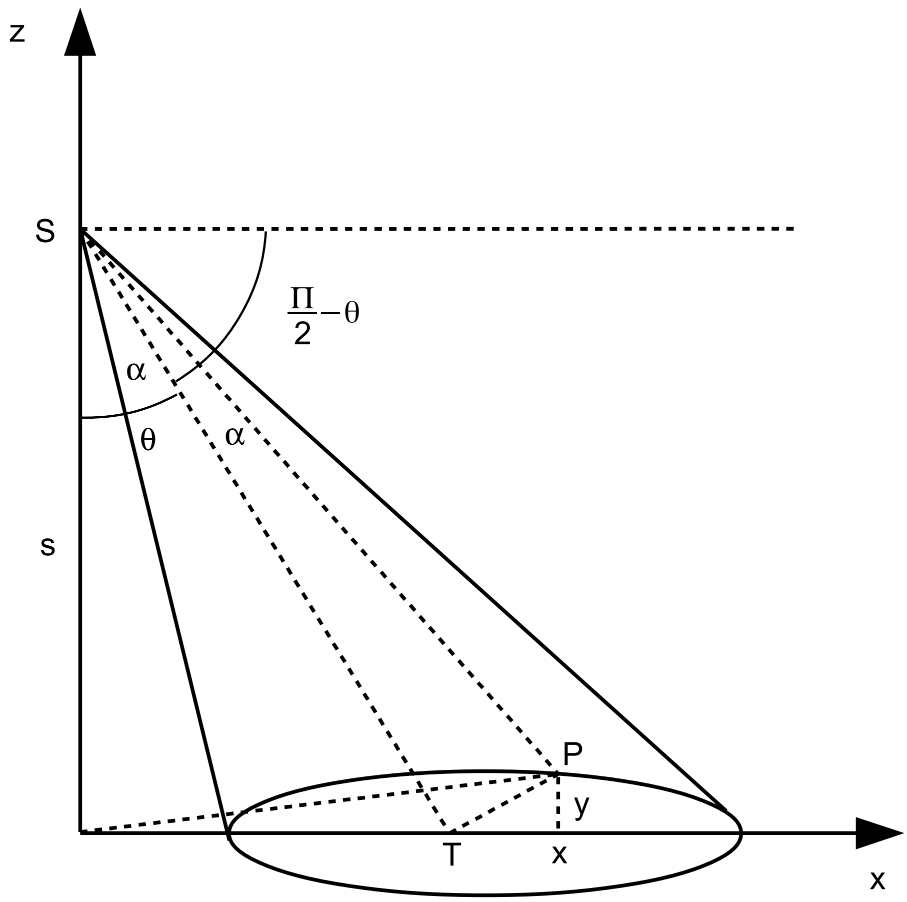
Kegelschnitte

Arno Fehringer

Mai 2014

Kegelschnitte



$t = s \tan(\theta)$

Gegeben sei der Kegel mit Spitze S , Spitzenwinkel α mit $0 < \alpha < \frac{\Pi}{2}$,
Neigungswinkel der Kegelachse θ mit $0 < \theta < \frac{\Pi}{2}$.
Bemerkung : Im Bild zeigt die y-Achse in die Papierebene hinein.

Gesucht ist der Schnitt des Kegels mit der x-y - Ebene .

Es gelten folgende Gleichungen :

$$|TP|^2 = (x - s \tan\theta)^2 + y^2$$

$$|ST|^2 = s \tan^2\theta + s^2$$

$$|SP|^2 = x^2 + y^2 + s^2$$

Kosinussatz:

$$|TP|^2 = |ST|^2 + |SP|^2 - 2|ST||SP|\cos\alpha$$

Es folgt :

$$|TP|^2 = |ST|^2 + |SP|^2 - 2|ST||SP|\cos\alpha$$

$$(x-s\ \tan\theta)^2+y^2 = s^2\ \tan^2\theta+s^2+x^2+y^2+s^2-2s\sqrt{\tan^2\theta+1}\sqrt{x^2+y^2+s^2}\cos\alpha$$

$$x^2-2s\tan\theta\,x+s^2\tan^2\theta+y^2 = s^2\tan^2\theta+s^2+x^2+y^2+s^2-2s\sqrt{\tan^2\theta+1}\sqrt{x^2+y^2+s^2}\cos\alpha$$

$$-2s\tan\theta\,x = s^2+s^2-2s\sqrt{\tan^2\theta+1}\sqrt{x^2+y^2+s^2}\cos\alpha$$

$$-\tan\theta\,x = s-\sqrt{\tan^2\theta+1}\sqrt{x^2+y^2+s^2}\cos\alpha$$

$$\sqrt{\tan^2\theta+1}\sqrt{x^2+y^2+s^2}\cos\alpha = \tan\theta\,x+s$$

$$(\tan^2\theta+1)(x^2+y^2+s^2)\cos^2\alpha = (\tan\theta\,x+s)^2$$

$$(\tan^2\theta+1)\cos^2\alpha\,x^2 + (\tan^2\theta+1)\cos^2\alpha\,y^2 + (\tan^2\theta+1)\cos^2\alpha\,s^2 = \tan^2\theta\,x^2+2s\tan\theta\,x+s^2$$

$$\left[(\tan^2\theta+1)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right]x^2 - 2s\tan\theta\,x + \left[(\tan^2\theta+1)\cos^2\alpha\right]y^2 = s^2\left[1-(\tan^2\theta+1)\cos^2\alpha\right]$$

Dies ist die **Gleichung der Schnittmenge des Kegels mit der x-y – Ebene** .

Fallunterscheidungen :

Gleichung der Schnittmenge des Kegels mit der x-y – Ebene :

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right]x^2 \;-\; 2s\tan\theta\, x \;+\; \left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

Der Koeffizient von x^2 kann unterschiedliche Vorzeichen haben oder gleich 0 sein .

1. Fall : $\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta \;=\; 0$

$$\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha \;-\; \tan^2\theta \;=\; 0$$
$$\tan^2\theta\;\cos^2\alpha \;+\; \cos^2\alpha \;-\; \tan^2\theta \;=\; 0$$
$$\cos^2\alpha \;=\; \tan^2\theta\left(1-\cos^2\alpha\right)$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} \;=\; \tan^2\theta$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \;=\; \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\tan^2\alpha} \;=\; \tan^2\theta$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} \;=\; \tan\theta$$

Wegen $\tan\theta \;=\; \tan\, \frac{\Pi}{2}-\left(\frac{\Pi}{2}-\theta\right) \;=\; \frac{1}{\tan\frac{\Pi}{2}-\theta}$ folgt :

$$\frac{1}{\tan\alpha} \;=\; \frac{1}{\tan\frac{\Pi}{2}-\theta}$$

$$\tan\alpha \;=\; \tan\frac{\Pi}{2}-\theta$$

$$\alpha \;=\; \frac{\Pi}{2}-\theta \quad .$$

Das heißt, dass die **„obere“ Mantellinie des Kegels parallel zur Schnittebene** ist.

Die **Gleichung der Schnittmenge** ist

$$-\ 2s\tan\theta\, x\ +\ \left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2\ =\ s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2\ =\ 2s\ \tan\theta\ x+\ s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]\quad .$$

Nullstellenbetrachtung : $y\ =\ 0$

$$0\ =\ 2s\ \tan\theta\ x\ +\ s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

$$x\ =\ \frac{-s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}{2s\ \tan\theta}$$

$$x\ =\ \frac{-s\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}{2\ \tan\theta}$$

$$x_0\ :=\ \frac{-s\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}{2\ \tan\theta}$$

Koordinatentransformation :

$$\begin{array}{lcl} x'\ =\ x-x_0 & \Leftrightarrow & x\ =\ x'+x_0 \\ y'\ =\ y & & y\ =\ y' \end{array}$$

Gleichung der Schnittmenge in den neuen Koordinaten :

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2\ =\ 2s\ \tan\theta\ \left(x'+x_0\right)\ +\ s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2\ =\ 2s\ \tan\theta\ x'+2s\ \tan\theta\ x_0\ +\ s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2\ =\ 2s\ \tan\theta\ x'-s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]\ +\ s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2\ =\ 2s\ \tan\theta\ x'$$

$$\boxed{y^2\ =\ \frac{2s\ \tan\theta}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}\ x'}$$

Bemerkung :
Das Quadrat y^2 ist gleich dem „Rechteck“ $\dfrac{2s\ \tan\theta}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}\ x'$.

Die Schnittmenge ist eine **Parabel** [gr. paraballein = gleichsetzen] .

Gleichung der Schnittmenge des Kegels mit der x-y – Ebene :

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right]x^2 \;-\; 2s\tan\theta\, x \;+\; \left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

2. Fall : $\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta \;>\; 0$

$$\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha \;-\; \tan^2\theta \;>\; 0$$
$$\tan^2\theta\;\cos^2\alpha \;+\; \cos^2\alpha \;-\; \tan^2\theta \;>\; 0$$
$$\cos^2\alpha \;>\; \tan^2\theta\left(1-\cos^2\alpha\right)$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} \;>\; \tan^2\theta$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \;>\; \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\tan^2\alpha} \;>\; \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\tan\alpha} \;>\; \tan\theta$$
$$\frac{1}{\tan\alpha} \;>\; \frac{1}{\tan\frac{\Pi}{2}-\theta}$$
$$\tan\alpha \;<\; \tan\frac{\Pi}{2}-\theta$$

$$\alpha \;<\; \frac{\Pi}{2}-\theta$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; -\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right]x^2 \;+\; 2s\tan\theta\, x \;+\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

Definition : $a \;:=\; -\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right] \;<\; 0$

$b \;:=\; 2s\tan\theta$

$c \;:=\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; ax^2 \;+\; bx \;+\; c$$

Nullstellenbetrachtung : $y \;=\; 0$

$$0 \;=\; ax^2 \;+\; bx \;+\; c$$

$$x_{0/1} \;=\; \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_0 \;=\; \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Koordinatentransformation :

$$x' = x - x_0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x = x' + x_0$$
$$y' = y \qquad\qquad\qquad y = y'$$

Gleichung der Schnittmenge in den neuen Koordinaten :

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = a\left(x'+x_0\right)^2 + b\left(x'+x_0\right) + c$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = a x'^2 + 2ax_0x' + a x_0^2 + b x'+bx_0 + c$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = a x'^2 + \left(2ax_0+b\right)x' + a x_0^2 + bx_0 + c$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = a x'^2 + \left(2ax_0+b\right)x'$$

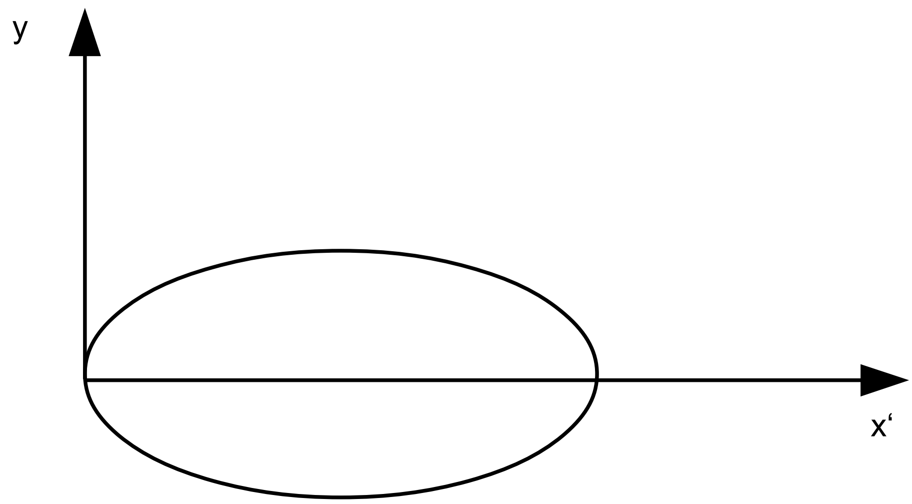
$$y^2 = \frac{a}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x'^2 + \frac{2ax_0+b}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x'$$

$$\boxed{y^2 = \frac{2ax_0+b}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x' + \frac{a}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x'^2 +}$$

Bemerkung :
Wegen $a < 0$ ist das Quadrat y^2 kleiner als das „Rechteck“ $\dfrac{2s\ \tan\theta}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}\ x'$.

Die Schnittmenge ist eine **Ellipse** [gr. elleipein = fehlen lassen] .

Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt eine **quadratische Funktion** dar, und da der Koeffizient von x'^2 negativ ist , hat die quadratische Funktion eine **Maximalstelle**, die zugleich auch **Symmetriestelle** ist .



Gleichung der Schnittmenge des Kegels mit der x-y – Ebene :

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right]x^2 \;-\; 2s\tan\theta\, x \;+\; \left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

3. Fall : $\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta \;<\; 0$

$$\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha \;-\; \tan^2\theta \;<\; 0$$
$$\tan^2\theta\;\cos^2\alpha \;+\; \cos^2\alpha \;-\; \tan^2\theta \;<\; 0$$
$$\cos^2\alpha \;<\; \tan^2\theta\left(1-\cos^2\alpha\right)$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} \;<\; \tan^2\theta$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \;<\; \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\tan^2\alpha} \;<\; \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\tan\alpha} \;<\; \tan\theta$$
$$\frac{1}{\tan\alpha} \;<\; \frac{1}{\tan\frac{\Pi}{2}-\theta}$$
$$\tan\alpha \;>\; \tan\frac{\Pi}{2}-\theta$$

$$\alpha \;>\; \frac{\Pi}{2}-\theta$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; -\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right]x^2 \;+\; 2s\tan\theta\, x \;+\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$$

Definition : $a \;:=\; -\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha-\tan^2\theta\right] \;>\; 0$

$b \;:=\; 2s\tan\theta$

$c \;:=\; s^2\left[1-\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 \;=\; ax^2 \;+\; bx \;+\; c$$

Nullstellenbetrachtung : $y \;=\; 0$

$$0 \;=\; ax^2 \;+\; bx \;+\; c$$

$$x_{1/0} \;=\; \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_0 \;=\; \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Koordinatentransformation :

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' \end{aligned}$$

Gleichung der Schnittmenge in den neuen Koordinaten :

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = a(x'+x_0)^2 + b(x'+x_0) + c$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = ax'^2 + 2ax_0x' + ax_0^2 + bx'+bx_0 + c$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = ax'^2 + \left(2ax_0+b\right)x' + ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]y^2 = ax'^2 + \left(2ax_0+b\right)x'$$

$$y^2 = \frac{a}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x'^2 + \frac{2ax_0+b}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x'$$

$$\boxed{y^2 = \frac{2ax_0+b}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x' + \frac{a}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}x'^2 +}$$

Bemerkung :
Wegen $a > 0$ ist das Quadrat y^2 größer als das „Rechteck“ $\frac{2s\ \tan\theta}{\left[\left(\tan^2\theta+1\right)\cos^2\alpha\right]}\ x'$.

Die Schnittmenge ist eine **Hyperbel** [gr. hyperballein = übertreffen] .

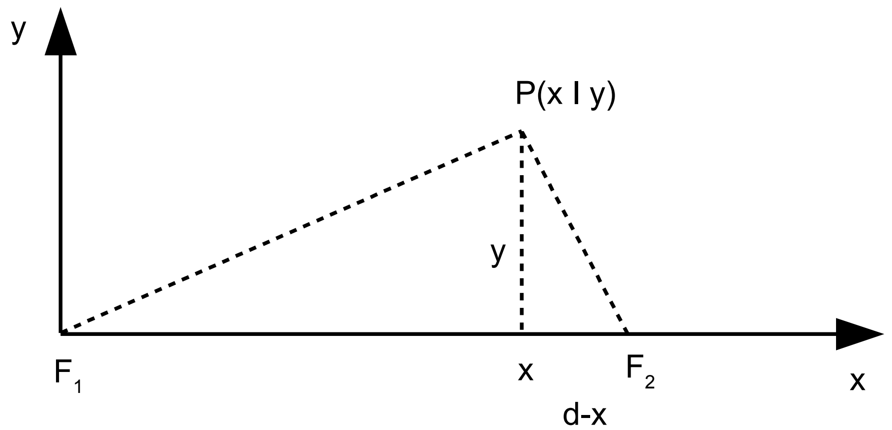
Erzeugung von Ellipse, Hyperbel, Parabel durch Abstandsbedingungen

Arno Fehringer

Mai 2014

Ellipse

Gegeben seien die Punkte F_1 , F_2 mit $|F_1F_2| = d$.
Gesucht ist die Menge der Punkte P mit der Eigenschaft , dass $|PF_1| + |PF_2| = l > d$ konstant ist .



$$\sqrt{(d-x)^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} = l$$

$$\sqrt{(d-x)^2+y^2} = l - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$(d-x)^2+y^2 = l^2 - 2l\sqrt{x^2+y^2} + x^2+y^2$$

$$d^2 - 2dx + x^2 + y^2 = l^2 - 2l\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2$$

$$d^2 - 2dx = l^2 - 2l\sqrt{x^2+y^2}$$

$$2l\sqrt{x^2+y^2} = 2dx + \left(l^2 - d^2\right)$$

$$4l^2(x^2+y^2) = 4d^2x^2 + 4\left(l^2 - d^2\right)dx + \left(l^2 - d^2\right)^2$$

$$4l^2x^2+4l^2y^2 = 4d^2x^2 + 4\left(l^2 - d^2\right)dx + \left(l^2 - d^2\right)^2$$

$$4l^2y^2 = -4(l^2-d^2)x^2 + 4\left(l^2 - d^2\right)dx + \left(l^2 - d^2\right)^2$$

Definition : $a := -4(l^2 - d^2) < 0$

$$b := 4(l^2 - d^2)dx$$

$$c := (l^2 - d^2)^2$$

$$4l^2y^2 = ax^2 + bx + c$$

Nullstellenbetrachtung : $y = 0$

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$x_{0/1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Koordinatentransformation :

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' \end{aligned}$$

$$4l^2y^2 = a(x' + x_0)^2 + b(x' + x_0) + c$$

$$4l^2y^2 = ax'^2 + 2ax_0x' + ax_0^2 + bx' + bx_0 + c$$

$$4l^2y^2 = ax'^2 + (2ax_0 + b)x' + ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$4l^2y^2 = ax'^2 + (2ax_0 + b)x'$$

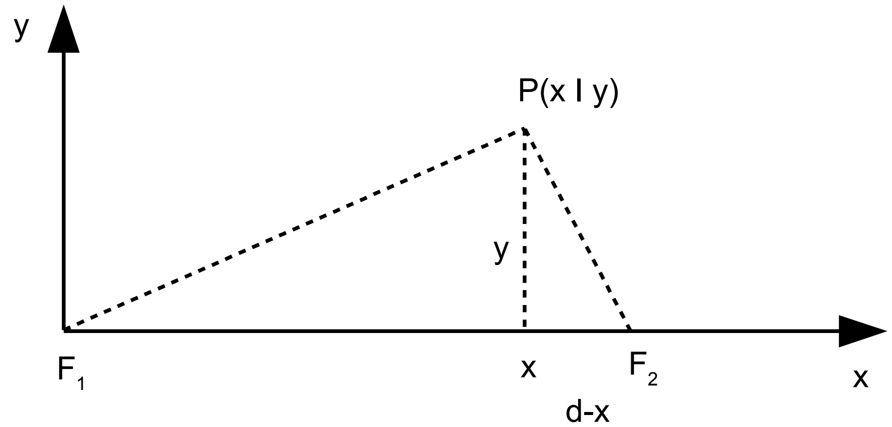
$$4l^2y^2 = (2ax_0 + b)x' + ax'^2$$

$$\boxed{y^2 = \frac{(2ax_0 + b)}{4l^2}x' + \frac{a}{4l^2}x'^2} \quad \text{mit} \quad a < 0$$

Wie aus der **Theorie der Kegelschnitte** bekannt ist, stellt diese Gleichung eine **Ellipse** [gr. elleipein = fehlen lassen] dar .

Hyperbel

Gegeben seien die Punkte F_1 , F_2 mit $|F_1F_2| = d$.
Gesucht ist die Menge der Punkte P mit der Eigenschaft , dass $|PF_1| - |PF_2| = l$ konstant ist .



Es folgt zunächst :

$$|PF_1| - |PF_2| = l$$
$$|PF_1| = |PF_2| + l$$
$$|PF_2| + |F_2F_1| > |PF_1| = |PF_2| + l$$
$$|PF_2| + d > |PF_1| = |PF_2| + l$$
$$|PF_2| + d > |PF_2| + l$$
$$d > l$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(d-x)^2+y^2} = l$$

$$\sqrt{(d-x)^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} - l$$

$$(d-x)^2+y^2 = x^2+y^2 - 2l\sqrt{x^2+y^2} + l^2$$

$$d^2 - 2dx + x^2 + y^2 = x^2+y^2 - 2l\sqrt{x^2+y^2} + l^2$$

$$d^2 - 2dx = l^2 - 2l\sqrt{x^2+y^2}$$

$$2l\sqrt{x^2+y^2} = 2dx + (l^2 - d^2)$$

$$4l^2(x^2+y^2) = 4d^2x^2 + 4(l^2 - d^2)dx + (l^2 - d^2)^2$$

$$4l^2x^2 + 4l^2y^2 = 4d^2x^2 + 4(l^2 - d^2)dx + (l^2 - d^2)^2$$

$$4l^2y^2 = 4(d^2-l^2)x^2 + 4(l^2 - d^2)dx + (l^2 - d^2)^2$$

Definition : $a := 4(d^2 - l^2) > 0$

$b := 4(l^2 - d^2)dx$

$c := (l^2 - d^2)^2$

$$4l^2y^2 = ax^2 + bx + c$$

Nullstellenbetrachtung : $y = 0$

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$x_{1/0} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Koordinatentransformation :

$$\begin{matrix} x' = x - x_0 \\ y' = y \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = x' + x_0 \\ y = y' \end{matrix}$$

$$4l^2y^2 = a(x'+x_0)^2 + b(x'+x_0) + c$$

$$4l^2y^2 = ax'^2 + 2ax_0x' + ax_0^2 + bx' + bx_0 + c$$

$$4l^2y^2 = ax'^2 + (2ax_0+b)x' + ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$4l^2y^2 = ax'^2 + (2ax_0+b)x'$$

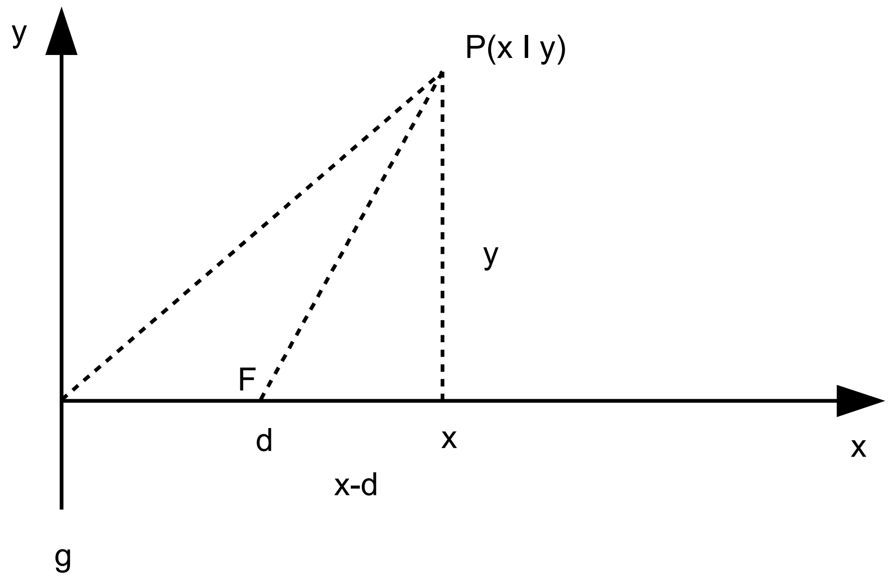
$$4l^2y^2 = (2ax_0+b)x' + ax'^2$$

$$\boxed{y^2 = \frac{(2ax_0+b)}{4l^2}x' + \frac{a}{4l^2}x'^2} \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Wie aus der **Theorie der Kegelschnitte** bekannt ist, stellt diese Gleichung eine **Hyperbel** [gr. hyperballein = übertreffen] dar .

Parabel

Gegeben seien ein Punkt F und eine Gerade g mit $|Fg| = d \neq 0$.
Gesucht ist die Menge der Punkte P mit der Eigenschaft , dass $|PF| = |Pg|$ ist .



$$\sqrt{(x-d)^2+y^2} = x$$

$$(x-d)^2+y^2 = x^2$$

$$y^2 = x^2 - (x-d)^2$$

$$y^2 = x^2 - x^2 + 2dx - d^2$$

$$y^2 = 2dx - d^2$$

Nullstellenbetrachtung : $y = 0$

$$0 = 2dx - d^2$$

$$x_0 = \frac{d}{2}$$

Koordinatentransformation :

$$x' = x - x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x' + x_0$$
$$y' = y \qquad\qquad\qquad y = y'$$

$$y^2 = 2d(x' + x_0) - d^2$$

$$y^2 = 2dx' + 2d\,x_0 - d^2$$

$$y^2 = 2dx' + d^2 - d^2$$

$$\boxed{y^2 = 2dx'}$$

Wie aus der **Theorie der Kegelschnitte** bekannt ist, stellt diese Gleichung eine **Parabel** [gr. paraballein = gleichsetzen] dar .