Zahlbereichserweiterungen

Arno Fehringer, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

Juli 2014

Die Grundrechenarten in $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ und ihre Regeln

Addition, Subtraktion

Kommutativität $a + b = b + a$

Neutralität $a + 0 = 0 + a = a$ $\quad a - 0 = a \;,\; a - a = 0$

Inversion $(a + b) - b = a$

$(a - b) + b = a \;,\quad a \geq b$

Assozativität $a + (b + c) = (a + b) + c$

$a - (b + c) = (a - b) - c \;,\quad a \geq b + c$

$a + (b - c) = (a + b) - c \;,\quad b \geq c$

$a - (b - c) = (a - b) + c \;,\quad b \geq c \;,\quad a \geq b$

Multiplikation, Division

Definition : $a \cdot b := b + ... + b$, Summe aus a gleichen Summanden b

Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$

Neutralität $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $\quad a : 1 = a \;,\; a : a = 1$

Inversion $(a \cdot b) : b = a \;,\quad b, \neq 0$

$(a : b) \cdot b = a \;,\quad b, \neq 0$

Assozativität $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a : (b \cdot c) = (a : b) : c \;,\quad b, c \neq 0$

$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c \;,\quad c \neq 0$

$a : (b : c) = (a : b) \cdot c \;,\quad b, c \neq 0$

Distributivität $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \;,\quad b \geq c$

$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a \;,\quad b \geq c$

$(a + b) : c = a : c + b : c \;,\quad c \neq 0$

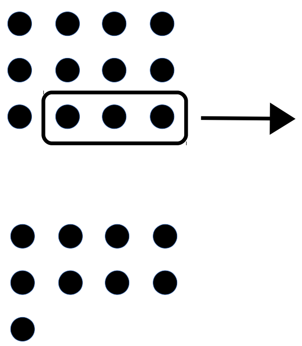
$(a - b) : c = a : c - b : c \;,\quad a \geq b$

Veranschaulichung einiger Regeln

$\boxed{a - (b - c) = (a - b) + c}$

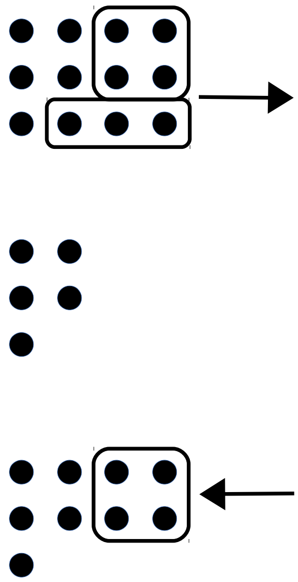
$12 - (7 - 4) = (12 - 7) + 4$

$12 - (7 - 4) = 12 - 3 = 9$



$7 = 3 + 4$

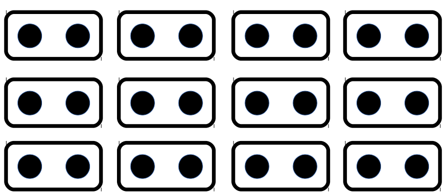
$(12 - 7) + 4 = 5 + 4 = 9$



$\boxed{a : (b : c) = (a : b) \cdot c}$

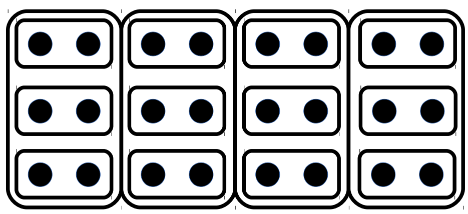
$24 : (6 : 3) = (24 : 6) \cdot 3$

$24 : (6 : 3) = 24 : 2 = 12$



$6 : 3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 3 \cdot 2$

$(24 : 6) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$



Formale Herleitung einiger Regeln aus anderen

Gültig seien die **Inversion** und die ersten beiden Regeln der **Assozativität** der Multiplikation :

$$(a \cdot b) : b = a$$

$$(a : b) \cdot b = a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

Dann folgen die zwei weiteren Regeln der **A**ssozativität :

$$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$$

$$(a \cdot (b : c)) \cdot c = a \cdot b$$

$$a \cdot ((b : c) \cdot c) = a \cdot b$$

$a \cdot b = a \cdot b$ wahr

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$$

$$(a : (b : c)) : c = a : b$$

$$a : ((b : c) \cdot c) = a : b$$

$a : b = a : b$ wahr

Die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$

Die Subtraktion im Sinne des Wegnehmens einer Anzahl b von einer Anzahl a von Objekten ist nur für den Fall, dass $a \geq b$ ist, ausführbar:

$$a - b = c \quad \text{mit} \quad a \geq b \quad .$$

Will man die Subtraktion unbegrenzt ausführen, also für den Fall $a < b$, kann man die unbegrenzte Ausführbarkeit der Regeln der **Assoziativität** , der **Inversion** und der **Distributivität** fordern.

Sei also $a < b$, etwa $b = a + \delta$ mit $\delta = b - a$.

Dann ist

$$a - b = a - (a + \delta) = (a - a) - \delta = 0 - \delta =: -\delta = -(b-a) \quad ,$$

und man kann **negative Zahlen definieren** :

$$\boxed{-\delta := 0 - \delta} \quad .$$

Für die Subtraktion gilt nun :

$$\boxed{a - b = \begin{cases} a - b & \text{falls} \quad a \geq b \\ -(b - a) & \text{falls} \quad b > a \end{cases}} \quad .$$

Wir betrachten nun die um die **negativen Zahlen erweiterte Zahlenmenge** , die Menge der **Ganzen Zahlen**

$$\mathbb{Z} := \{ \ldots -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3 \ \ldots \} \quad ,$$

und fragen nach Rechenregeln in $\mathbb{Z}$:

$$a + (-b) = a + (0 - b) = (a + 0) - b = a - b$$

$$-a + (-b) = -a - b = (0 - a) - b = 0 - (a + b) = -(a + b)$$

$$a - (-b) = a - (0 - b) = (a - 0) + b = a + b$$

$$-a - (-b) = -a + b = (0 - a) + b = 0 - (a - b) = -(a - b)$$

Wir erhalten :

$$\boxed{a + (-b) = a - b}$$

$$\boxed{-a + (-b) = -(a + b)}$$

$$\boxed{a - (-b) = a + b}$$

$$\boxed{-a - (-b) = -(a - b)} \quad .$$

Außerdem ist

$$-(-b) = 0 - (-b) = 0 + b = b$$

$$\boxed{-(-b) = b} \; .$$

Die **Kommutativität** der Addition ist erfüllt :

$$a + (-b) = a - b = \begin{cases} a-b & \text{falls} \quad a \geq b \\ -(b-a) & \text{falls} \quad a < b \end{cases}$$

$$(-b) + a = (-b) - (-a) = -(b-a) = \begin{cases} -(-(a-b)) = a-b & \text{falls} \quad a \geq b \\ -(b-a) & \text{falls} \quad a < b \end{cases} ,$$

also

$$\boxed{a + (-b) = (-b) + a} \quad \text{und} \quad \boxed{(-a) + b = b + (-a)} \; .$$

$$(-a) + (-b) = (0 - a) - b = 0 - (a + b) = 0 - (b + a) = (-b) + (-a) \; ,$$

also

$$\boxed{(-a) + (-b) = (-b) + (-a)} \; .$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt jetzt auch :

$$\boxed{a - b = -(b - a)}$$

Die **Neutralität** der Addition ist erfüllt :

$$(-a) + 0 = (0 - a) + 0 = 0 - (a - 0) = 0 - a = (-a)$$

$$0 + (-a) = 0 - a = 0 = (-a)$$

$$(-a) - 0 = (0 - a) - 0 = 0 - (a + 0) = 0 - a = (-a)$$

Die **Inversion** bezüglich Addition und Subtraktion ist erfüllt :

$$(a + (-b)) - (-b) = (a - b) + b = a$$

$$(a - (-b)) + (-b) = (a + b) - b = a$$

$$((-a) + (-b)) - (-b) = (-(a + b)) - (-b) = -((a + b) - b) = (-a)$$

$$((-a) - (-b)) + (-b) = (-(a - b)) - b = -((a - b) + b) = (-a)$$

Dass auch die **Assoziativität** der Addition erfüllt ist, sei nur an einem Beispiel gezeigt :

$$(-a) - ((-b) + c) = (-a) - ((0 - b) + c)$$
$$(-a) - ((-b) + c) = (-a) - (0 - (b - c))$$
$$(-a) - ((-b) + c) = (-a) - (-(b - c))$$
$$(-a) - ((-b) + c) = (-a) + (b - c)$$
$$(-a) - ((-b) + c) = ((-a) + b) - c$$

$$\boxed{(-a) - ((-b) + c) = ((-a) - (-b)) - c}$$

Vorzeichenregeln bei der Multiplikation und Division :

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, $\boxed{a \cdot 0 = 0}$

$(-a) \cdot 0 = (-a) \cdot (0 + 0) = (-a) \cdot 0 + (-a) \cdot 0$, $\boxed{(-a) \cdot 0 = 0}$

$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, $\boxed{0 \cdot a = 0}$

$0 \cdot (-a) = (0 + 0) \cdot (-a) = 0 \cdot (-a) + 0 \cdot (-a)$, $\boxed{0 \cdot (-a) = 0}$

$$a \cdot (-b) = a \cdot (0 - b) = a \cdot 0 - a \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot b = (0 - a) \cdot b = 0 \cdot b - a \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (-b) = (0-a) \cdot (-b) = 0 \cdot (-b) - a \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$$

also

$$\boxed{a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)}$$

$$\boxed{(-a) \cdot (-b) = a \cdot b} \; .$$

$a : (-b) = -c$
$a = (-c) \cdot (-b)$
$a = c \cdot b$
$a : b = c$

$$\boxed{a : (-b) = -(a : b)}$$

$(-a) : b = -c$
$(-a) = (-c) \cdot b$
$(-a) = -(c \cdot b)$
$a = c \cdot b$
$c = a : b$

$$\boxed{(-a) : b = -(a : b)}$$

$(-a) : (-b) = c$
$(-a) = c \cdot (-b)$
$(-a) = -(c \cdot b)$
$a = c \cdot b$
$c = a : b$

$$\boxed{(-a) : (-b) = a : b}$$

Die **Kommutativität** der Multiplikation ist erfüllt :

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$(-b) \cdot a = -(b \cdot a) = -(a \cdot b)$$

$$\boxed{a \cdot (-b) = (-b) \cdot a}$$

$$\boxed{(-a) \cdot b = b \cdot (-a)}$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$(-b) \cdot (-a) = b \cdot a = a \cdot b$$

$$\boxed{(-a) \cdot (-b) = (-b) \cdot (-a)}$$

Die **Neutralität** bezüglich der Multiplikation und Division ist erfüllt :

$$(-a) \cdot 1 = -(a \cdot 1) = (-a)$$

$$1 \cdot (-a) = -(1 \cdot a) = (-a)$$

$$(-a) : 1 = -(a : 1) = (-a)$$

Die **Inversion** bezüglich Multiplikation und Division ist erfüllt :

$$(a \cdot (-b)) : (-b) = (-(a \cdot b)) : (-b)$$
$$(a \cdot (-b)) : (-b) = (a \cdot b) : b$$

$$\boxed{(a \cdot (-b)) : (-b) = a}$$

$$(a : (-b)) \cdot (-b) = (-(a : b)) \cdot (-b)$$
$$(a : (-b)) \cdot (-b) = (a : b) \cdot b$$

$$\boxed{(a : (-b)) \cdot (-b) = a}$$

$$((-a) \cdot (-b)) : (-b) = (a \cdot b) : (-b)$$
$$((-a) \cdot (-b)) : (-b) = -((a \cdot b) : b)$$

$$\boxed{((-a) \cdot (-b)) : (-b) = (-a)}$$

$$((-a) : (-b)) \cdot (-b) = (a : b) \cdot (-b)$$
$$((-a) : (-b)) \cdot (-b) = -((a : b) \cdot b)$$

$$\boxed{((-a) : (-b)) \cdot (-b) = (-a)}$$

Die **Assoziativität** der Multiplikation sei nur an einem Beispiel gezeigt :

$$(-a) : (b : (-c)) = (-a) : (-(b : c))$$
$$(-a) : (b : (-c)) = a : (b : c)$$
$$(-a) : (b : (-c)) = (a : b) \cdot c$$
$$(-a) : (b : (-c)) = (-(a : b)) \cdot (-c)$$

$$\boxed{(-a) : (b : (-c)) = ((-a) : b) \cdot (-c)}$$

Die **Distributivität** sei ebenfalls nur an einem Beispiel gezeigt :

$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (c - b)$$

1. Fall : $c \geq b$

$$(-a) \cdot ((-b) + c) = -(a \cdot (c - b))$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = -(a \cdot c - a \cdot b)$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = a \cdot b - a \cdot c$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (-b) + (-(a \cdot c))$$

$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (-b) + ((-a) \cdot c)$$

2. Fall : $c < b$

$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (c - b)$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (-(b - c))$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = a \cdot (b - c)$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = a \cdot b - a \cdot c$$
$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (-b) + (-(a \cdot c))$$

$$(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (-b) + ((-a) \cdot c)$$

In beiden Fällen gilt also :

$$\boxed{(-a) \cdot ((-b) + c) = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot c}$$

Die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$

Die Division zweier Zahlen aus $\mathbb{Z}$ soll unbegrenzt ausführbar sein:

$$Z : N =: \frac{Z}{N} \quad , \quad Z \, , \, N \in \mathbb{Z} \quad , \quad N \neq 0$$

$$\frac{-Z}{N} = (-Z) : N = -(Z : N) = -\frac{Z}{N}$$

$$\frac{Z}{-N} = Z : (-N) = -(Z : N) = -\frac{Z}{N}$$

$$\frac{Z}{1} = Z : 1 = Z$$

Definition der Menge der **Rationalen Zahlen** :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{Z}{N} \; : \; Z \in \mathbb{Z} , \; N \in \mathbb{N} , \; N \neq 0 \right\}$$

Vorausgesetzt seien in $\mathbb{Z}$ die **Vertauschbarkeit** und die **erweiterten Regeln der Assoziativität** von Multiplikation und Division :

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (c \cdot b) = (a \cdot c) \cdot b$$

$$(a : b) : c = a : (b \cdot c) = a : (c \cdot b) = (a : c) : b$$

$$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c) = (b \cdot a) : c = b \cdot (a : c) = (a : c) \cdot b$$

$$(a : b) \cdot c = a : (b : c) = c \cdot (a : b) = (c \cdot a) : b = (a \cdot c) : b \quad ,$$

kurz,

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)}$$

$$\boxed{(a : b) : c = (a : c) : b = a : (b \cdot c)} \quad , \quad b \, , \, c \neq 0$$

$$\boxed{(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)} \quad , \quad c \neq 0$$

$$\boxed{(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b = a : (b : c)} \quad . \quad b \, , \, c \neq 0$$

Gefordert sein soll, dass die **Vertauschbarkeit** und die **erweiterten Regeln der Assoziativität** sowie die **Neutralität** und die **Inversion** von Multiplikation und Division unbegrenzt ausführbar seien.

Dann gelten folgende **Regeln der Multiplikation und Division** :

$$\boxed{\frac{Z}{N} \cdot N = Z}$$

$$\frac{Z}{N} \cdot v = \frac{x}{y}$$

$$Z \cdot v = \frac{x}{y} \cdot N$$

$$\frac{Z \cdot v}{N} = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{\frac{Z}{N} \cdot v = \frac{Z \cdot v}{N}}$$

$$\frac{Z}{N} : v = \frac{x}{y}$$

$$Z : v = \frac{x}{y} \cdot N$$

$$(Z : v) : N = \frac{x}{y}$$

$$Z : (N \cdot v) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{Z}{N \cdot v} = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{\frac{Z}{N} : v = \frac{Z}{N \cdot v}}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot Z_2 = \frac{x}{y} \cdot N_2$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1} = \frac{x}{y} \cdot N_2$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2} = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2}}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} : (Z_2 : N_2) = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{Z_1}{N_1} : Z_2\right) \cdot N_2 = \frac{x}{y}$$

$$\frac{Z_1}{N_1 \cdot Z_2} \cdot N_2 = \frac{x}{y}$$

$$\frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot Z_2} = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot Z_2}}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2}}$$

Kommutativität :

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2} = \frac{Z_2 \cdot Z_1}{N_2 \cdot N_1} = \frac{Z_2}{N_2} \cdot \frac{Z_1}{N_1}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_2}{N_2} \cdot \frac{Z_1}{N_1}}$$

Neutralität :

$$\frac{Z}{N} \cdot 1 = \frac{Z}{N} \cdot \frac{1}{1} = \frac{Z \cdot 1}{N \cdot 1} = \frac{Z}{N} \qquad \frac{Z}{N} : 1 = \frac{Z}{N} : \frac{1}{1} = \frac{Z \cdot 1}{N \cdot 1} = \frac{Z}{N}$$

$$1 \cdot \frac{Z}{N} = \frac{1}{1} \cdot \frac{Z}{N} = \frac{1 \cdot Z}{1 \cdot N} = \frac{Z}{N} \qquad \frac{Z}{N} : \frac{Z}{N} = 1$$

Erweitern und Kürzen :

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{N} \cdot 1 = \frac{Z}{N} \cdot \frac{v}{v} = \frac{Z \cdot v}{N \cdot v}$$

Erweitern

$\longrightarrow$

$$\boxed{\frac{Z}{N} = \frac{Z \cdot v}{N \cdot v}}$$

$\longleftarrow$

Kürzen

Inversion :

$$\left(\frac{Z}{N} \cdot \frac{a}{b}\right) : \frac{a}{b} = \frac{Z \cdot a}{N \cdot b} : \frac{a}{b} = \frac{Z \cdot a}{N \cdot b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(Z \cdot a) \cdot b}{(N \cdot b) \cdot a} = \frac{Z \cdot (a \cdot b)}{N(b \cdot a)} = \frac{Z \cdot (a \cdot b)}{N(a \cdot b)} = \frac{Z}{N}$$

$$\left(\frac{Z}{N} : \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{a}{b} = \frac{Z \cdot b}{N \cdot a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{(Z \cdot b) \cdot a}{(N \cdot a) \cdot b} = \frac{Z \cdot (b \cdot a)}{N(a \cdot b)} = \frac{Z \cdot (a \cdot b)}{N(a \cdot b)} = \frac{Z}{N}$$

Die **Assoziativität** sei nur an einem Beispiel gezeigt :

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} : \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 \cdot N_3)}{N_1 \cdot (N_2 \cdot Z_3)} = \frac{(Z_1 \cdot Z_2) \cdot N_3}{(N_1 \cdot N_2) \cdot Z_3} = \frac{(Z_1 \cdot Z_2)}{(N_1 \cdot N_2)} \cdot \frac{N_3}{Z_3} = \left(\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2}\right) : \frac{Z_3}{N_{31}}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} : \frac{Z_3}{N_3}\right) = \left(\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2}\right) : \frac{Z_3}{N_{31}}}$$

Regeln der Addition und Subtraktion :

$$\frac{Z_1}{N} \pm \frac{Z_2}{N} = Z_1 : N \pm Z_2 : N = (Z_1 \pm Z_2) : N = \frac{Z_1 \pm Z_2}{N}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N} \pm \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 \pm Z_2}{N}}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \pm \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot N_2} \pm \frac{Z_2 \cdot N_1}{N_2 N_1} = \frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot N_2} \pm \frac{Z_2 \cdot N_1}{N_1 N_2} = \frac{Z_1 \cdot N_2 \pm Z_2 \cdot N_1}{N_1 \cdot N_2}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} \pm \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot N_2 \pm Z_2 \cdot N_1}{N_1 \cdot N_2}}$$

Neutralität :

$$\frac{Z}{N} + 0 = \frac{Z}{N} + \frac{0}{N} = \frac{Z + 0}{N} = \frac{Z}{N}$$

$$0 + \frac{Z}{N} = \frac{0}{N} + \frac{Z}{N} = \frac{0 + Z}{N} = \frac{Z}{N}$$

$$\frac{Z}{N} - 0 = \frac{Z}{N} - \frac{0}{N} = \frac{Z - 0}{N} = \frac{Z}{N}$$

Inversion :

$$\left(\frac{Z}{N} + \frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} = \frac{Z \cdot b + a \cdot N}{N \cdot b} - \frac{a \cdot N}{b \cdot N} = \frac{(Z \cdot b + a \cdot N) - a \cdot N}{N \cdot b} = \frac{Z \cdot b}{N \cdot b} = \frac{Z}{N}$$

$$\left(\frac{Z}{N} - \frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = \frac{Z \cdot b - a \cdot N}{N \cdot b} + \frac{a \cdot N}{b \cdot N} = \frac{(Z \cdot b - a \cdot N) + a \cdot N}{N \cdot b} = \frac{Z \cdot b}{N \cdot b} = \frac{Z}{N}$$

Die **Assoziativität** sei nur an einem Beispiel gezeigt :

$$\frac{Z_1}{N} + \left(\frac{Z_2}{N} - \frac{Z_3}{N}\right) = \frac{Z_1 + (Z_2 - Z_3)}{N} = \frac{(Z_1 + Z_2) - Z_3}{N} = \left(\frac{Z_1}{N} + \frac{Z_2}{N}\right) - \frac{Z_3}{N}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N} + \left(\frac{Z_2}{N} - \frac{Z_3}{N}\right) = \left(\frac{Z_1}{N} + \frac{Z_2}{N}\right) - \frac{Z_3}{N}}$$

Die **Distributivität** sei ebenfalls nur an einem Beispiel gezeigt :

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 \cdot N_3 - Z_3 \cdot N_2)}{N_1 \cdot (N_2 \cdot N_3)}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 \cdot N_3) - Z_1 \cdot (Z_3 \cdot N_2)}{N_1 \cdot (N_2 \cdot N_3)}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 \cdot N_3)}{N_1 \cdot (N_2 \cdot N_3)} - \frac{Z_1 \cdot (Z_3 \cdot N_2)}{N_1 \cdot (N_2 \cdot N_3)}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{(Z_1 \cdot Z_2) \cdot N_3}{(N_1 \cdot N_2) \cdot N_3} - \frac{(Z_1 \cdot Z_3) \cdot N_2}{(N_1 \cdot N_3) \cdot N_2}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2} - \frac{Z_1 \cdot Z_3}{N_1 \cdot N_3}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_3}{N_3}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{N_1} \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3}\right) = \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_3}{N_3}}$$