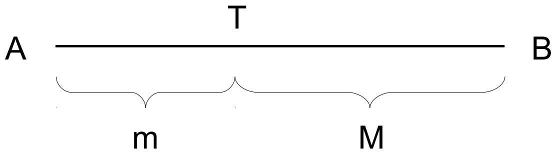
Goldenes Rechteck und Goldene Spirale

Arno Fehringer

Januar 2015

Goldenes Rechteck und **Goldene Spirale**

Der Goldene Schnitt



Eine Strecke $|AB|$ sei durch einen Punkt T in unterschiedlich lange Strecken $m < M$ aufgeteilt, so dass gelte:

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} \quad .$$

Die Gesamtstrecke soll sich also zur größeren Teilstrecke gleich verhalten wie die größere zur kleineren.

Die folgende Umformung führt auf eine quadratische Gleichung mit der Lösung $\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...$:

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m}$$

$$1 + \frac{m}{M} = \frac{M}{m}$$

$$1 + \frac{1}{\frac{M}{m}} = \frac{M}{m}$$

$$\frac{M}{m} + 1 = \left(\frac{M}{m}\right)^2$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0$$

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Hier ist nur die positive Lösung brauchbar:

$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...} \quad .$$

Definition :

Die Zahl $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ heißt die **Zahl des Goldenen Schnitts** oder einfach **Goldener Schnitt** :

$$\boxed{\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...}$$

Luca Pacioli (1445 – 1517; 72) bezeichnete diese Verhältniszahl auch als **Divina Proportione** (= Göttliche Proportion) und schrieb darüber ein Buch mit dem gleichnamigen Titel.

Portrait **Luca Paciolis**, gemalt von Jacopo Barbari, 1495

Die Zahl Φ erfüllt die Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$ und als Konsequenz:

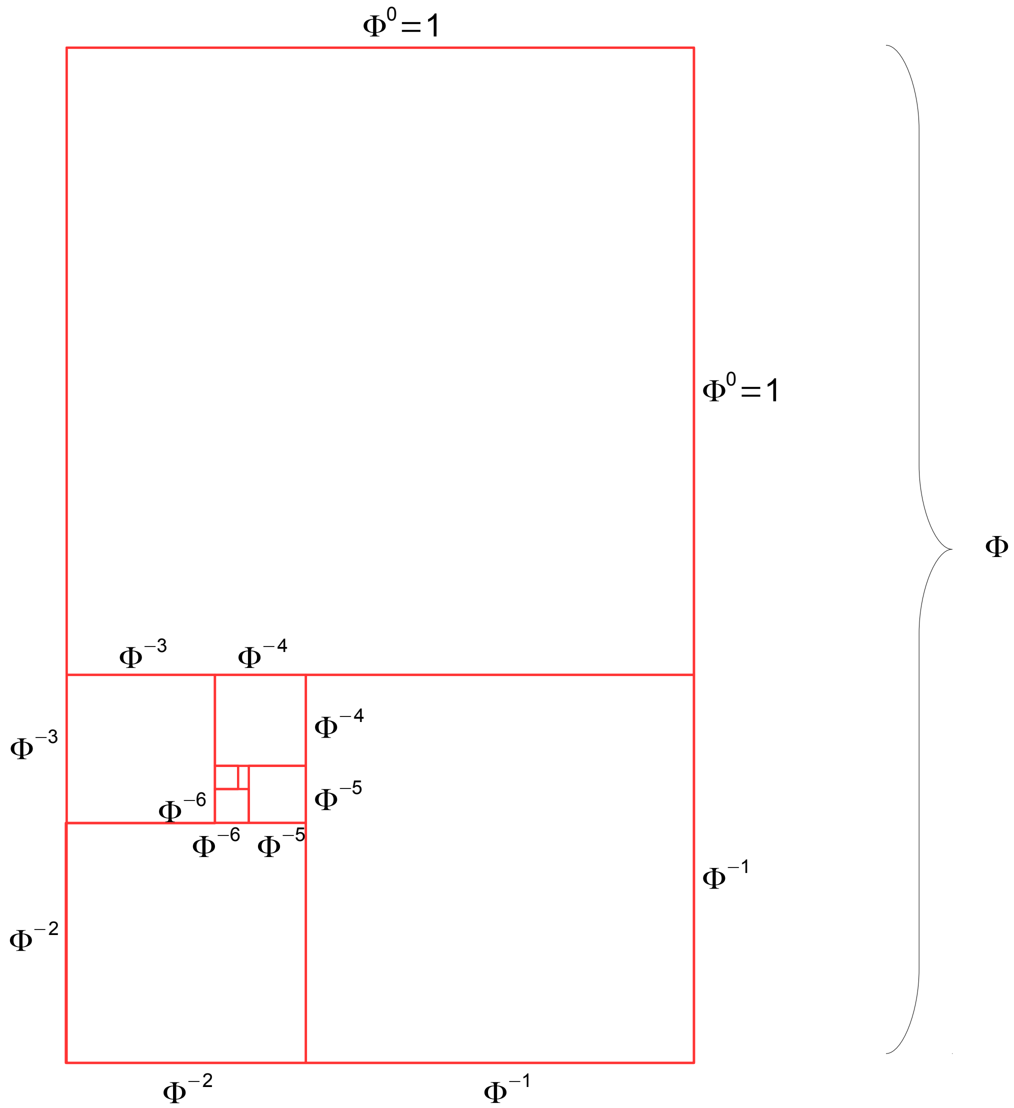
$\boxed{\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n}$ für alle $n \geq 0$.

Das Goldene Rechteck

Beim Goldenen Rechteck ist das Verhältnis von Länge zur Breite gleich Φ . Im Folgenden sei die die Länge gleich Φ und die Breite gleich $\Phi^0=1$.

Unterteilt man dieses Rechteck in eine Quadrat der Seitenlänge $\Phi^0=1$, so verbleibt ein kleineres Goldenes Rechteck mit der Länge $\Phi^0=1$ und der Breite Φ^{-1} . Das liegt an der quadratischen Gleichung für Φ :

$\Phi^2=\Phi + 1$ bzw. $\Phi=1 + \Phi^{-1}$.



Führt man diese Unterteilungen in einer speziellen Weise fort, so erhält man eine „Spirale mit immer kleiner werdenden Quadraten“ .

Das Zentrum $Z(x\,;y)$ dieser „Spirale“ hat die folgenden Koordinaten bezogen auf die linke untere Ecke des Goldenen Rechtecks, welche sich als Grenzwerte von geometrischen Reihen ergeben:

$$x = \Phi^{-3} + \Phi^{-7} + \Phi^{-11} + \Phi^{-15} + \ldots$$

$$x = \Phi^{-3}\left(1 + \Phi^{-4} + \Phi^{-8} + \Phi^{-12} + \ldots\right)$$

$$x = \Phi^{-3} \cdot \frac{1}{1 - \Phi^{-4}} = \Phi^{-3} \cdot \frac{\Phi^{4}}{\Phi^{4} - 1}$$

$$\boxed{x = \frac{\Phi}{\Phi^{4} - 1}}$$

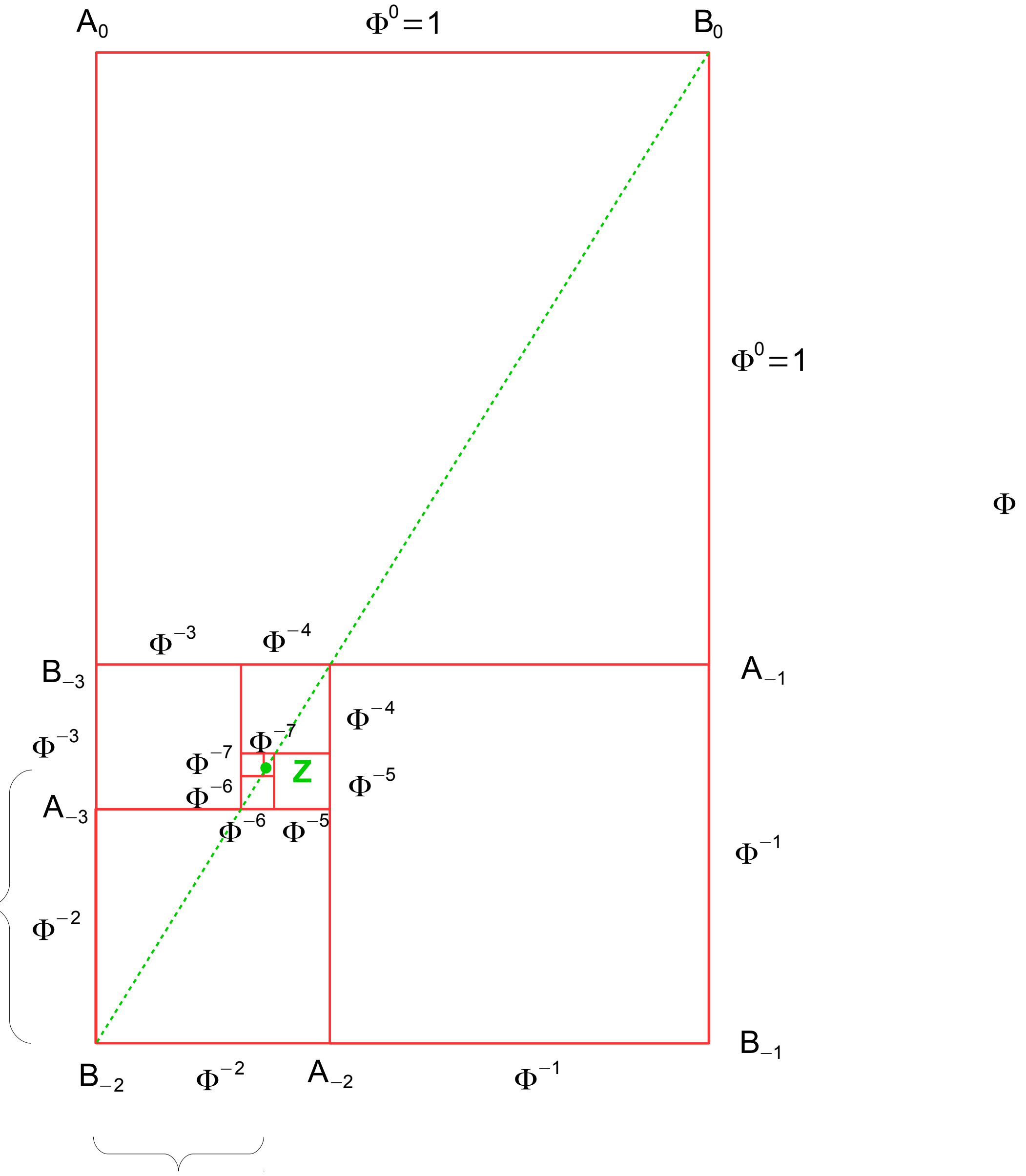
$$y = \Phi^{-2} + \Phi^{-6} + \Phi^{-10} + \Phi^{-14} + \ldots$$

$$y = \Phi^{-2}\left(1 + \Phi^{-4} + \Phi^{-8} + \Phi^{-12} + \ldots\right)$$

$$y = \Phi^{-2} \cdot \frac{1}{1 - \Phi^{-4}} = \Phi^{-2} \cdot \frac{\Phi^{4}}{\Phi^{4} - 1}$$

$$\boxed{y = \frac{\Phi^{2}}{\Phi^{4} - 1}}$$

Das Bild zeigt das Zentrum $Z(x\,;y)$ in grün und die Koordinaten.



$$y = \frac{\Phi^2}{\Phi^4 - 1}$$

$$x = \frac{\Phi}{\Phi^4 - 1}$$

Da die Steigungen der Strecken $\overline{B_{-2}Z}$, $\overline{ZB_0}$ jeweils die Steigungen Φ haben, liegen die drei Punkte $B_{-2}(0;0)$, $Z(x;y)$, $B_0(1;\Phi)$ auf einer geraden Linie:

Steigung der Strecke $\overline{B_{-2}Z}$: $\quad \dfrac{\dfrac{\Phi^2}{\Phi^4-1}}{\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \Phi$

Steigung der Strecke $\overline{ZB_0}$: $\quad \dfrac{\Phi-\dfrac{\Phi^2}{\Phi^4-1}}{1-\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \dfrac{\Phi\left(1-\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)}{1-\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \Phi$

Analog zeigt man, dass auch die Punkte B_{-3} , Z , B_{-1} auf einer geraden Linie liegen:

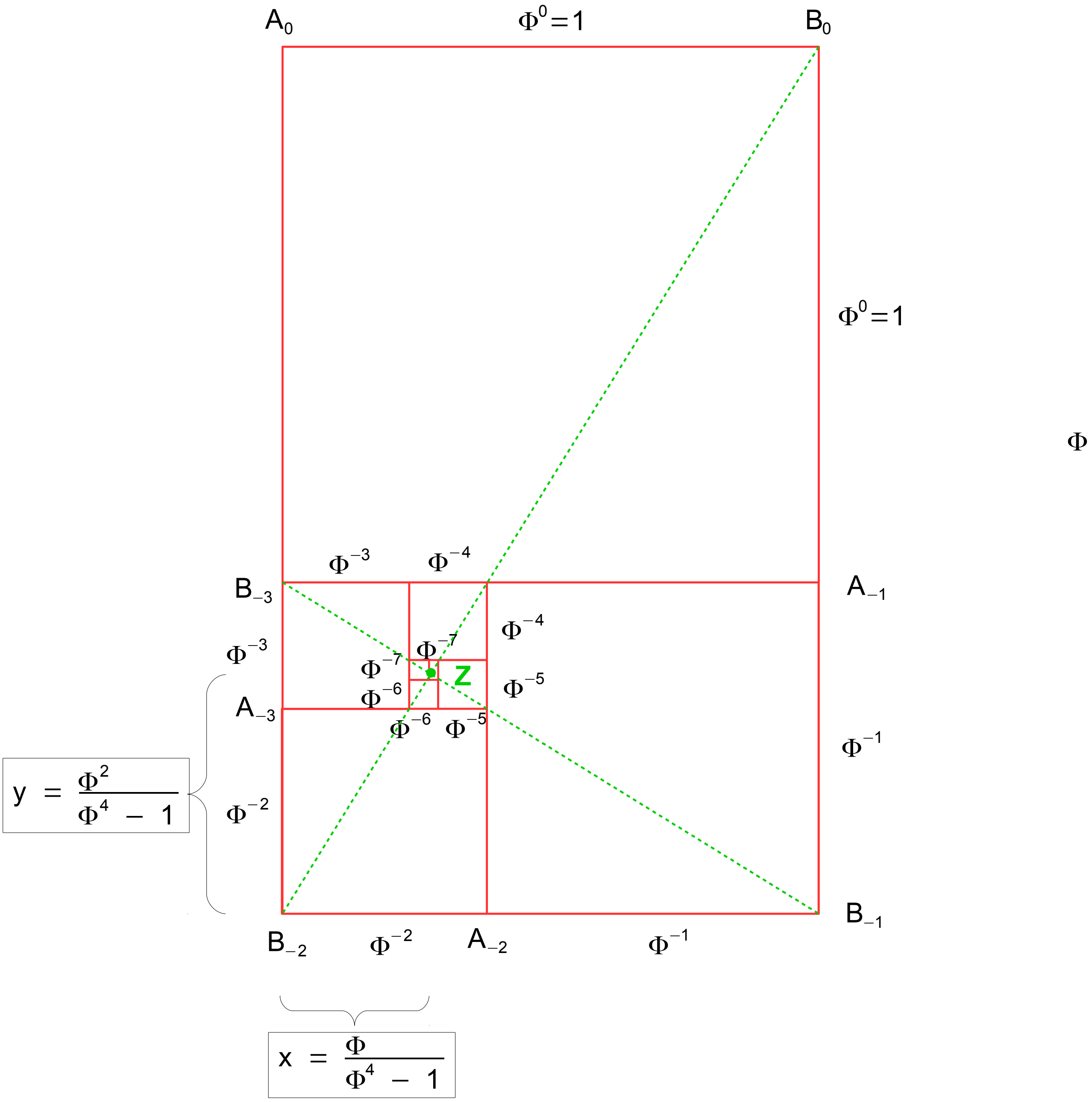
Steigung der Strecke $\overline{B_{-3}Z}$:

$$\frac{\dfrac{\Phi^2}{\Phi^4-1}-\Phi^{-1}}{\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \Phi - \frac{\Phi^{-1}}{\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \Phi - \frac{\Phi^{-1}\left(\Phi^4-1\right)}{\Phi} = \Phi - \frac{\Phi^4-1}{\Phi^2} = \frac{\Phi^3-\Phi^4+1}{\Phi^2} =$$

$$= \frac{\Phi^3-\Phi^3-\Phi^2+1}{\Phi^2} = \frac{-\Phi^2+1}{\Phi^2} = \frac{-\Phi-1+1}{\Phi^2} = \frac{-\Phi}{\Phi^2} = -\frac{1}{\Phi}$$

Steigung der Strecke $\overline{ZB_{-1}}$:

$$\frac{-\dfrac{\Phi^2}{\Phi^4-1}}{1-\dfrac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \frac{-\Phi^2}{\Phi^4-1-\Phi} = \frac{-\Phi^2}{\Phi^3+\Phi^2-1-\Phi} = \frac{-\Phi^2}{\Phi^3+\Phi+1-1-\Phi} = \frac{-\Phi^2}{\Phi^3} = -\frac{1}{\Phi}$$


A_0
$\Phi^0 = 1$
B_0
$\Phi^0 = 1$
Φ
Φ^{-3}
Φ^{-4}
B_{-3}
A_{-1}
Φ^{-4}
Φ^{-3}
Φ^{-7}
Φ^{-7}
Z
Φ^{-6}
Φ^{-5}
A_{-3}
Φ^{-6}
Φ^{-5}
Φ^{-1}
$y = \frac{\Phi^2}{\Phi^4 - 1}$
Φ^{-2}
B_{-1}
B_{-2}
Φ^{-2}
A_{-2}
Φ^{-1}
$x = \frac{\Phi}{\Phi^4 - 1}$

Für die Steigungen $\frac{\Phi}{1}$ und $\frac{-\Phi^{-1}}{1}$ der Linien $B_{-2}B_0$ und $B_{-3}B_{-1}$ gilt :

$$\frac{\Phi}{1} \cdot \frac{-\Phi^{-1}}{1} = -1 \quad ,$$

also stehen die Linien senkrecht aufeinander.

Die Punkte A_0 , A_{-1} , A_{-2} , . . . sind „spiralig" angeordnet gegenüber dem Punkt Z .

Wie entwickeln sich die Abstände $|Z A_0|$, $|Z A_{-1}|$, $|Z A_{-2}|$, . . . ?

Betrachten wir die Punkte $Z\left(\frac{\Phi}{\Phi^4-1};\frac{\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)$, $A_0(0;\Phi)$, $A_{-1}(1;\Phi^{-1})$ und deren Abstände $|Z A_0|$, $|Z A_{-1}|$:

$$|Z A_0| = \sqrt{\left(0-\frac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\Phi-\frac{\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|Z A_0| = \sqrt{\left(\frac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi^5-\Phi-\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|Z A_0| = \sqrt{\left(\frac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi^4+\Phi^3-\Phi-\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|Z A_0| = \sqrt{\left(\frac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi^4+\Phi^2+\Phi-\Phi-\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|Z A_0| = \sqrt{\left(\frac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi^4}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|Z A_0| = \sqrt{\frac{\Phi^2 + \Phi^8}{(\Phi^4-1)^2}}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\left(1-\frac{\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\Phi^{-1}-\frac{\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\Phi^4-1-\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi}-\frac{\Phi^2}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\Phi^4-1-\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi^4-1-\Phi^3}{\Phi(\Phi^4-1)}\right)^2}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\Phi^3+\Phi^2-1-\Phi}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi^3+\Phi^2-1-\Phi^3}{\Phi(\Phi^4-1)}\right)^2}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\Phi^3}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{\Phi}{\Phi(\Phi^4-1)}\right)^2}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\Phi^3}{\Phi^4-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi^4-1}\right)^2}$$

$$|ZA_{-1}| = \sqrt{\frac{\Phi^6 + 1}{(\Phi^4-1)^2}}$$

Setzt man nun die Abstände $|ZA_0|$, $|ZA_{-1}|$ ins Verhältnis zueinander, so folgt:

$$\frac{|ZA_0|}{|ZA_{-1}|} = \frac{\sqrt{\frac{\Phi^2 + \Phi^8}{(\Phi^4-1)^2}}}{\sqrt{\frac{\Phi^6 + 1}{(\Phi^4-1)^2}}}$$

$$\frac{|ZA_0|}{|ZA_{-1}|} = \sqrt{\frac{\Phi^2 + \Phi^8}{\Phi^6+1}}$$

$$\frac{|ZA_0|}{|ZA_{-1}|} = \sqrt{\frac{\Phi^2(1 + \Phi^6)}{1+\Phi^6}}$$

$$\boxed{\frac{|ZA_0|}{|ZA_{-1}|} = \Phi}$$

Analog erhält man, dass

$\boxed{\frac{|ZA_{-n}|}{|ZA_{-(n+1)}|} = \Phi}$ ist für alle $n \geq 0$.

Aufgrund der letzten Gleichung und weil die aufeinanderfolgenden

Strecken $\overline{ZA_0}$, $\overline{ZA_{-1}}$, $\overline{ZA_{-2}}$, . . . unter dem gleichen Winkel aufeinander stehen,

liegen die Punkte A_0 , A_{-1} , A_{-2} , . . . auf einer **Logarithmischen Spirale** .

Eine **Logarithmische Spirale** hat in Polarkoordinaten nämlich die Funktionsgleichung

$\boxed{r(\varphi) = ae^{k\varphi}}$, mit a , $k \in \mathbb{R}$,

und hat folgende Eigenschaft:

$$r(\varphi + \gamma) = ae^{k(\varphi + \gamma)}$$

$$r(\varphi + \gamma) = ae^{k\varphi + k\gamma}$$

$$r(\varphi + \gamma) = ae^{k\varphi}e^{k\gamma}$$

$$r(\varphi + \gamma) = e^{k\gamma}ae^{k\varphi}$$

$$\boxed{r(\varphi + \gamma) = e^{k\gamma}r(\varphi)} \quad .$$

Das heißt, einer Winkeladdition um γ entspricht eine Multiplikation der Radius $r(\varphi)$ mit $e^{k\gamma}$.

Wendet man diese Eigenschaft auf die Werte $\gamma = \frac{\Pi}{2}$ und $e^{k\gamma} = e^{k\frac{\Pi}{2}} = \Phi$ an, so folgt für den Parameter k :

$$e^{k\frac{\Pi}{2}} = \Phi$$

$$k\frac{\Pi}{2} = \ln(\Phi)$$

$$\boxed{k = \frac{2\ln(\Phi)}{\Pi} \approx 0{,}30634896253003}$$

Zur Bestimmung des Parameters a formt man die Gleichung um zu

$$a = \frac{r}{e^{k\,\varphi}}$$

und setzt die Polarkoordinaten von A_{-1} ein, also

$$r = |Z A_{-1}| = \sqrt{\frac{\Phi^6 + 1}{(\Phi^4-1)^2}} \quad \text{und}$$

φ mit

$$\tan\varphi = \frac{\Phi^{-1} - \frac{\Phi^2}{\Phi^4-1}}{1-\frac{\Phi}{\Phi^4-1}} = \frac{\Phi^{-1}\left(\Phi^4-1\right)-\Phi^2}{\Phi^4-1-\Phi} = \frac{\Phi^{-1}\left(\Phi^3+\Phi^2-1\right)-\Phi^2}{\Phi^3+\Phi^2-1-\Phi} = \frac{\Phi^{-1}\left(\Phi^3+\Phi\right)-\Phi^2}{\Phi^3} =$$

$$= \frac{\Phi^2+1-\Phi^2}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^3} \quad \text{, also}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right) .$$

$$\boxed{a = \frac{r}{e^{k\,\varphi}} = \frac{\sqrt{\frac{\Phi^6 + 1}{(\Phi^4-1)^2}}}{e^{\frac{2\ln(\Phi)}{\Pi}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right)}} \approx 0{,}69252510951066}$$

WxMaxima13.04.2

```
float(sqrt((%phi^6 +1)/(%phi^4 -1)^2)/(%e^((2*log(%phi)/%pi)*atan (%phi^-3))));
```

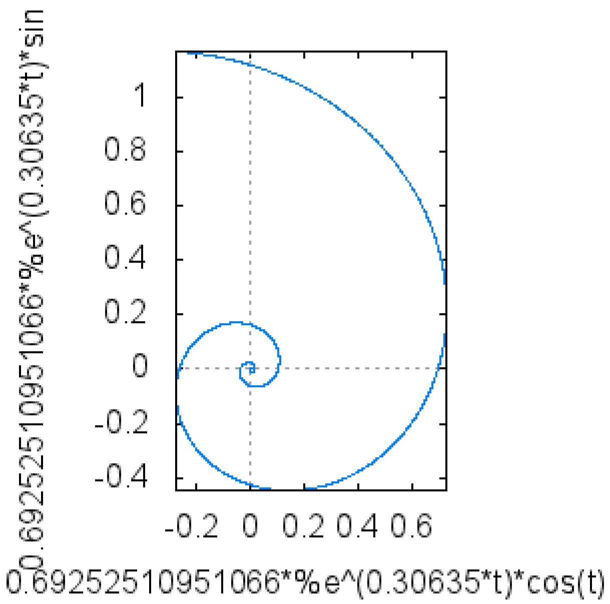
0.69252510951066

Die Gleichung der **Goldenen Spirale** lautet also :

$\boxed{r(\varphi) = a\,e^{k\,\varphi}}$ mit a=0.69252510951066 k=0,30634896253003

WxMaxima13.04.2

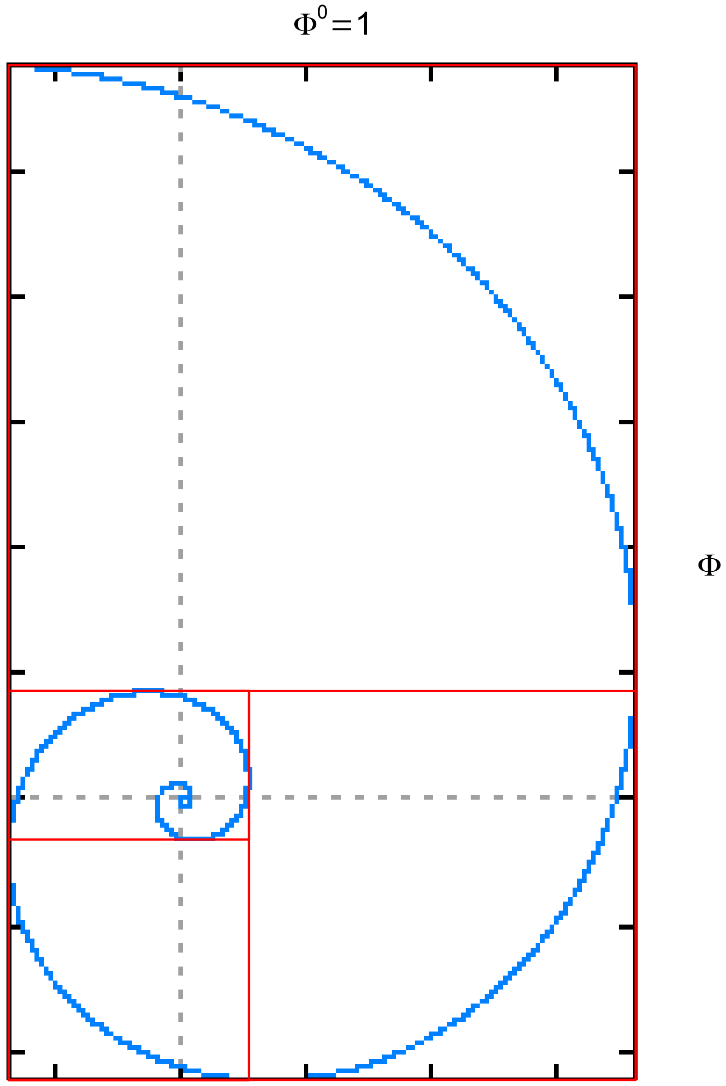
```
wxplot2d([parametric,a*%e^(.30635*t)*cos(t),a*%e^(.30635*t)*sin(t),
[t,-6*%pi,6.5*%pi],[nticks,10000]],          [x,-0.27639320225002,          0.72360679774998],[y,-
0.44721359549996, 1.170820393249937], [gnuplot_preamble,"set size ratio 1.6180339"])$
```



Goldenes Rechteck und **Goldene Spirale**

WxMaxima13.04.2

```
wxplot2d([parametric,a*%e^(.30635*t)*cos(t),a*%e^(.30635*t)*sin(t),
[t,-6*%pi,6.5*%pi],[nticks,10000]],         [x,-0.27639320225002,         0.72360679774998],[y,-
0.44721359549996, 1.170820393249937], [gnuplot_preamble,"set size ratio 1.6180339"])$
```



$\boxed{r(\varphi) = a e^{k\varphi}}$ mit a=0.69252510951066 k=0,30634896253003

Was bedeutet der Parameter k?

Darstellung der Logarithmischen Spirale in Kartesischen Koordinaten:

$$x = ae^{k\varphi} \cdot \cos\varphi$$

$$y = ae^{k\varphi} \cdot \sin\varphi$$

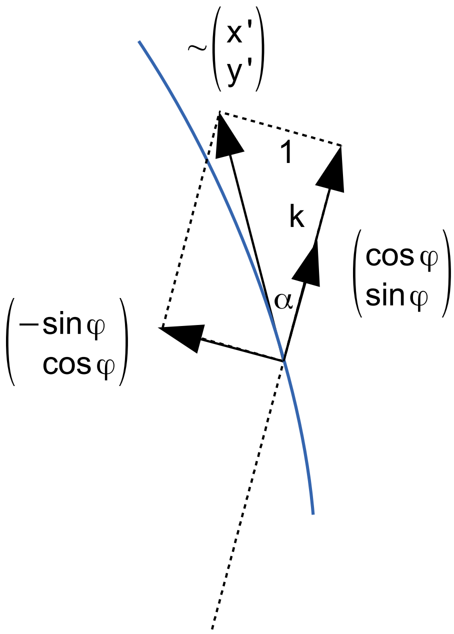
Ableitungen:

$$x' = kae^{k\varphi} \cdot \cos\varphi - ae^{k\varphi} \cdot \sin\varphi$$

$$y' = kae^{k\varphi} \cdot \sin\varphi + ae^{k\varphi} \cdot \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = kae^{k\varphi} \cdot \left[k \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right]$$

Hier sind $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ orthogonale Einheitsvektoren in Richtung r und φ .



Ist α der Winkel der Tangente bezüglich der Richtung von r, der sogenannte **Tangentenwinkel**, dann gilt:

$$\cot\alpha = k$$

$$\boxed{\alpha = \cot^{-1} k}$$

Für die **Goldene Spirale** ergibt sich der **Tangentenwinkel** zu

$$\alpha = \cot^{-1}\left(\frac{2\ln(\Phi)}{\Pi}\right)$$

Da man am Taschenrechner TI-30 ECO RS die Kotangensfunktion nicht zur Verfügung hat, rechnet man folgendermaßen:

$$\tan(90° - \alpha) = k$$

$$90° - \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\ln(\Phi)}{\Pi}\right)$$

$$\alpha = 90° - \tan^{-1}\left(\frac{2\ln(\Phi)}{\Pi}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 72{,}96760887°}$$

Die Konsequenz ist, dass die **Goldene Spirale** das **Goldene Rechteck** im Punkt A_{-1} nicht berührt, sondern dass die Tangente einen Winkel von $86{,}25013446°$ hat und deshalb aus dem Rechteck heraustritt und dann wieder wieder eintritt :

Der Steigungswinkel von $|Z A_{-1}|$ ist nämlich

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\Phi^{-1} - \frac{\Phi^2}{\Phi^4 - 1}}{1 - \frac{\Phi}{\Phi^4 - 1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right) \approx 13{,}28252559° = 0.2318238045004 \quad .$$

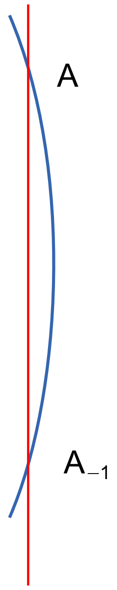
Wenn man nun den konstanten Tangentenwinkel $\alpha = 72{,}96760887°$ der Spirale dazu addiert, ergibt sich für die Tangente nur ein Winkel von $86{,}25013446°$, und eben keine 90°.

Dass die **Goldene Spirale** die **Rechteckseite nicht berührt,** sondern in in **2 (eng nebeneinander liegenden) Punkten schneidet**, kann auch auf der algebraisch-numerischen Ebene behandelt werden :

Der erste Schnittpunkt ist

$$A_{-1}=\left(ae^{k\varphi_1}\ ;\ \varphi_1\right)\quad \text{mit}\quad \varphi_1=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right)\ \approx\ 0.2318238045004\ .$$

Wir zeigen, dass es noch einen weiteren Schnittpunkt A gibt



$$A=\left(ae^{k(\varphi_1+x)}\ ;\ \varphi_1+x\right)\ .$$

Die x-Koordinaten von A_{-1} und A stimmen dann überein, und es gilt:

$$a\ e^{k(\varphi_1+x)}\cdot\cos(\varphi_1+x)\ =\ a\ e^{k\varphi_1}\cdot\cos(\varphi_1)$$

$$a\ e^{k\varphi_1}\cdot e^{kx}\cdot\cos(\varphi_1+x)\ =\ a\ e^{k\varphi_1}\cdot\cos(\varphi_1)$$

$$\boxed{e^{kx}\cdot\cos(\varphi_1+x)\ =\ \cos(\varphi_1)}$$

$$e^{\frac{2\ln(\Phi)}{\Pi}x}\cdot\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right)+x\right)\ =\ \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\Phi^3}\right)\right)$$

$$e^{0,30634896253003\,x}\cdot\cos(0.2318238045004+x)\ =\ \cos(0.2318238045004)$$

$$-\cos(0.2318238045004)\ +\ e^{0,30634896253003x}\cdot\cos(0.2318238045004+x)\ =\ 0$$

Plotten bzw. Nullstellenbestimmung dieser Gleichungen liefert für für x die beiden Werte :

$$x\ =\ 0\qquad,\qquad x\ =\ 0.13003147904276$$

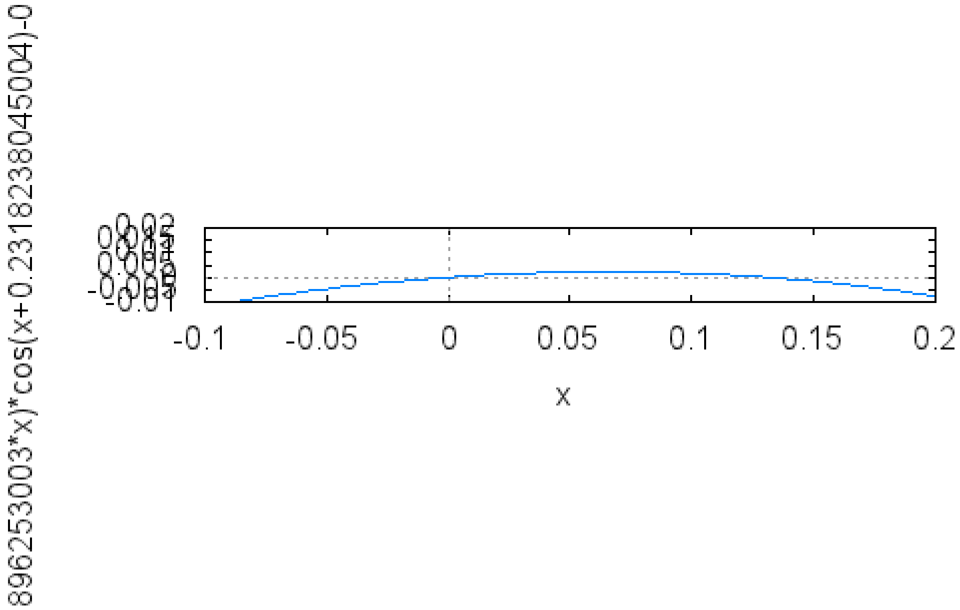
WxMaxima13.04.2

```
%e^(2*log(%phi)/%pi*x)*cos(atan(1/%phi^3+x))-cos(atan(1/%phi^3));
```

```
2*log(%phi)/%pi*x;
float(k:2*log(%phi)/%pi);
```

```
atan(1/%phi^3);
float(atan(1/%phi^3));
```

```
wxplot2d([-cos(0.2318238045004)+%e^(0.30634896253003*x) *cos (0.2318238045004 +x)],
[x,-.1,.2], [y,-.01,.02], [gnuplot_preamble,"set size ratio .1"])$
```




```
find_root(%e^(0.30634896253003*x) *cos (0.2318238045004 +x)=cos(0.2318238045004), x,
-.1, .1);
```

0.0

```
find_root(%e^(0.30634896253003*x) *cos (0.2318238045004 +x)=cos(0.2318238045004), x,
.1, .2);
```

0.13003147904276