

02

Polynome

Arno Fehringer

Verallgemeinerung der 1. Binomischen Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

. . .

Darstellung der Terme als Produkt einer Zahl und Potenzen von a und b:

$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

. . .

Allgemein:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n c_{n \ n-k} a^{n-k} b^k$$

Die Koeffizienten $c_{n \ n-k}$ hängen von n und n-k ab und geben die Anzahl der Produkte mit n-k Faktoren a und k Faktoren b an .

Sie werden als $c_{n \ n-k} = \binom{n}{n-k}$ geschrieben, und heißen **Binomialkoeffizienten** .

Damit ergibt sich die Entwicklung zu

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k .$$

Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{n-k}$

Zuerst ein Beispiel: $n=5$, $k=3$

Bei der Ausmultiplikation von $(a+b)^5$ ergeben sich folgende Produkte mit $5-2=3$ Faktoren a :

a a a b b
a a b a b
a a b b a
a b a a b
a b a b a
a b b a a
b a a a b
b a a b a
b a b a a
b b a a a

Die Frage ist, wie viele solche Produkte gibt es, und wie kann man die Anzahl bestimmen ?

Man könnte die Frage auch etwas anders formulieren:

Wie viele Zeichenketten aus den Zeichen a und b , wobei das Zeichen a genau 3-mal und das Zeichen b genau 2-mal vorkommt, gibt es ?

Wenn die Zeichen nummeriert wären, etwa $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2$, gäbe es genau $5!$ solche Zeichenketten.

Gäbe man nun die Nummerierung der a auf, hätte man $\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$ Zeichenketten.

Gäbe man zuletzt die Nummerierung der b auf, hätte man $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!}$ Zeichenketten.

Das Ergebnis lässt sich leicht verallgemeinern:

Bei der Entwicklung von $(a+b)^n$ gibt es $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ Zeichenketten bzw. Produkte mit $n-k$ Faktoren a und k Faktoren b .

Das heißt
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} .$$

Die **Binomialkoeffizienten** sind **symmetrisch** in folgendem Sinn:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Wegen $1 = \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{1}{0!}$ muss man noch definieren: $0! := 1$.

Verallgemeinerung der 3. Binomischen Formel

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a-b)(a^4+a^3b^1+a^2b^2+a^1b^3+b^4) = a^5 - b^5$$

.....

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+a^1b^{n-2}+b^{n-1}) = a^n - b^n$$

Beweis:

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+a^1b^{n-2}+b^{n-1})$$

$$= a^n + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + ... + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + a^1b^{n-1}$$

$$- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - ... - a^2b^{n-2} - a^1b^{n-1} - b^n$$

$$= a^n - b^n$$

Bernoullische Ungleichung

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt: $x > -1 \Rightarrow (1 + x)^n \geq 1 + nx$

Beweis (Vollständige Induktion über n):

IA: $n=2$

$$x > -1$$

$$1 + x > 0$$

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$$

IS: Zu zeigen: $(1 + x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1+x)$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x)$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx \geq 1 + (n+1)x$$

Also ist die Behauptung richtig für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

q.e.d.

Polynomfunktionen

Definition:

Eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Polynomfunktion**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad von p** .

Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ heißen **Koeffizienten**.

Man schreibt auch:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Polynomfunktionen der Form

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

heißen **normierte Polynome**.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißen Polynome der Form

$$p_n(x) = x^n$$

Monome oder **Elementarpolynome**.

Bemerkung:

Jede Polynomfunktion ist eine Linearkombination von Monomen. Später kann gezeigt werden, dass diese Linearkombination bis auf die Reihenfolge eindeutig ist.

Abgeschlossenheit der Polynomfunktionen gegenüber Addition, Subtraktion, Multiplikation

Seien $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $q_m(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ Polynomfunktionen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $n \geq m$ ist.

Dann sind die Funktionen $p_n \pm q_m$ und $p_n \cdot q_m$ ebenfalls Polynomfunktionen und es gilt:

$$p_n(x) \pm q_m(x) = \sum_{i=0}^m (a_i \pm b_i) x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i$$

$$(p_n \cdot q_m)(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j x^j =$$

$$= a_0 b_0 x^0 + a_1 b_0 x^1 + a_2 b_0 x^2 + \dots + a_{n-2} b_0 x^{n-2} + a_{n-1} b_0 x^{n-1} + a_n b_0 x^n$$

$$+ a_0 b_1 x^1 + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 x^3 + \dots + a_{n-2} b_1 x^{n-1} + a_{n-1} b_1 x^n + a_n b_1 x^{n+1}$$

$$+ a_0 b_2 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_2 b_2 x^4 + \dots + a_{n-2} b_2 x^n + a_{n-1} b_2 x^{n+1} + a_n b_2 x^{n+2}$$

·
·
·

$$+ a_0 b_{m-2} x^{m-2} + a_1 b_{m-2} x^{m-1} + \dots + a_{n-1} b_{m-2} x^{n+m-3} + a_n b_{m-2} x^{n+m-2}$$

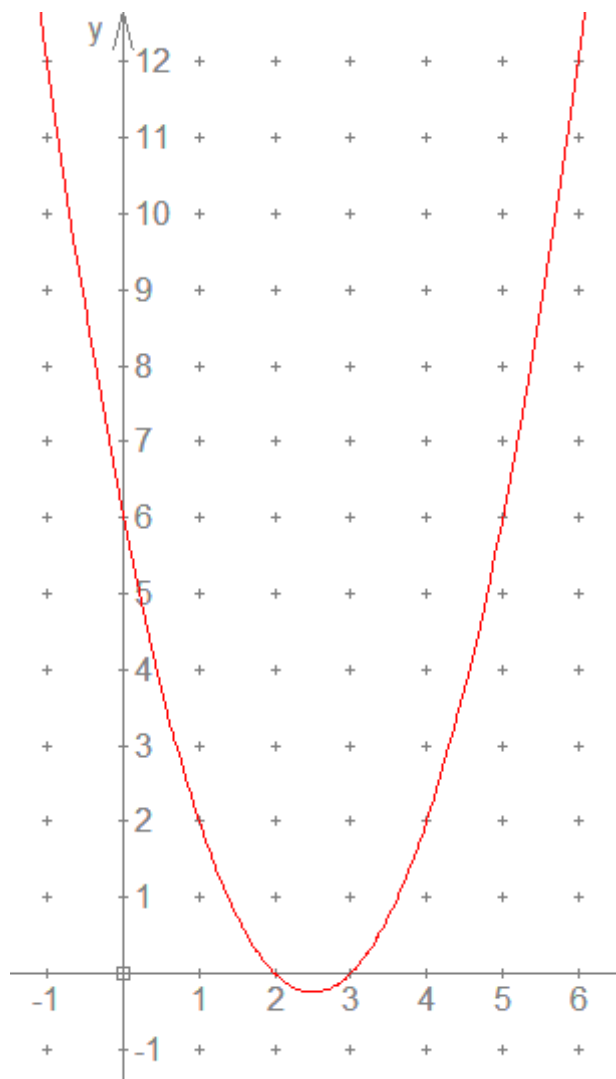
$$+ a_0 b_{m-1} x^{m-1} + a_1 b_{m-1} x^m + \dots + a_{n-1} b_{m-1} x^{n+m-2} + a_n b_{m-1} x^{n+m-1}$$

$$+ a_0 b_m x^m + a_1 b_m x^{m+1} + \dots + a_{n-1} b_m x^{n+m-1} + a_n b_m x^{n+m}$$

Summiert man diagonal auf, so erhält man:

$$(p_n \cdot q_m)(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) x^i$$

Polynomfunktion vom Grad 2



$$p(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

Berechnung der Nullstellen

$$p_n(x) = 0$$

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{-a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$$x_2 = \frac{-a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

Bemerkung:

Eine Polynomfunktion vom Grad 2 kann 0, 1 oder 2 Nullstellen haben, je nachdem der Radikant <0 , $=0$ oder >0 ist.

Kann man die Koeffizienten a_1, a_2 aus den Lösungen x_1, x_2 zurückgewinnen?

$$x_1 = \frac{-a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$$x_2 = \frac{-a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$$x_1 + \frac{a_1}{2} = -\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$$x_2 + \frac{a_1}{2} = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$$\left(x_1 + \frac{a_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0$$

analog

$$\left(x_2 + \frac{a_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0$$

$$x_1^2 + a_1 x_1 + \frac{a_1^2}{4} = \frac{a_1^2}{4} - a_0$$

$$x_2^2 + a_1 x_2 + \frac{a_1^2}{4} = \frac{a_1^2}{4} - a_0$$

$$x_1^2 + a_1 x_1 = -a_0$$

$$x_2^2 + a_1 x_2 = -a_0$$

$$x_1^2 + a_1 x_1 = -a_0$$

$$x_2^2 + a_1 x_2 = -a_0$$

$$x_2^2 - x_1^2 + a_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)[(x_2 + x_1) + a_1] = 0$$

1. Fall: $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow (x_2 + x_1) + a_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 = -a_0$$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_1 x_2 - x_1^2 = -a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = x_1 x_2$$

1. Fall: $x_1 = x_2$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = -(x_1 + x_1)$$

$$\Rightarrow a_0 = x_1 x_1$$

Die Gleichungen von Vieta (1540 – 1603; 63)

In beiden Fällen folgen also die sogenannten **Gleichungen von Vieta**:

$$a_1 = -(x_1 + x_2)$$

$$a_0 = x_1 x_2$$

Eine Konsequenz ist:

$$p(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + a_0$$

$$p(x) = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2$$

$$p(x) = x(x - x_1) - x_2(x - x_1)$$

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

Die Polynomfunktion kann mit Hilfe der Nullstellen x_1 , x_2 in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)$$

Funktioniert diese Zerlegung auch für allgemeine Polynomfunktionen vom Grad 2 ?

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_2 \neq 0$$

$$p(x) = a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right)$$

Nullstellen

$$p(x) = a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right) = 0$$

$$a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{-a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right) = a_2 (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 (x - x_1)(x - x_2)$$

Kann man auch Polynome vom Grad 3 mit Hilfe einer oder aller Nullstellen faktorisieren?

Sei $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ gegeben und x_1 eine Nullstelle.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ p(x_1) &= a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ p(x_1) &= a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0 \end{aligned}} \right\} -$$

$$p(x) = a_3(x^3 - x_1^3) + a_2(x^2 - x_1^2) + a_1(x - x_1)$$

$$p(x) = a_3(x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2) + a_2(x - x_1)(x + x_1) + a_1(x - x_1)$$

$$p(x) = a_3(x - x_1) \left((x^2 + xx_1 + x_1^2) + \frac{a_2}{a_3}(x + x_1) + \frac{a_1}{a_3} \right)$$

$$p(x) = a_3(x - x_1) \left(x^2 + xx_1 + x_1^2 + \frac{a_2}{a_3}x + \frac{a_2}{a_3}x_1 + \frac{a_1}{a_3} \right)$$

$$p(x) = a_3(x - x_1) \left(x^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} + x_1 \right) x + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3}x_1 + x_1^2 \right)$$

$$p(x) = a_3(x - x_1)p_2(x)$$

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)p_2(x)$$

Man kann auch eine Polynomfunktion vom Grad 3 mit Hilfe einer Nullstelle faktorisieren. Der 2. Faktor ist hier ein Polynom vom Grad 2 !

Man kann den 2. Faktor $p_2(x)$ auch durch **Polynomdivision** gewinnen:

$$\begin{array}{r}
 (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_1) = a_3x^2 + (a_2 + a_3x_1)x + (a_1 + a_2 + a_3x_1) \\
 \underline{-(a_3x^3 - a_3x_1x^2)} \\
 (a_2 + a_3x_1)x^2 + a_1x + a_0 \\
 \underline{-(a_2 + a_3x_1)x^2 - (a_2 + a_3x_1)x + a_0} \\
 (a_1 + a_2 + a_3x_1)x + a_0 \\
 \underline{-(a_1 + a_2 + a_3x_1)x - (a_1 + a_2 + a_3x_1)x_1} \\
 a_0 + ((a_1 + a_2 + a_3x_1)x_1)x_1 \\
 \hline
 a_0 + a_1x + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division ist

$$a_3x^2 + (a_2 + a_3x_1)x + (a_1 + a_2 + a_3x_1) = a_3 \left(x^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} + x_1 \right) x + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3} x_1 + x_1^2 \right) = a_3 p_2(x)$$

mit $p_2(x) = x^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} + x_1 \right) x + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3} x_1 + x_1^2$ normiert.

Also ist

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)p_2(x)$$

Faktorisierung von Polynomfunktionen mit Hilfe von Nullstellen

Gegeben sei eine Polynomfunktion vom Grad n

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ mit einer Nullstelle } x_1.$$

Dann gibt es ein (normiertes) Polynom $p_{n-1}(x)$ vom Grad $n-1$, so dass gilt:

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)p_{n-1}(x).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ 0 &= a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -$$

$$p_n(x) = a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2(x^2 - x_1^2) + a_1(x - x_1)$$

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)[q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) + \dots + q_1(x)]$$

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)p_{n-1}(x)$$

q.e.d.

Hat nun $p_{n-1}(x)$ eine Nullstelle x_2 , so ist diese auch eine Nullstelle von $p_n(x)$, und es gibt ein Polynom $p_{n-2}(x)$ mit $p_{n-1}(x) = (x-x_2)p_{n-2}(x)$, also

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)p_{n-2}(x).$$

Das Verfahren bricht nach s Schritten ab, so dass man

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_s)p_{n-s}(x)$$

erhält, oder es kann fortgesetzt werden bis zu

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-2})p_2(x).$$

Hat das (normierte) Polynom $p_2(x)$ nun 1 oder 2 Nullstellen x_{n-1}, x_n , kann nochmals faktorisiert werden, und man erhält

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

Jede Nullstelle x_i tritt mit einer gewissen Vielfachheit v_i auf, so dass man schreibt:

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)^{v_1}(x-x_2)^{v_2}\dots(x-x_{t-2})^{v_{n-2}}(x-x_{t-1})^{v_{n-1}}(x-x_t)^{v_t}.$$

Als Folgerung ergibt sich der sogenannte

Nullstellensatz

Eine Polynomfunktion $p_n(x)$ vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Polynomfunktion

Die Koeffizienten einer Polynomfunktion $p_n(x)$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Angenommen, es gäbe für $p_n(x)$ zwei Darstellungen:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{j=0}^m b_j x^j \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

1. Fall: $n = m$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i x^i - \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das Polynom $\sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i$ hätte also unendlich viele Nullstellen, im **Widerspruch zum Nullstellensatz**.

2. Fall: $n > m$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i x^i - \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{i=0}^m (a_i - b_i) x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Auch jetzt ergibt sich ein **Widerspruch zum Nullstellensatz**.

Damit ist der Beweis erbracht.

q.e.d.

Nullstellen, Polynomdivision, Faktorisierung mittels der Nullstelle

Gegeben sei eine Polynomfunktion $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) x_1 ist eine Nullstelle von $p_n(x)$.
- (2) Die Polynomdivision $p_n(x) : (x-x_1)$ ist ohne Rest ausführbar.

Beweis „ (2) $\Rightarrow$ (1) “ :

$$p_n(x) : (x-x_1) = p_{n-1}(x)$$

$$p_n(x) = (x-x_1)p_{n-1}(x)$$

$$p_n(x_1) = (x_1-x_1)p_{n-1}(x_1)$$

$$p_n(x_1) = 0$$

x_1 ist Nullstelle von $p_n(x)$.

Beweis „ (1) $\Rightarrow$ (2) “ :

$$\begin{array}{l} p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ 0 = \sum_{i=0}^n a_i x_1^i \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -$$

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i (x^i - x_1^i)$$

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i (x-x_1) q_{i-1}(x)$$

$$p_n(x) = (x-x_1) \sum_{i=1}^n a_i q_{i-1}(x)$$

$$p_n(x) = (x-x_1)p_{n-1}(x)$$

$$p_n(x) : (x-x_1) = p_{n-1}(x)$$

q.e.d.

Achsensymmetrie und Punktsymmetrie von Funktionsgraphen

Definition:

Eine Funktion $f : \text{-----} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **achsensymmetrisch**, wenn der Graf von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Es gilt dann: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : \text{-----} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **punktsymmetrisch**, wenn der Graf von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Es gilt dann: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es achsen- bzw. punktsymmetrische Polynomfunktionen?

Es sei $p_n(x)$ ein Polynom, für das gelte $p_n(-x) = p_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dann folgt nacheinander:

$$\sum_{i=0}^n a_i (-x)^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i (-x)^i + \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i (-x)^i = \sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i + \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i$$

$$- \sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i + \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i = \sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i + \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i$$

$$- \sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i = \sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i$$

$$\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i = 0$$

Wegen $\sum_{i \text{ ungerade}}^n 0 x^i = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der **Eindeutigkeit der Koeffizienten**

folgt aus $\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i = \sum_{i \text{ ungerade}}^n 0 x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$a_i = 0$ für alle ungeraden i .

Nun sei $p_n(x)$ ein Polynom, für das gelte $p_n(-x) = -p_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dann folgt nacheinander:

$$\sum_{i=0}^n a_i(-x)^i = -\sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i(-x)^i + \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i(-x)^i = -\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i - \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i$$

$$-\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i + \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i = -\sum_{i \text{ ungerade}}^n a_i x^i - \sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i$$

$$\sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i = -\sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i$$

$$\sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i = 0$$

Wegen $\sum_{i \text{ gerade}}^n 0 x^i = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der **Eindeutigkeit der Koeffizienten**

folgt aus $\sum_{i \text{ gerade}}^n a_i x^i = \sum_{i \text{ gerade}}^n 0 x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$a_i = 0$ für alle geraden i .

Satz:

Ist $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, dann gilt:

$p(x)$ ist	achsensymmetrisch	genau, dann wenn	$a_i = 0$ für alle ungeraden i .
	punktsymmetrisch		$a_i = 0$ für alle geraden i .

Deshalb nennt man

achsensymmetrische Polynomfunktionen auch **gerade** und

punktsymmetrische Polynomfunktionen auch **ungerade**.

Verhalten der Polynomfunktionen für große bzw. kleine x-Werte

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^{i-n} \right) x^n = \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^1} + a_n \right) x^n$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^1} \right) = 0$ wird das Verhalten der Funktion für große

x-Werte quasi nur durch den Term $a_n x^n$ bestimmt.

Es folgt dann:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_n(x) = +\infty \quad \text{für } a_n > 0 \text{ und } n > 0 \text{ beliebig.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_n(x) = \begin{cases} -\infty & \text{für } a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade.} \\ +\infty & \text{für } a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Analog kann man zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade.} \\ -\infty & \text{für } a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) = \begin{cases} -\infty & \text{für } a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade.} \\ +\infty & \text{für } a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Polynomabschätzung für komplexe und reelle Polynome

$$p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

$$p(z) = \left(\frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + 1 \right) a_n z^n$$

Setze $g(z) := \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + 1$.

Wegen $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + 1 \right) = 1$ zur Zahl $\frac{1}{2}$

einen Radius $s > 0$, so dass gilt:

$$|g(z) - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad |z| > s.$$

Dann folgt:

$$-\frac{1}{2} < g(z) - 1 < \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} < g(z) < 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < g(z) < 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < |g(z)|$$

Also gilt:

$$|p(z)| = |g(z) a_n z^n|$$

$$|p(z)| = |g(z)| |a_n| |z|^n$$

$$|p(z)| > \frac{|a_n| |z|^n}{2} \quad \text{für} \quad |z| > s.$$

Will man nun, dass zu einer beliebigen Zahl $G > 0$ der Betrag $|p_n(z)| > G$ ist für gewisse $|z|$, muss man $|z|$ so wählen, dass

$$\frac{|a_n||z|^n}{2} > G \text{ ist.}$$

Die Äquivalenzumformung liefert:

$$\frac{|a_n||z|^n}{2} > G$$

$$|z|^n > \frac{2G}{|a_n|}$$

$$|z| > \sqrt[n]{\frac{2G}{|a_n|}}$$

Falls nun $|z| > \max\left(s ; \sqrt[n]{\frac{2G}{|a_n|}}\right) := r$ folgt:

$$|p(z)| > G \quad \text{für} \quad |z| > r .$$

Dies zeigt deutlich, dass eine Polynomfunktion $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ beliebig groß werden kann für hinreichend große $|z|$.

q.e.d.

Rationale Funktionen

Definition:

Sind $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $q_m(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ Polynome und ist $N = \{x_1, \dots, x_n\}$ die

Menge der Nullstellen von $q(x)$, dann heißt die Funktion

$$\frac{p}{q} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus N & \longrightarrow \mathbb{R} \setminus N \\ x & \longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} \end{cases}$$

eine **Rationale Funktion**.

Es sind 4 Fälle zu betrachten:

1. Fall: $n > m$

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^{i-m}}{\sum_{j=0}^m b_j x^{j-m}} = \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x^1} + a_m + a_{m+1}x^1 + \dots + a_n x^{n-m}}{\frac{b_0}{x^m} + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^1} + b_m}$$

Für $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ ergeben sich jeweils uneigentliche Grenzwerte $+\infty$ oder $-\infty$.

2. Fall: $n = m$

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^n b_j x^j} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^{i-n}}{\sum_{j=0}^n b_j x^{j-n}} = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^1} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{x^1} + b_n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$$

Die Grenzfunktion ist eine waagrechte Gerade (**waagrechte Asymptote**) $y = \frac{a_n}{b_n}$.

3. Fall: $n < m$

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^{i-m}}{\sum_{j=0}^m b_j x^{j-m}} = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^1} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{x^1} + b_n + b_{n+1}x^1 + \dots + b_m x^{m-n}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

Die x-Achse $y=0$ ist hier eine **waagrechte Asymptote** zur Rationalen Funktion..

4. Fall: $n = m+1$

$$p_{m+1}(x) = a_{m+1}x^{m+1} + a_m x^m + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Führt man die **Polynomdivision**

$$(a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_0) : (b_m x^m + \dots + b_0) = ax + b + \frac{r(x)}{q_m(x)}$$

durch, so erhält man ein Polynom vom Grad 1 sowie eine Rationale Funktion, deren Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.

Die Grenzwertbetrachtung für $x \rightarrow \pm \infty$ liefert als Grenzkurve eine **schiefe Asymptote** mit der Gleichung

$$y = ax + b$$

$$\text{Es sind } a = \frac{a_{m+1}}{b_m} \text{ und } b = \frac{a_m - b_{m-1} \frac{a_{m+1}}{b_m}}{b_m},$$

also ist die

Gleichung der **Asymptote** im Detail

$$y = \frac{a_{m+1}}{b_m} x + \frac{a_m - b_{m-1} \frac{a_{m+1}}{b_m}}{b_m}.$$

Polstellen, senkrechte Asymptoten

Sei $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}$ eine **Rationale Funktion** und sei x_1 eine **Nullstelle der**

Vielfachheit m_1 von $q_m(x)$, jedoch keine Nullstelle von $p_n(x)$.

Dann gilt:

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{(x - x_1)^{m_1} r_{m-m_1}(x)}.$$

Für $x \rightarrow -x_1$ oder $x \rightarrow +x_1$ gibt es **uneigentliche** links- bzw. rechtsseitige **Grenzwerte** :

$$\lim_{x \rightarrow -x_1} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow -x_1} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{(x - x_1)^{m_1} r_{m-m_1}(x)} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +x_1} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +x_1} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{(x - x_1)^{m_1} r_{m-m_1}(x)} = \pm \infty,$$

wobei die Vorzeichen von $p_n(x_1)$, m_1 sowie $r_{m-m_1}(x_1)$ bestimmt werden.

Man sagt, die Rationale Funktion hat an der Stelle x_1 einen **Pol der Vielfachheit** m_1 .

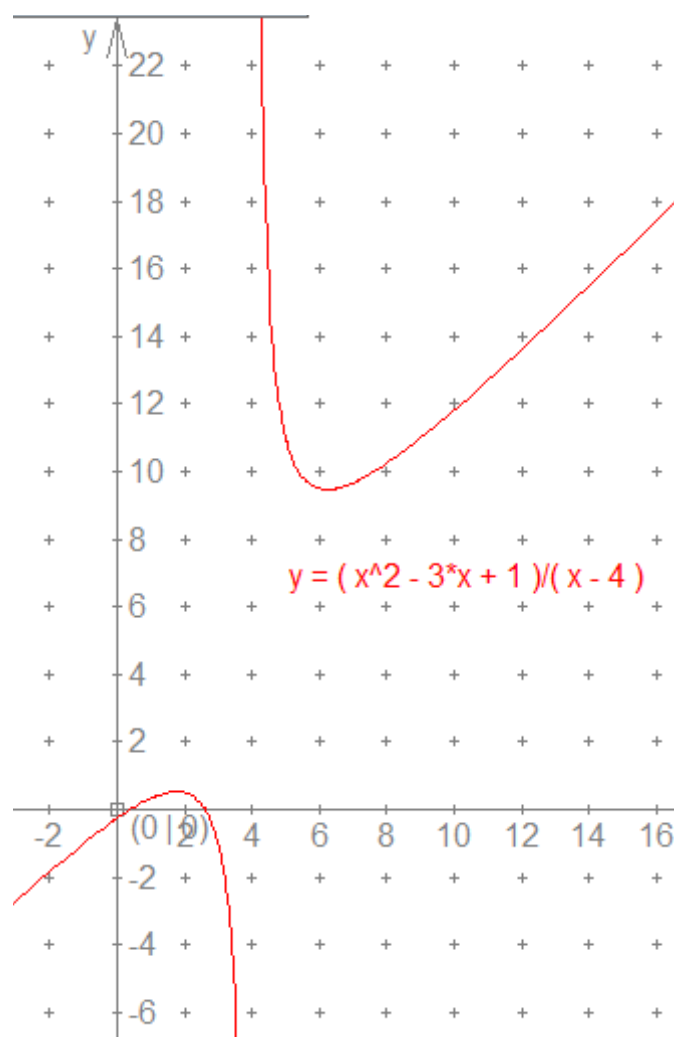
Sind die Vorzeichen von rechts- und linksseitigem Grenzwert gleich, hat man einen **Pol ohne Vorzeichenwechsel**.

Sind die Vorzeichen ungleich, hat man einen **Pol mit Vorzeichenwechsel** von + nach – oder von – nach +.

Beispiel:

Die Funktion $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 4}$ hat an der Stelle $x_1 = 4$ einen Pol der Vielfachheit 1 mit

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.



Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ vom Grad n (mit komplexen Koeffizienten) hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis:

Es ist $0 \leq |p(z)|$ und es existiert $\inf\{|p(z)|\} = m \geq 0$. Nach der Polynomabschätzung gibt es einen Radius $r > 0$ so dass gilt:

$$|p(z)| > m \quad \text{für} \quad |z| > r.$$

Das heißt, $p(z)$ nimmt das Infimum m auf der kompakten Kreisscheibe

$$K_r = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$$

an. Es gibt also ein $\tilde{z} \in K_r$ mit $p(\tilde{z}) = m$.

Man nimmt nun an, dass $p(\tilde{z}) = m \neq 0$ ist.

Setzt man $q(z) := \frac{p(z+\tilde{z})}{p(\tilde{z})}$, so ist $q(0) = 1$ und $|q(z)| = \frac{|p(z+\tilde{z})|}{|p(\tilde{z})|} \geq \frac{m}{m} = 1$.

Man schreibt $q(z)$ in folgender Form:

$$q(z) = 1 + b_m z^m + \dots + b_n z^n \quad \text{mit} \quad 1 \leq m.$$

Weil die Zahl $-\frac{|b_m|}{b_m}$ den Betrag 1 hat liegt sie auf dem Einheitskreis und kann in der Form $-\frac{|b_m|}{b_m} = e^{i\varphi}$ geschrieben werden.

Dann ist also $-|b_m| = b_m e^{i\varphi}$.

Hat nun z die Form $z = s e^{i \frac{f}{m}}$, so folgt für die Abschätzung von $|q(z)|$:

$$|q(z)| = \left| q\left(s e^{i \frac{f}{m}}\right) \right| = \left| 1 + b_m \left(s e^{i \frac{f}{m}}\right)^m + b_{m+1} \left(s e^{i \frac{f}{m}}\right)^{m+1} + \dots + b_n \left(s e^{i \frac{f}{m}}\right)^n \right|$$

$$|q(z)| \leq \left| 1 + b_m \left(s e^{i \frac{f}{m}}\right)^m \right| + \left| b_{m+1} \left(s e^{i \frac{f}{m}}\right)^{m+1} \right| + \dots + \left| b_n \left(s e^{i \frac{f}{m}}\right)^n \right|$$

$$|q(z)| \leq \left| 1 + b_m e^{i f s^m} \right| + \left| b_{m+1} s^{m+1} \left(e^{i \frac{f}{m}}\right)^{m+1} \right| + \dots + \left| b_n s^n \left(e^{i \frac{f}{m}}\right)^n \right|$$

$$|q(z)| \leq \left| 1 + b_m e^{i f s^m} \right| + |b_{m+1}| s^{m+1} + \dots + |b_n| s^n$$

$$|q(z)| \leq \left| 1 - |b_m| s^m \right| + |b_{m+1}| s^{m+1} + \dots + |b_n| s^n$$

Für jedes $s^m < \frac{1}{|b_m|}$ ist nun $0 < 1 - |b_m| s^m$ und $|1 - |b_m| s^m| = 1 - |b_m| s^m$,

so dass folgt:

$$|q(z)| \leq 1 - |b_m| s^m + |b_{m+1}| s^{m+1} + \dots + |b_n| s^n$$

$$|q(z)| \leq 1 - s^m (|b_m| - |b_{m+1}| s + \dots + |b_n| s^{n-m})$$

Da der Klammerausdruck für alle hinreichend kleinen s stets > 0 bleibt, kann $|q(z)|$ unter 1 gedrückt werden, obwohl doch $|q(z)| \geq 1$ für alle $z \in K_r$ ist.

Das heißt, dass die Annahme $p(\tilde{z}) = m \neq 0$ falsch ist, und $p(\tilde{z}) = m = 0$ gilt.

Das Polynom $p(z)$ hat also in $\tilde{z}$ eine Nullstelle.

q.e.d.

Faktorisierung eines komplexen Polynoms

Der **Fundamentalsatz** zusammen mit dem **Nullstellensatz**, sagt nun, dass jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen hat.

Für die Faktorisierung des Polynoms mit Hilfe der Nullstellen ergibt sich:

$$p_n(z) = a_n(z-z_1)^{v_1} \dots (z-z_t)^{v_t}$$

Hierbei sind die v_i , $i = 1, \dots, t$ die Vielfachheit der Nullstellen, und es gilt:

$$v_1 + \dots + v_t = n.$$

Sonderfall:

Sind alle Koeffizienten des Polynoms $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ reelle Zahlen, und ist die Zahl z_i Nullstelle, so ist auch die zugeordnete **konjugiertkomplexe Zahl** $\bar{z}_i$ eine Nullstelle:

$$p(\bar{z}_i) = a_n \bar{z}_i^n + \dots + a_1 \bar{z}_i + a_0$$

$$p(\bar{z}_i) = a_n \overline{z_i^n} + \dots + a_1 \bar{z}_i + a_0$$

$$p(\bar{z}_i) = \overline{a_n z_i^n} + \dots + \overline{a_1 z_i} + \overline{a_0}$$

$$p(\bar{z}_i) = \overline{a_n z_i^n + \dots + a_1 z_i + a_0}$$

$$p(\bar{z}_i) = \bar{0} = 0$$

Die echt komplexen Nullstellen z_i treten sozusagen paarweise auf, und die Vielfachheiten von z_i und $\bar{z}_i$ sind gleich.

Setzt man $z_i = a+ib$ und $\bar{z}_i = a-ib$ so ist für jedes reelle x :

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = ((x-a)-ib)((x-a)+ib) = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2, \text{ also}$$

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 + Ax + B$$

mit $A := -2a$, $B := a^2 + b^2$.

Das quadratische Polynom $x^2 + Ax + B$ hat als einzige Nullstellen die beiden echt komplexen Zahlen z_i und $\bar{z}_i$.

„Reelle Faktorisierung“ des Polynoms $p_n(x)$ mit reellen Koeffizienten

Das Polynom $p(x)$ kann man nun in der „reellen“ Faktorisierung schreiben als

$$p_n(x) = a_n(x-x_1)^{v_1} \dots (x-x_r)^{v_r} (x^2+A_1x+B_1)^{w_1} \dots (x^2+A_sx+B_s)^{w_s}$$

mit $v_1 + \dots + v_r + 2w_1 + \dots + 2w_s = n$.

Hier sind $x_1, \dots, x_r$ die reellen Nullstellen, die mit der Vielfachheit $v_1, \dots, v_r$ auftreten.

Die $x^2+A_ix+B_i$, $i = 1, \dots, s$, sind quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten A_i, B_i mit zwei **konjugiert-komplexen Nullstellen** z_i und $\bar{z}_i$ mit der jeweiligen Vielfachheit w_i .

Partialbruchzerlegung von komplexen Rationalen Funktionen

Sei $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine **echt gebrochen Rationale Funktion**, das heißt $n = \text{Grad}(p) < \text{Grad}(q) = m$, wobei das Nennerpolynom mittels der Nullstellen faktorisiert sei:

$$R(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)^{v_1} \dots (z-z_t)^{v_t}}.$$

Dann besitzt $R(z)$ eine **eindeutige Summendarstellung in Form von Partialbrüchen**

$$\begin{aligned} R(z) = & \frac{a_{11}}{(z-z_1)} + \frac{a_{12}}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{a_{1v_1}}{(z-z_1)^{v_1}} \\ & + \frac{a_{21}}{(z-z_2)} + \frac{a_{22}}{(z-z_2)^2} + \dots + \frac{a_{2v_2}}{(z-z_2)^{v_2}} \\ & + \dots \dots \\ & + \frac{a_{t1}}{(z-z_t)} + \frac{a_{t2}}{(z-z_t)^2} + \dots + \frac{a_{tv_t}}{(z-z_t)^{v_t}} \end{aligned}.$$

Beweis:

Der Beweis wird durch Vollständige Induktion über den Nennergrad m von $q(z)$ geführt.

Induktionsanfang: $m = 1$

Das Zählerpolynom ist eine Konstante $p(x) = c$ und für die Darstellung von R folgt:

$$R(z) = \frac{c}{b_1 x + b_0} = \frac{c}{b_1 \left(x + \frac{b_0}{b_1}\right)} = \frac{c}{b_1 \left(x - \left(-\frac{b_0}{b_1}\right)\right)} = \frac{\frac{c}{b_1}}{\left(x - \left(-\frac{b_0}{b_1}\right)\right)} = \frac{a_{11}}{(x-x_1)}$$

Induktionsschluss: $m \Rightarrow m+1$

Man betrachtet für jedes $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{\tilde{z}}{(z-z_1)^{v_1}} = \frac{p(z)}{(z-z_1)^{v_1} r_{m-v_1}(z)} - \frac{\tilde{z}}{(z-z_1)^{v_1}} = \frac{p(z) - \tilde{z} r_{m-v_1}(z)}{(z-z_1)^{v_1} r_{m-v_1}(z)} .$$

Setze: $\tilde{z} := \frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)}$

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{\frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)}}{(z-z_1)^{v_1}} = \frac{p(z) - \frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)} r(z)}{(z-z_1)^{v_1} r_{m-v_1}(z)}$$

Die Zählerfunktion der rechten Seite hat bei z_1 eine Nullstelle:

$$p(z_1) - \frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)} r(z_1) = 0$$

Das heißt, sie kann mittels der Nullstelle faktorisiert werden:

$$p(z) - \frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)} r_{m-v_1}(z) = (z-z_1) S_{n-1}(z) .$$

Dann folgt:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{\frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)}}{(z-z_1)^{v_1}} = \frac{(z-z_1) S_{n-1}(z)}{(z-z_1)^{v_1} r_{m-v_1}(z)} ,$$

und nach Kürzen durch $(z-z_1)$:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{\frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)}}{(z-z_1)^{v_1}} = \frac{S_{n-1}(z)}{(z-z_1)^{v_1-1} r_{m-v_1}(z)} .$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat die rechte Rationale Funktion eine Darstellung als Linearkombination durch Partialbrüche der genannten Form, und damit auch die Funktion

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\frac{p(z_1)}{r_{m-v_1}(z_1)}}{(z-z_1)^{v_1}} + \frac{S_{n-1}(z)}{(z-z_1)^{v_1-1} r_{m-v_1}(z)} .$$

Induktionsende:

Die Behauptung ist also richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jetzt muss man noch die Eindeutigkeit der Partialbruchdarstellung beweisen. Dazu nimmt man an, dass es zwei Darstellungen für $R(z)$ gibt:

$$\begin{aligned} R \frac{a_{11}}{(z-z_1)} + \frac{a_{12}}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{a_{1v_1}}{(z-z_1)^{v_1}} &= R \frac{b_{11}}{(z-z_1)} + \frac{b_{12}}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{b_{1v_1}}{(z-z_1)^{v_1}} \\ + \frac{a_{21}}{(z-z_2)} + \frac{a_{22}}{(z-z_2)^2} + \dots + \frac{a_{2v_2}}{(z-z_2)^{v_2}} &= + \frac{b_{21}}{(z-z_2)} + \frac{b_{22}}{(z-z_2)^2} + \dots + \frac{b_{2v_2}}{(z-z_2)^{v_2}} \\ + \dots &= + \dots \\ + \frac{a_{t1}}{(z-z_t)} + \frac{a_{t2}}{(z-z_t)^2} + \dots + \frac{a_{tv_t}}{(z-z_t)^{v_{t2}}} &= + \frac{b_{t1}}{(z-z_t)} + \frac{b_{t2}}{(z-z_t)^2} + \dots + \frac{b_{tv_t}}{(z-z_t)^{v_t}} \end{aligned}$$

Will man zum Beispiel zeigen, dass $a_{iv_i} = b_{iv_i}$ ist, multipliziert man mit $(z-z_i)^{v_i}$ und lässt dann $z \rightarrow z_i$ streben, verschwinden alle Terme bis auf

$$a_{iv_i} = b_{iv_i} .$$

q.e.d.

Partialbruchzerlegung reeller Rationaler Funktionen

Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine **echt gebrochen Rationale Funktion**, das heißt
 $n = \text{Grad}(p) < \text{Grad}(q) = m$, mit **reellen Polynomen** $p(x)$ und $q(x)$, wobei das
Nennerpolynom $q(x)$ mittels der Nullstellen **reell faktorisiert** sei:

$$R(x) = \frac{p(x)}{b_m(x-x_1)^{v_1} \dots (x-x_r)^{v_r} (x^2+A_1x+B_1)^{w_1} \dots (x^2+A_sx+B_s)^{w_s}},$$

mit $v_1 + \dots + v_r + 2w_1 + \dots + 2w_s = m$.

Es gilt weiter:

- (1) **Faktorisierung der quadratischen reellen Polynome mittels seiner konjugiert-komplexen Nullstellen**

$$x^2 + A_j x + B_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, s$$

- (2) **Übergang zu komplexen Faktorisierung**

$$q(x) = b_m(x-x_1)^{v_1} \dots (x-x_r)^{v_r} (x^2+A_1x+B_1)^{w_1} \dots (x^2+A_sx+B_s)^{w_s}$$

$$q(x) = b_m(x-x_1)^{v_1} \dots (x-x_r)^{v_r} (x-z_1)^{w_1} (x-\bar{z}_1)^{w_1} \dots (x-z_s)^{w_s} (x-\bar{z}_s)^{w_s}$$

- (3) In der **Partialbruchentwicklung** von $R(x)$ kommen für
 $i=1,\dots,r$ $l=1,\dots,v_i$ $j=1,\dots,s$ $k=1,\dots,w_j$
folgende Ausdrücke vor:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \dots \frac{a_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{b_{jk}}{(x-z_j)^k} + \frac{c_{jk}}{(x-\bar{z}_j)^k} + \dots$$

(4) Weil die Koeffizienten und das Argument reell sind, folgt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \overline{\left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)},$$

und für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \overline{\dots \frac{a_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{b_{jk}}{(x-z_j)^k} + \frac{c_{jk}}{(x-\bar{z}_j)^k} + \dots}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \dots \frac{\bar{a}_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{\bar{b}_{jk}}{(x-\bar{z}_j)^k} + \frac{\bar{c}_{jk}}{(x-z_j)^k} + \dots$$

(5) Wegen der **Eindeutigkeit der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung** folgt:

$$\bar{a}_{il} = a_{il}, \quad \bar{b}_{jk} = c_{jk}, \quad \bar{c}_{jk} = b_{jk}, \text{ und}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \dots \frac{a_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{b_{jk}}{(x-z_j)^k} + \frac{\bar{b}_{jk}}{(x-\bar{z}_j)^k} + \dots$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \dots \frac{a_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{b_{jk}(x-\bar{z}_j)^k + \bar{b}_{jk}(x-z_j)^k}{(x-z_j)^k(x-\bar{z}_j)^k} + \dots$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \dots \frac{a_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{b_{jk}(x-\bar{z}_j)^k + \bar{b}_{jk}(x-z_j)^k}{((x-z_j)(x-\bar{z}_j))^k} + \dots$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \dots \frac{a_{il}}{(x-x_i)^l} + \dots \frac{b_{jk}(x-\bar{z}_j)^k + \bar{b}_{jk}(x-z_j)^k}{(x^2 + A_j x + B_j)^k} + \dots$$

Der Zähler $b_{jk}(x-\bar{z}_j)^k + \bar{b}_{jk}(x-z_j)^k$ ist für alle k ein reelles Polynom $r(x)$ mit $\text{Grad}(r(x)) = k < 2k = \text{Grad}(x^2 + A_j x + B_j)$:

$$\frac{r(x)}{(x^2 + A_j x + B_j)^k} = \frac{b_{jk}(x-\bar{z}_j)^k + \bar{b}_{jk}(x-z_j)^k}{(x^2 + A_j x + B_j)^k}.$$

Dass das Polynom reell ist kann man leicht zeigen.

Jetzt beweist man durch **Vollständige Induktion**, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{r(x)}{(x^2 + A_j x + B_j)^k} = \sum_{h=1}^k \frac{C_{jh}x + D_{jh}}{(x^2 + A_j x + B_j)^h},$$

Beweis:

Induktionsanfang: $k = 1$

$$b_{jk}(x - \bar{z}_j) + \overline{b_{jk}}(x - z_j) = (b_{jk} + \overline{b_{jk}})x + b_{jk}\bar{z}_j + \overline{b_{jk}}z_j$$

$$b_{jk}(x - \bar{z}_j) + \overline{b_{jk}}(x - z_j) = (b_{jk} + \overline{b_{jk}})x + b_{jk}\bar{z}_j + \overline{b_{jk}}\bar{z}_j$$

$$b_{jk}(x - \bar{z}_j) + \overline{b_{jk}}(x - z_j) = (b_{jk} + \overline{b_{jk}})x + b_{jk}\bar{z}_j + \overline{b_{jk}}\bar{z}_j$$

$$b_{jk}(x - \bar{z}_j) + \overline{b_{jk}}(x - z_j) = C_{jh}x + D_{jh}$$

also

$$\frac{r(x)}{(x^2 + A_j x + B_j)} = \frac{C_{jh}x + D_{jh}}{(x^2 + A_j x + B_j)}$$

Induktionsschluss: $k \Rightarrow k+1$

Es wird angenommen, dass die Behauptung für k bewiesen ist. Sei jetzt $r(x)$ gegeben mit $\text{Grad}(r) \leq k$.

Dann führt die Polynomdivision auf

$$\frac{r(x)}{(x^2 + A_j x + B_j)} = s(x) + \frac{C_j x + D_j}{(x^2 + A_j x + B_j)} \quad \text{mit} \quad \text{Grad}(s) \leq k.$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{(x^2 + A_j x + B_j)^{k+1}} = \frac{s(x)}{(x^2 + A_j x + B_j)^k} + \frac{C_j x + D_j}{(x^2 + A_j x + B_j)^{k+1}}$$

Nach Induktionsannahme gilt die Behauptung für $\frac{s(x)}{(x^2+A_jx+B_j)^k}$ und damit auch für $\frac{r(x)}{(x^2+A_jx+B_j)^{k+1}}$.

Induktionsende:

Die Behauptung ist also richtig für alle $k \in \mathbb{N}$.

q.e.d.

Jetzt sieht die Partialbruchzerlegung folgendermaßen aus:

Partialbruchzerlegung reeller Rationaler Funktionen

Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine **echt gebrochen Rationale Funktion**, das heißt $n = \text{Grad}(p) < \text{Grad}(q) = m$, mit **reellen Polynomen** $p(x)$ und $q(x)$, wobei das

Nennerpolynom $q(x)$ mittels der Nullstellen **reell faktorisiert** sei:

$$R(x) = \frac{p(x)}{b_m(x-x_1)^{v_1} \dots (x-x_r)^{v_r} (x^2+A_1x+B_1)^{w_1} \dots (x^2+A_sx+B_s)^{w_s}},$$

mit $v_1+\dots+v_r+2w_1+\dots+2w_s = m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{a_{11}}{(x-x_1)} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1v_1}}{(x-x_1)^{v_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{r1}}{(x-x_r)} + \frac{a_{r2}}{(x-x_r)^2} + \dots + \frac{a_{rv_r}}{(x-x_r)^{v_r}} \\ & + \frac{C_{11}x + D_{11}}{(x^2+A_1x+B_1)} + \dots + \frac{C_{1w_1}x + D_{1w_1}}{(x^2+A_1x+B_1)^{w_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{C_{s1}x + D_{s1}}{(x^2+A_sx+B_s)} + \dots + \frac{C_{sw_s}x + D_{sw_s}}{(x^2+A_sx+B_s)^{w_s}} \end{aligned}$$