03
Differentialrechnung

Arno Fehringer

Sätze zu Stetigkeit

Definition
Eine Funktion f : [a; b] ----------> IR heißt **stetig**, wenn für alle x aus [a; b] gilt:

$$\lim_{\bar{x}\to x} f(\bar{x}) = f(x)$$

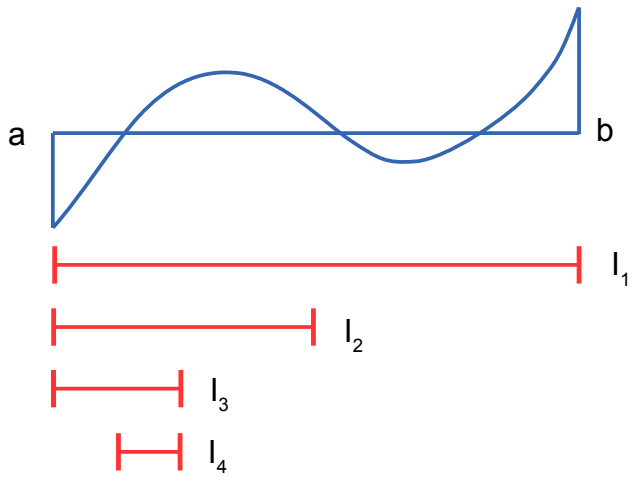
Dabei bedeutet $\lim_{\bar{x}\to x} f(\bar{x}) = f(x)$, dass für jede Folge (x_n) mit $\lim_{x_n\to x} x_n = x$ folgt, dass auch $\lim_{x_n\to x} f(x_n) = f(x)$ ist.

Satz über die Abgeschlossenheit stetiger Funktionen
Sind f und g stetig, so sind auch die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient stetig.

Beweis:
Anwendung der Grenzwertsätze.

Nullstellensatz
Eine stetige Funktion f : [a; b] --------> IR , die an den Intervallgrenzen Funktionswerte mit unterschiedlichen Vorzeichen annimmt, hat in (a; b) mindestens eine Nullstelle.

Beweis:
Sei etwa f[a) < 0 und f(b) > 0. Wenn $I_1 = [a_1; b_1] = [a; b]$ und x_1 die Mitte von I_1 ist, dann gilt $f(x_1)=0$ oder $f(x_1)< 0$ oder $f(x_1)>0$. Im Fall der Gleichheit ist man fertig.
Im Fall der Ungleichheit sei $I_2 = [a_2; b_2]$ die Intervallhälfte von I_1 mit $f(a_2) < 0$ und $f(b_2) > 0$
Setzt man dieses Verfahren fort, so kommt man entweder zu einer Nullstelle von f oder man erhält eine Intervallschachtelung $I_1, I_2, I_3, ...$ mit einem Zentrum c.
Wegen der Stetigkeit von f ist dies nur möglich, wenn $f(c)=0$ ist, was man folgendermaßen zeigt:
Seien (a_n) und (b_n) die Folgen der linken bzw. die rechten Intervallgrenzen der Intervallschachtelung. Dann ist $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$ also $\lim_{a_n\to c} f(a_n) = f(c) \le 0$ und $\lim_{b_n\to c} f(b_n) = f(c) \ge 0$ und somit f(c) = 0.



Zwischenwertsatz
Eine stetige Funktion f : [a; b] -------> IR nimmt jeden Wert z mit f(a) < z < f(b) an.

Beweis:
Die Funktion F(x) = f(x) – z ist stetig und hat an den Intervallgrenzen verschiedene Vorzeichen: F(a) = f(a) – z < 0 , F(b) = f(b) – z > 0 .
Deshalb gibt es nach dem **Nullstellensatz** ein c mit F(c) = f(c) -z = 0, also f(c) = z .

Schrankensatz
Eine stetige Funktion f : [a; b] --------> IR ist beschränkt.

Beweis:
Angenommen, f sei nicht beschränkt. Wenn I_1=[a,b] und x_1 die Mitte von I_1 ist, dann ist f in mindestens einer Hälfte I_2 nicht beschränkt, ebenso nicht in einer Häfte I_3 von I_2 etc.
Die Intervallschachtelung $I_1, I_2, I_3, ...$ hat ein Zentrum c, so dass f in keiner Umgebung von c beschränkt ist, was im Widerspruch zu $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ steht.

Satz vom Minimum und Maximum
Eine stetige Funktion f : [a; b] --------> IR nimmt den kleinsten und den größten Wert an .

Beweis:
Da f beschränkt ist, gibt es eine größte untere Schranke m und eine kleinste obere Schranke M.
Halbiert man das Intervall I_1 = [a,b] so ist M in mindestens einer Hälfte I_2 kleinste obere Schranke, usw. Es entsteht eine Intervallschachtelung $I_1, I_2, I_3, ...$ mit einem Zentrum c und f(c)=M.
Analog zeigt man, dass auch das Minimum angenommen wird.

Satz
Eine stetige Funktion f : [a; b] --------> IR bildet das kompakte Intervall [a; b] auf ein kompaktes Intervall ab.

Beweis:
Seien x_1 , x_2 nach dem **Satz vom Minimum und Maximum** die Extremalstellen und sei $f(x_1) < f(x_2)$. Dann ist $f([a;b]) = [f(x_1);f(x_2)]$, was folgendermaßen gezeigt wird:

Für $x \in [a;b]$ ist $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, also $f([a;b]) \subset [f(x);f(x_2)]$.

Sei umgekehrt $y \in [f(x_1);f(x_2)]$. Dann gibt es nach dem **Zwischenwertsatz** ein

$x \in [a;b]$ mit $f(x) = y$, also $y \in f([a;b])$ und somit $[f(x_1);f(x_2)] \subset f([a;b])$.

Daraus folgt die Behauptung $f([a;b]) = [f(x_1);f(x_2)]$.

Satz
Sei f : [a; b] --------> IR stetig und $f(x_0) > a$.
Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, so dass für alle $x \in U(x_0) \cap [a;b]$ gilt $f(x) > a$.

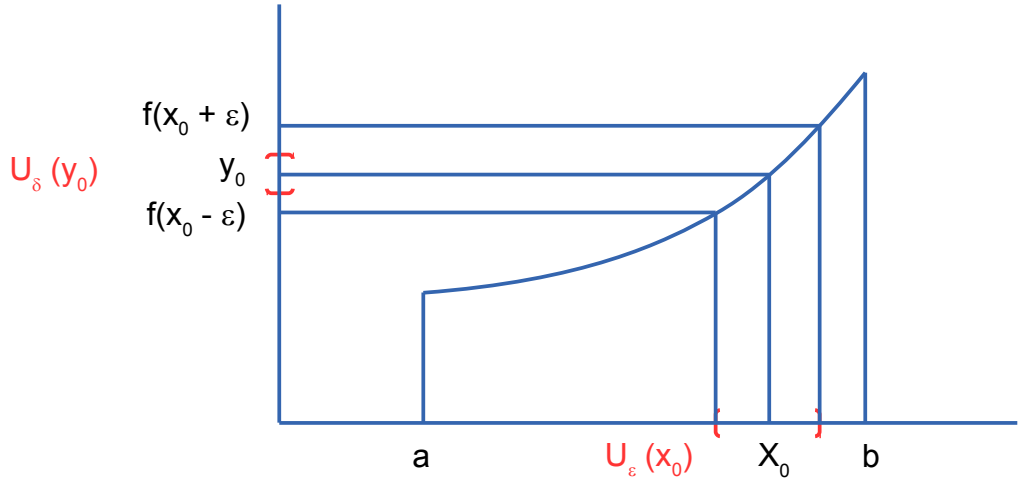
Entsprechendes gilt im Fall $f(x_0) < a$.

Beweis:
Wäre ein solches $U(x_0)$ nicht vorhanden, gäbe es es zu jedem $U_{1/n}(x_0)$ ein x_n mit $f(x_n) \leq a$. Dann wäre $\lim_{x_n \to x_0} x_n = x_0$, aber $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0) \leq a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Sei f : [a; b] --------> IR streng monoton steigend und stetig. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} im gleichen Sinne streng monoton und stetig.
Entsprechendes gilt für streng monoton fallende und stetige Funktion.

Beweis:



$x_0 = f^{-1}(y_0)$

Sei $y_0 \in f([a;b])$ und (y_n) Folge mit $\lim\limits_{y_n \to y_0} y_n = y_0$ und sei $f^{-1}(y_0) = x_0$.

Wir müssen zeigen, dass dann $\lim\limits_{y_n \to y_0} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$ ist.

Man nimmt zuerst an, dass x_0 im Inneren von [a; b] liegt. Sei $\varepsilon > 0$ und $U_\varepsilon(x_0)$ die entsprechende Umgebung von x_0 , die ganz in [a; b] liegt. Wegen der strengen Monotonie wird diese Umgebung auf das offene Intervall ($f(x_0 - \varepsilon)$; $f(x_0 + \varepsilon)$) abgebildet, wobei y_0 Element davon ist.
Es gibt deshalb eine Umgebung $U_\delta(y_0)$ worin fast alle y_n liegen. Es folgt nacheinander:

$f(x_0 - \varepsilon) < y_n < f(x_0 + \varepsilon)$

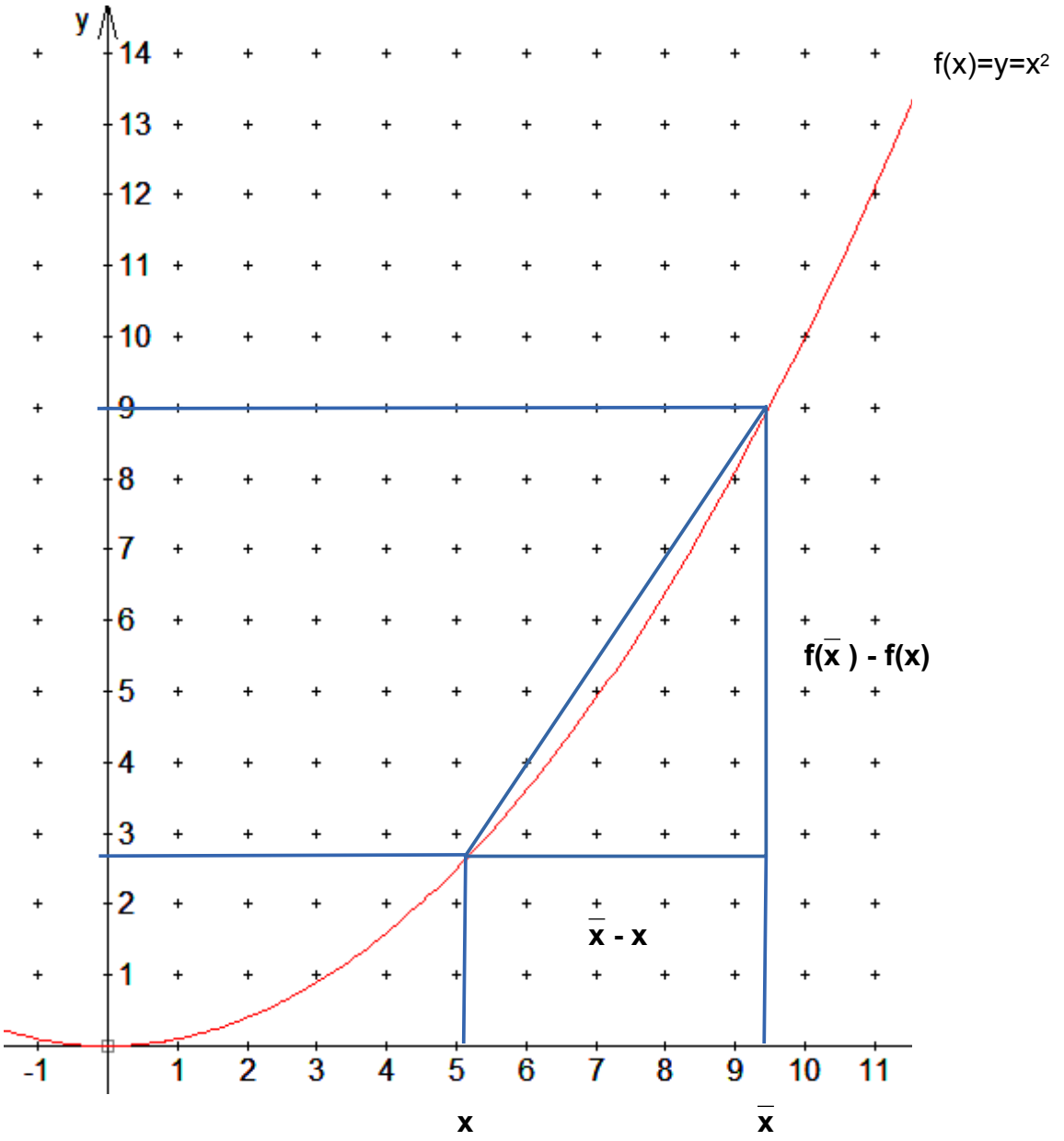
$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y_n) < x_0 + \varepsilon)$

$f^{-1}(y_n)$ in $U_\varepsilon(y_0)$

$$\lim_{y_n \to y_0} f^{-1}(y_n) = x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Die Ableitungsfunktion von $y=f(x)=x^2$

Gegeben sei die Funktion $y=f(x)=x^2$.
Gesucht ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle x.



Steigung der Sekante

$$m_s=\frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} = \frac{\bar{x}^2-x^2}{\bar{x}-x}=\frac{(\bar{x}^2-x^2)}{\bar{x}-x}=\frac{(\bar{x}+x)(\bar{x}-x)}{\bar{x}-x}=(\bar{x}+x)$$

Steigung der Tangente

$m_T = \lim_{\bar{x} \to x} m_s = \lim_{\bar{x} \to x} \bar{x} + x = 2x$ (gesprochen: „Limes m_S für $\bar{x}$ gegen x“)

Ableitungsfunktion f‘ (gesprochen: „f Strich“)

Die Ableitungsfunktion f‘ zur Funktion $f(x)=x^2$ gibt die Steigung der Tangente an der Stelle x an:

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x) = 2x$$

Die Ableitungsfunktion von $y=f(x)=x^3$

Gegeben sei die Funktion $y=f(x)=x^3$.
Gesucht ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle x.

Steigung der Sekante

$$m_s=\frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} = \frac{\bar{x}^3-x^3}{\bar{x}-x}=\frac{(\bar{x}^3-x^3)}{\bar{x}-x}=\frac{(\bar{x}^2+\bar{x}x+x^2)(\bar{x}-x)}{\bar{x}-x}=\bar{x}^2+\bar{x}x+x^2$$

Steigung der Tangente

$$m_T=\lim_{\bar{x}\to x} m_s=\lim_{\bar{x}\to x} \bar{x}^2+\bar{x}x+x^2 =3x^2$$

Ableitungsfunktion f‘(x) der Funktion f(x)=x^3

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)=3x^2$$

Die Ableitungsfunktion von $y=f(x)=x^n$

Gegeben sei die Funktion $y=f(x)=x^n$.
Gesucht ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle x.

Steigung der Sekante

$$m_s = \frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}-x} = \frac{(\bar{x}^n - x^n)}{\bar{x}-x} = \frac{(\bar{x}^{n-1}+\bar{x}^{n-2}x+\ldots+\bar{x}x^{n-2}+x^{n-1})(\bar{x}-x)}{\bar{x}-x} = \bar{x}^{n-1}+\bar{x}^{n-2}x+\ldots+\bar{x}x^{n-2}+x^{n-1}$$

Steigung der Tangente

$$m_T = \lim_{\bar{x}\to x} m_s = \lim_{\bar{x}\to x} \bar{x}^{n-1}+\bar{x}^{n-2}x+\ldots+\bar{x}x^{n-2}+x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Ableitungsfunktion f‘(x) der Funktion $f(x)=x^n$

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)=nx^{n-1}$$

Definition der Differenzierbarkeit:

Gegeben sei eine Funktion f : (a; b) ------> IR.

Existiert für alle x ε (a; b) der Grenzwert $\lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x}$, dann heißt die Funktion f differenzierbar im Intervall (a; b) .

Bemerkung:
Jede differenzierbare Funktion g ist stetig.

$$\lim_{\bar{x}\to x} g(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to x} g(x)+\frac{g(\bar{x})-g(x)}{\bar{x}-x}(\bar{x}-x) = g(x)$$

Ableitungsregeln

Potenzregel:

f(x)	f‘(x)
$x^0=1$	0
x^1	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
.	
.	
$\mathbf{x^n}$	$\mathbf{nx^{n-1}}$

Seien f, g differenzierbare Funktionen im Intervall (a; b) und c ε IR eine Konstante. Dann gilt:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f+c)'(x) = f'(x)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Damit sind alle Polynomfunktionen $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_2x^2+a_1x^1+a_0x^0$

differenzierbar.

Ableitungsregeln

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f+c)'(x) = f'(x)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis:

$$(f+g)'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{(f+g)(\bar{x})-(f+g)(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)+g(\bar{x})-g(x)}{\bar{x}-x} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} + \frac{g(\bar{x})-g(x)}{\bar{x}-x} = = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} + \lim_{\bar{x}\to x} \frac{g(\bar{x})-g(x)}{\bar{x}-x} =$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

$$(f+c)'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{(f+c)(\bar{x})-(f+c)(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)+c-c}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} = f'(x)$$

$$(cf)'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{(cf)(\bar{x})-(cf)(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{cf(\bar{x})-cf(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} c\frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} = cf'(x)$$

$$(fg)'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{(fg)(\bar{x})-(fg)(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})g(\bar{x})-f(x)g(\bar{x})+f(x)g(\bar{x})-f(x)g(x)}{\bar{x}-x} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(x)-(f)(x)}{\bar{x}-x} g(\bar{x}) + f(x)\frac{g(x)-g(x)}{\bar{x}-x} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} - \frac{f(x)}{g(\bar{x})}}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})g(x)-f(x)g(\bar{x})}{g(\bar{x})g(x)(\bar{x}-x)} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(\bar{x})}{g(\bar{x})g(x)(\bar{x}-x)} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \frac{(f(\bar{x})-f(x))g(x)-f(x)(g(\bar{x})-g(x))}{g(\bar{x})g(x)(\bar{x}-x)} =$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \frac{\frac{(f(\bar{x})-f(x))}{(\bar{x}-x)} g(x) - f(x)\frac{(g(\bar{x})-g(x))}{(\bar{x}-x)}}{g(\bar{x})g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Ableitungsregeln

Potenzregel für negative Exponenten:

Für alle $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -n x^{-n-1}$

Beweis:

Mit Hilfe der Quotientenregel folgt:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{n-1-2n} = -n x^{-n-1}$$

q.e.d.

Relative Extrema

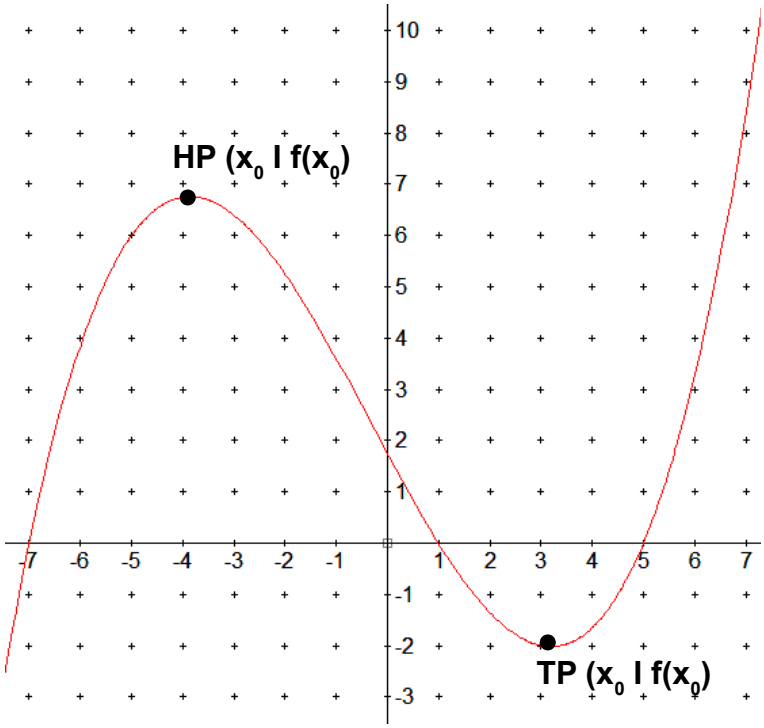
Definition:

Sei f : (a; b) ------> IR eine differenzierbare Funktion.

x_0 heißt **relatives** **Maximum** / **Minimum**, falls eine Umgebung U von x_0 existiert, so dass gilt

$f(x) < f(x_0)$ / **$f(x) > f(x_0)$** für alle $x \varepsilon U$.

Der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ heißt dann **relativer** **Hochpunkt** / **Tiefpunkt** .



Notwendige Bedingung für relative Extrema

Ist f differenzierbar und x_0 ein relatives Extremum, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

Sei f differenzierbar und x_0 ein **relatives Maximum**.

Dann ist $x<x_0$ für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \qquad \text{also} \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

und analog ist für $x>x_0$ für alle x in der Umgebung von x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \qquad \text{also} \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Zusammen ergibt sich $f'(x_0) = 0$.

Entsprechend zeigt man, dass bei einem **relativen Minimum** x_0 gilt: $f'(x_0) = 0$.

q.e.d.

Ableitungsregeln

Kettenregel:

Gegeben seien differenzierbare Funktionen. Die Verkettung $g \circ f$ ist folgendermaßen erklärt:

$g \circ f$: x ----------> f(x) =y ----------> g(y) = g(f(x))

Dann gilt: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Beweis:

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\bar{x} \to x} \frac{(g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(x)}{\bar{x} - x}$$

$$= \lim_{\bar{x} \to x} \frac{g(\bar{y}) - g(y)}{\bar{x} - x}$$

$$= \lim_{\bar{x} \to x} \frac{g(\bar{y}) - g(y)}{\bar{y} - y} \cdot \frac{\bar{y} - y}{\bar{x} - x}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{g(\bar{y}) - g(y)}{\bar{y} - y} \cdot \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x}$$

$$= g'(y) \cdot f'(x)$$

$$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

q.e.d.

Monotonie

Sei f differenzierbar und **monoton** **steigend** / **fallend**, dann ist $f' \geq 0$ / $f' \leq 0$.

Beweis:

Im ersten Fall ist $\frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} \geq 0$ also $f'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} \geq 0$

Im zweiten Fall ist $\frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} \leq 0$ also $f'(x) = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{\bar{x}-x} \leq 0$

q.e.d.

Satz von Rolle

Sei f eine differenzierbare Funktion auf (a ;b) , stetig auf [a; b] und es gelte f(a)=f(b), dann gibt es ein x in (a;b) mit $f'(x) = 0$.

Beweis:
1. Fall: Wenn f konstant ist, dann ist f‘(x)=0 für alle x aus (a;b) .

2. Fall: Da die Funktion f stetig auf [a;b] ist, nimmt sie Minimum n und Maximum M an. Sei zum Beispiel M von f(a)=f(b) verschieden. Dann wird das Maximum an der Stelle x im Innern angenommen, also ist $f'(x) = 0$.

q.e.d.

1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Die Funktion f sei auf dem kompakten Intervall [a; b] stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar. Dann gibt es ein x in (a; b) mit

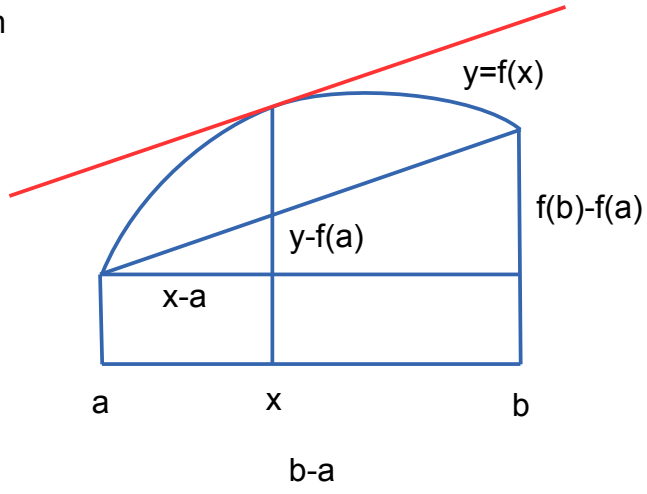
$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad .$$

Beweis:
Die Gleichung der Sehne ergibt sich aus dem Strahlensatz

$$\frac{y-f(a)}{x-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

zu

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



Betrachte die Differenzfunktion $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Dann ist F(a)=F(b) und nach dem **Satz von Rolle** gibt es ein x in (a; b) mit

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \qquad \text{also} \qquad f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

q.e.d.

2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Die Funktionen f, g seien in [a; b] stetig und in (a; b) differenzierbar und g‘ $\neq$ 0 in (a; b). Dann gibt es ein x in (a; b) mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Beweis:

Aus dem Mittelwertsatz folgt zunächst $g(b)-g(a)\neq 0$.

Die Funktion $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ erfüllt die

Voraussetzungen des **Satzes von Rolle** .

Somit gibt es ein x in (a; b) mit $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x) = 0$, woraus

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ folgt

q.e.d.

Regeln von de l'Hospital (1)

Die Funktionen f : [a; b) ----> IR und g : (a; b) ----> IR seien stetig und differenzierbar auf (a; b) und g' $\neq$ 0 , und es gelte $f(a) = g(a) = 0$

Dann ist $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

Ein entsprechender Satz gilt für (a; b] und $x \to b-$.

Beweis:

(a) Nach dem **1. Mittelwertsatz** ist g(x) $\neq$ 0. Nach dem **2. Mittelwertsatz** gibt es zu jedem x ein t(x) mit 0< t(x) <1 , also a< a+t(x)(x-a) <x , so dass gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a+t(x)(x-a))}{g'(a+t(x)(x-a))}$$

Wenn $\lim\limits_{x \to a+} x = a$ ist, dann ist auch $\lim\limits_{x \to a+} a+t(x)(x-a) = a$ und

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(a+t(x)(x-a))}{g'(a+t(x)(x-a))} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

q.e.d.

Bemerkung:

Sind f', g' stetig, so ist $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ und es folgt: $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Regeln von de l'Hospital (2)

Die Funktionen $f : [a;\infty) \dashrightarrow IR$ und $g : [a;\infty) \dashrightarrow IR$ seien stetig und differenzierbar auf $(a;\infty)$ und $g' \neq 0$, und es gelte $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

Dann ist $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beweis:

Wir betrachten die mittels Koordinatentransformation gewonnen Funktionen
$F: [0;\infty) \dashrightarrow IR$ und $G : [0;\infty) \dashrightarrow IR$ mit

$$F(y) = f(a+\frac{1}{y}) \quad \text{und} \quad G(y) = g(a+\frac{1}{y})$$

Dann gilt: $\lim_{x\to\infty} x = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to 0} y = 0$, und es folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = = \lim_{y\to 0} \frac{f'(a+\frac{1}{y})}{g'(a+\frac{1}{y})} = \lim_{y\to 0} \frac{-f'(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^{-2}}}{-g'(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^{-2}}} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{d}{dy}\left(f(a+\frac{1}{y})\right)}{\frac{d}{dy}\left(g(a+\frac{1}{y})\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{f(a+\frac{1}{y})}{g(a+\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

q.e.d.

Monotoniekriterium

Sei f differenzierbar und $\begin{matrix} f' > 0 \\ f' < 0 \end{matrix}$, dann ist f $\begin{matrix} \textbf{streng monoton steigend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{matrix}$.

Beweis:

Sei $f' > 0$. Sei $x_1 < x_2$. Wir müssen zeigen, dass dann $f(x_1) < f(x_2)$ ist.

Angenommen es gelte $f(x_1) \geq f(x_2)$, also $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$.

Dann gibt es nach dem **Mittelwertsatz** ein x in $(x_1; x_2)$ mit $f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$,

im Widerspruch zur Voraussetzung. Also folgt, dass $f(x_1) < f(x_2)$ ist.

Sei $f' < 0$. Sei $x_1 < x_2$. Wir müssen zeigen, dass dann $f(x_1) > f(x_2)$ ist.

Angenommen es gelte $f(x_1) \leq f(x_2)$, also $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

Dann gibt es nach dem **Mittelwertsatz** ein x in $(x_1; x_2)$ mit $f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$,

im Widerspruch zur Voraussetzung. Also folgt, dass $f(x_1) > f(x_2)$ ist.

q.e.d.

Konstanzkriterium

Sei f differenzierbar und es gelte $f' = 0$, dann ist f konstant.

Beweis:

Sei $x_1 < x_2$ und etwa $f(x_1) < f(x_2)$. Dann sind sowohl $x_2 - x_1 > 0$ als auch

$f(x_2) - f(x_1) > 0$, und es gibt nach dem **Mittelwertsatz** ein x in $(x_1; x_2)$ mit

$f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also folgt, dass f konstant ist.

q.e.d.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Stetigkeit der Umkehrfunktion:
Sei x = f(y) eine eine streng monotone Funktion auf dem kompakten Intervall [a; b] und sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Dann ist auch f^{-1} stetig.

Beweis:
Sei $x_n \to x$ konvergent. Dann ist $y_n = f^{-1}(x_n)$ beschränkt, und es existiert eine konvergente Teilfolge y_ν mit . y_ν Sei $y = f^{-1}(x)$.

Wegen der Stetigkeit von f gilt $x_\nu = f(y_\nu) \to f(\bar{y})$ und nach Voraussetzung $x_\nu \to x$, also ist $x = f(\bar{y})$. Andererseits ist aber $x = f(y)$, und es folgt wegen der Monotonie $\bar{y} = y$. Die Folge hat also y_n hat also nur einen Häufungspunkt y und konvergiert deshalb , $y_n \to y$, bzw. $f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x)$. Also ist f^{-1} stetig in x .

Ableitung der Umkehrfunktion:
Sei x = f(y) eine eine streng monotone differenzierbare Funktion und sei f^{-1} die Umkehrfunktion und $f' \neq 0$.

Dann gilt $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Beweis:
Nach dem **Mittelwertsatz** gibt es ein y_m mit $f'(y_m) = \frac{f(\bar{y})-f(y)}{\bar{y}-y}$. Dann folgt nacheinander:

$$\frac{\bar{y}-y}{f(\bar{y})-f(y)} = \frac{1}{f'(y_m)}$$

$$\frac{f^{-1}(\bar{x}) - f^{-1}(x)}{\bar{x}-x} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_m))}$$

$$\lim_{\bar{x}\to x} \frac{f^{-1}(\bar{x}) - f^{-1}(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{1}{f'(f^{-1}(x_m))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass wenn zum Beispiel f monoton steigend ist, mit $y<y_m<\bar{y}$ auch $f(y) < f(y_m) < f(\bar{y})$ und somit $x < x_m < \bar{x}$ ist. Wegen der Stetigkeit von f‘ und der Umkehrfunktion f^{-1} folgt dann der Grenzwert.

Ableitungsregeln

Ableitung der Wurzelfunktionen:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Beweis:

Nach der **Ableitungsregel für die Umkehrfunktion** gilt:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n(x)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Ableitung der Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten:

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Beweis:

Nach der **Kettenregel** gilt:

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Ableitungsregeln

Ableitung der Wurzelfunktionen:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1}$$

Beweis:

$$y \quad \text{----------> } y^n = x \text{ ----------> } \quad x^{\frac{1}{n}} = \left(y^n\right)^{\frac{1}{n}} = y$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$1 = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \cdot n y^{n-1} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \cdot n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \cdot n x^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

q.e.d.

Ableitungsregeln

Ableitung der Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten:

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Beweis:

Nach der Kettenregel gilt:

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

q.e.d.

Hinreichende Bedingungen für relative Extrema
Im Folgenden sei f dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt, d.h. f''' ist stetig.

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist ein **relatives Maximum**.

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist ein r**elatives Minimum**.

Beweis:
Aus der Stetigkeit von f'' folgt, dass in einer ganzen Umgebung von x_0 die zweite Ableitungsfunktion f'' < 0 ist. Somit ist die erste Ableitungsfunktion f' streng monoton fallend.
Links von der Nullstelle x_0 ist f'>0, d.h. f ist streng monoton steigend, und rechts von x ist f'<0, d.h. f ist streng monoton fallend. Das bedeutet, dass die Funktion f bei x ein **relatives Maximum** hat.

Aus der Stetigkeit von f'' folgt, dass in einer ganzen Umgebung von x_0 die zweite Ableitungsfunktion f'' > 0 ist. Somit ist die erste Ableitungsfunktion f' streng monoton steigend. Links von der Nullstelle x ist f'<0, d.h. f ist streng monoton fallend, und rechts von x_0 ist f'>0, d.h. f ist streng monoton steigend. Das bedeutet, dass die Funktion f bei x_0 ein **relatives Minimum** hat.

Definition Krümmungsverhalten
Der Graph einer Funktion f ist
an der Stelle x_0 **linksgekrümmt**, wenn **f' in einer Umgebung von x streng monoton steigt**,
an der Stelle x_0 **rechtsgekrümmt,** wenn **f' in einer Umgebung von x streng monoton fällt**.

Hinreichendes Kriterium
$f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f ist in einer Umgebung von x_0 **linksgekrümmt**.

$f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ f ist in einer Umgebung von x_0 **rechtsgekrümmt**.

Beweis:
Aus $f''(x_0) > 0$ folgt, dass in einer ganzen Umgebung von x_0 f'' > 0 gilt.
Nach dem **Monotoniekriterium** ist f' in einer Umgebung von x_0 **streng monoton steigend**, d.h. f ist in einer Umgebung von x **linksgekrümmt**.

Aus $f''(x_0) < 0$ folgt, dass in einer ganzen Umgebung von x_0 f'' < 0 gilt.
Nach dem **Monotoniekriterium** ist f' in einer Umgebung von x_0 **streng monoton fallend**, d.h. f ist in einer Umgebung von x **rechtsgekrümmt**.

Definition Wendepunkt
Der Graph einer Funktion hat an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**, wenn in einer Umgebung von x_0 **rechts und links von dieser Stelle entgegengesetztes Krümmungsverhalten** herrscht.

Notwendige Bedingung für Wendepunkt
Hat der Graph einer Funktion f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, dann ist $f''(x_0) = 0$.

Beweis:
Aus $f''(x_0) > 0$ oder $f''(x_0) < 0$ folgt in einer Umgebung von x_0 einheitliches Krümmungsverhalten. Deshalb muss $f''(x_0) = 0$ sein.

Hinreichende Bedingung für Wendepunkt
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0 \mid f(x_0)$ **Wendepunkt**.

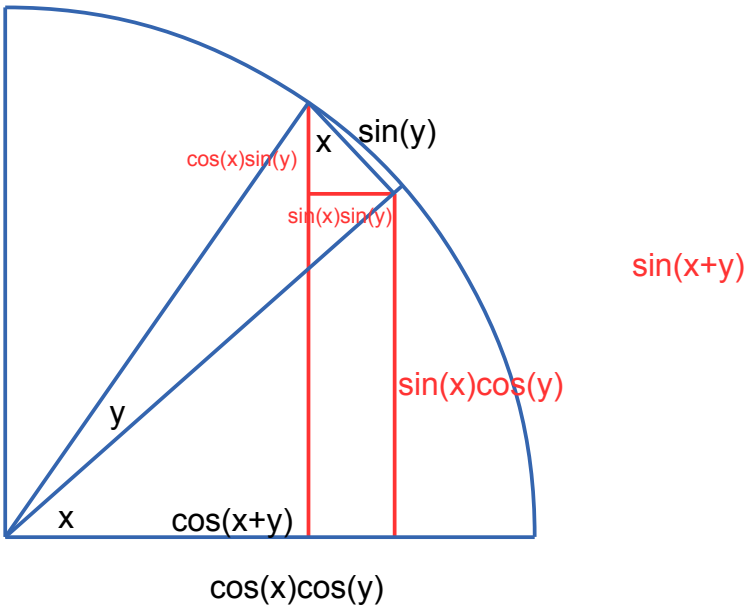
Beweis:

Ist etwa $f'''(x_0) > 0$, so nimmt f'' in einer Umgebung von x_0 streng monoton zu, d.h. links von x_0 ist $f'' < 0$ und rechts von x ist $f'' > 0$, also ist das Krümmungsverhalten links und rechts von x_0 unterschiedlich.

Additionstheoreme der Trigonometrischen Funktionen

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

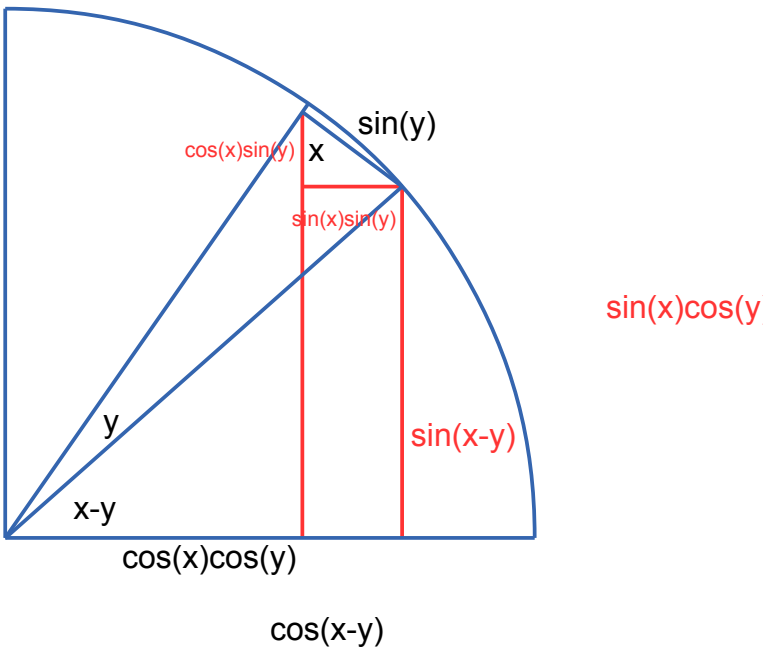
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$



sin(x+y)

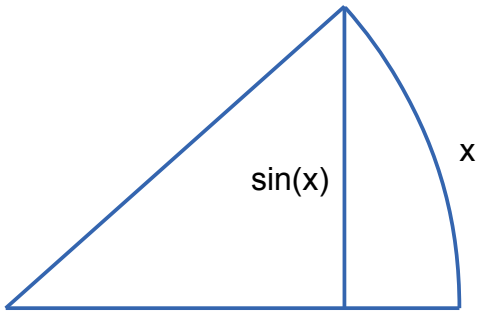
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$



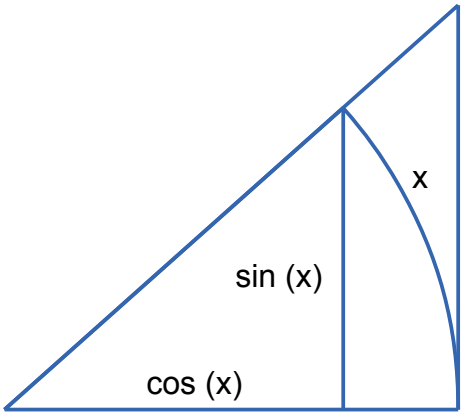
sin(x)cos(y)

Grenzwerte Trigonometrischer Funktionen



$$0 < \sin(x) < x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} 1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin(x) < \frac{1}{2}\cdot x\cdot 1 < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Ableitung der Trigonometrischen Funktionen

$$\lim_{\bar{x}\to x} \frac{\sin(\bar{x})-\sin(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{\sin(x)\cos(\bar{x}-x)+\cos(x)\sin(\bar{x}-x)-\sin(x)}{\bar{x}-x}$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \sin(x)\frac{\cos(\bar{x}-x)-1}{\bar{x}-x}+\cos(x)\frac{\sin(\bar{x}-x)}{\bar{x}-x} = \cos(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

$$\lim_{\bar{x}\to x} \frac{\cos(\bar{x})-\cos(x)}{\bar{x}-x} = \lim_{\bar{x}\to x} \frac{\cos(x)\cos(\bar{x}-x)-\sin(x)\sin(\bar{x}-x)-\cos(x)}{\bar{x}-x}$$

$$= \lim_{\bar{x}\to x} \cos(x)\frac{\cos(\bar{x}-x)-1}{\bar{x}-x}-\sin(x)\frac{\sin(\bar{x}-x)}{\bar{x}-x} = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Nach der Quotientenregel ist

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Die Eulersche Zahl e

Man betrachtet die unterjährige Zinseszinsung eines Kapitals $K_0=1$ zu p=100% pro Jahr in n Zinsperioden:

$$K = K_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

$$K = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Gibt es den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

Behauptung:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist eine Intervallschachtelung und hat demzufolge das Zentrum

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Beweis:

$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton steigend, was man durch Abschätzung mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung zeigen kann:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} > \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1$$

$f_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend:

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2-1+1}{(n+1)^2-1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

Außerdem sind

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

und

$$f_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} < \frac{4}{n} .$$

Also haben wir eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum e

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] \text{ und } e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Die Zahl e heißt **Eulersche Zahl**.

Stetige Verzinsung allgemein

Man betrachtet die unterjährige Zinseszinsung eines Kapitals $K_0=1$ zum Zinssatz p pro Jahr in n Zinsperioden:

$$K = K_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

$$K = \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

Gibt es den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$?

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $\frac{p}{n} \le 1$ ist, also $\frac{n}{p} \ge 1$. Zu jedem n gibt es dann ein k_n mit $k_n \le \frac{n}{p} \le k_n+1$, also

$$\frac{1}{k_n+1} \le \frac{p}{n} \le \frac{1}{k_n} .$$

Dann folgt:

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{n}{p}} \le \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{n}{p}} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \le \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{k_n}\right)$$

Die linke und die rechte Seite streben jeweils gegen $e\cdot 1 = e$.

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} = e$.

Analog zeigt man $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} = \frac{1}{e}$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{p}{n}\right)^{-\frac{n}{p}} = e$.

Nun betrachtet man

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}\right]^p = e^p$$

q.e.d.

Reihenentwicklung der e-Funktion

Es ist bereits nachgewiesen, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ist.

Aufgrund des **Allgemeinen Binomischen Lehrsatzes** gilt folgende Abschätzung:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-(i-1))}{i!}\frac{x^i}{n^i}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-(i-1))}{n^i}\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}...\frac{(n-(i-1))}{n}\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x^i}{i!}$$

Wir zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x^i}{i!}$ existiert und gleich einer von x abhängigen Zahl s(x) ist, indem wir eine eine **konvergente Majorante** nach dem **Quotientenkriterium** angeben:

Es gibt eine Zahl $q < 1$, so dass für alle hinreichend großen $i \ge 2$ gilt:

$$\frac{\frac{x^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{x^i}{i!}} = \frac{x}{i+1} \le q < 1 \quad .$$

$$\frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \le q\frac{x^i}{i!}$$

Es folgt dann:

$$\frac{x^3}{3!} \le q\,\frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{x^4}{4!} \le q\frac{x^3}{3!} \le q^2\,\frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{x^5}{5!} \le q\frac{x^4}{4!} \le q^3\,\frac{x^2}{2!}$$

usw., allgemein also: $\frac{x^i}{i!} \le q^{(i-2)}\,\frac{x^2}{2!}$.

Damit gilt für hinreichend große i :

$$\sum_{j=i}^{n}\frac{x^j}{j!} \le \frac{x^2}{2!}\sum_{j=i}^{n}q^{(j-2)} = \frac{x^2}{2!}q^{i-2}\sum_{j=0}^{n-(i-2)}q^j$$

und die rechte Seite ist eine **konvergente Majorante** in Form einer **Geometrischen Reihe** .

Deshalb konvergiert auch $1+1+\sum_{j=2}^{i-1}\frac{x^j}{j!}+\sum_{j=i}^{n}\frac{x^j}{j!}$,

und es sei

$$\lim_{n\to\infty}\ 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{x^j}{j!} = \lim_{n\to\infty}\ 1+1+\sum_{j=2}^{i-1}\frac{x^j}{j!}+\sum_{j=i}^{n}\frac{x^j}{j!} =: s(x) \ .$$

Wir haben also:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x^i}{i!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\ 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x^i}{i!}$$

$$\boxed{e^x \le s(x)}$$

Als nächstes zeigen wir, dass auch $\boxed{e^x \geq s(x)}$ ist:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-(i-1))}{i!}\frac{x^i}{n^i}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-(i-1))}{n^i}\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}...\frac{(n-(i-1))}{n}\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{x^i}{i!}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{i=2}^{m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{x^i}{i!}$$

Wenn man nun für alle n > k nur bis zu k aufsummiert, ergibt sich:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+1+\sum_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{x^i}{i!}$$

Lässt man für festes k jetzt $n \to \infty$ gehen, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} 1+1+\sum_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{x^i}{i!}$$

.

$$e^x \geq 1+1+\sum_{i=2}^{k}\frac{x^i}{i!}$$

Lässt man jetzt $k \to \infty$ gehen, so gilt:

$$e^x \geq \lim_{k \to \infty} 1 + 1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{x^i}{i!}$$

$$e^x \geq s(x) = 1 + 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$\boxed{e^x \geq s(x)}$$

Daraus erhält man nun $e^x = s(x)$ und die **Reihendarstellung** für e^x :

$$e^x = s(x) = \lim_{n \to \infty} 1 + 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{x^i}{i!} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}$$

q.e.d.

Ableitung der Exponentialfunktionen $y = a^x$

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$y'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$y'(x) = y(x) \cdot y'(0)$$

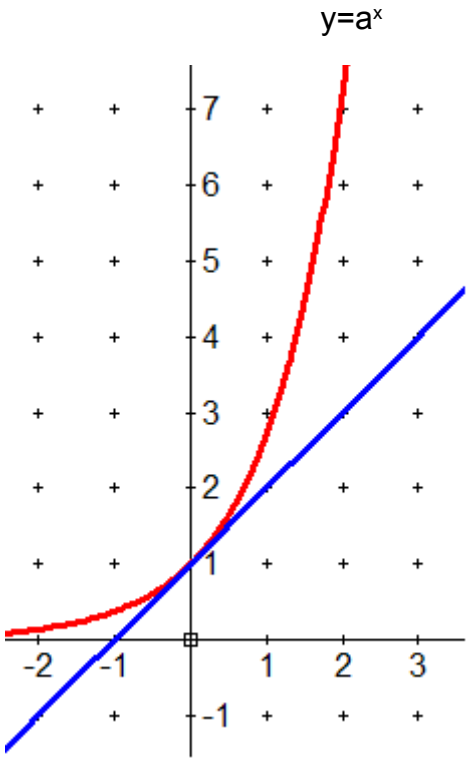
Falls also die Funktion $y = a^x$ an der Stelle x=0 differenzierbar ist, ist sie dies überall.

Andere Fragen sind:

Für welche Basis a gälte $y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$?

Gibt es eine Exponentialfunktion $y(x) = a^x$ mit $y'(x) = y(x)$?

Aus der Monotonie für y(x) würde die Monotonie von y‘(x) folgen, und das **Schaubild wäre also linksgekrümmt**.



Für die Tangente t(x) = 1+x im Punkt (0 I 1) und die Funktion $y=a^x$ müsste gelten:

$a^x > 1+x$ für $x>0$ und $a^x > 1+x$ für $x<0$

Wählt man für x die Folge $x_n = \frac{1}{n}$, so folgt:

$$a^{\frac{1}{n}} > 1+\frac{1}{n}$$

$$a > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$a \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

und

$$a^{-\frac{1}{n}} > 1-\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} > 1-\frac{1}{n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1+\frac{1}{n-1}$$

$$a < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$a \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e$$

Also muss die Basis gleich der Eulerschen Zahl e sein.

Wir betrachten nun die **e-Funktion** $y = e^x$ und zeigen, dass $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ ist.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) < e^{\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}-1 < \frac{1}{n-1}$$

$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1+\frac{1}{n-1}$$

Analog kann man zeigen, dass $1-\frac{1}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} < 1$ ist.

Es sei nun h eine positive Folge h_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $h_n \le 1$, also $\frac{1}{h_n} \ge 1$. Dann gibt es zu jedem n ein k_n mit $k_n \le \frac{1}{h_n} < k_n+1$, also $\frac{1}{k_n+1} < h_n \le \frac{1}{k_n}$.

Dann folgt

$$e^{\frac{1}{k_n+1}} < e^{h_n} \le e^{\frac{1}{k_n}}$$

$$e^{\frac{1}{k_n+1}}-1 < e^{h_n}-1 \le e^{\frac{1}{k_n}}-1$$

$$\frac{e^{\frac{1}{k_n+1}}-1}{h_n} < \frac{e^{h_n}-1}{h_n} \le \frac{e^{\frac{1}{k_n}}-1}{h_n}$$

$$\frac{k_n}{k_n+1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{k_n+1}}-1}{\frac{1}{k_n+1}} = \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}}-1}{\frac{1}{k_n}} < \frac{e^{h_n}-1}{h_n} \le \frac{e^{\frac{1}{k_n}}-1}{h_n} < \frac{e^{\frac{1}{k_n}}-1}{\frac{1}{k_n+1}} = \frac{e^{\frac{1}{k_n}}-1}{\frac{1}{k_n}}\cdot\frac{k_n+1}{k_n} =$$

Die linke und die rechte Seite strebt gegen $1\cdot 1 = 1$.

Analog kann man für negative Folgen h_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ argumentieren.

Damit ist nun $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ und die Ableitung der e-Funktion ist wieder die e-Funktion.

$$y(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = e^x$$

Die Umkehrfunktion der e-Funktion ist die **(natürliche) Logarithmusfunktion y = ln(x).** Diese kann man verwenden, um die Ableitung der Exponentialfunktion zu erhalten:

$$y(x) = a^x = e^{\ln(a)\cdot x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = e^{\ln(a)\cdot x}\cdot\ln(a) = a^x\cdot\ln(a)$$

Ableitung der Logarithmusfunktionen $x = \log_a(y)$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y(x) = a^x$ ist die Logarithmusfunktion $x(y) = \log_a(y)$.

Mit Hilfe der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion erhält man:

$$x'(y) = \frac{1}{(a^x)'(\log_a(y))} = \frac{1}{a^{\log_a(y)} \cdot \ln(a)} = \frac{1}{y \cdot \ln(a)}$$

$$\log_a'(y) = \frac{1}{y \cdot \ln(a)}$$

Demzufolge erhält man für die **natürliche Logarithmusfunktion** :

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}$$

Potenz- und Logarithmengesetze

Potenzgesetze

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Logarithmengesetze

$$y_1 = a^{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \log_a(y_1)$$

$$y_2 = a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \log_a(y_2)$$

$$y_1 \cdot y_2 = a^{x_1 + x_2} \quad \Rightarrow \quad \log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \quad \log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$$

$$\frac{y_1}{y_2} = a^{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad \log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow \quad \log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$$

$$y^x = \left(a^{x_1}\right)^x = a^{x_1 \cdot x} \quad \Rightarrow \quad \log_a(y^x) = x_1 \cdot x = \log_a(y) \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \log_a(y^x) = x \cdot \log_a(y)$$

Umrechnung von Logarithmen

$$y = a^{x_1} = b^{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \log_a(y) \qquad x_2 = \log_b(y)$$

$$\Rightarrow \quad \log_b(y) = x_1 \cdot \log_b(a) \qquad \log_a(y) = x_2 \cdot \log_a(b)$$

$$\Rightarrow \quad \log_b(y) = \log_a(y) \cdot \log_b(a) \qquad \log_a(y) = \log_b(y) \cdot \log_a(b)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\log_a(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_b(a)}} \qquad \boxed{\log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)}}$$

Newtonverfahren zur approximativen Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion

Satz:
Sei f : [a:b] -------> IR eine **2-mal stetig differenzierbare** Funktion mit

(i) $f(\bar{x}) = 0$

(ii) $f' > 0$ (f ist streng monoton wachsend)

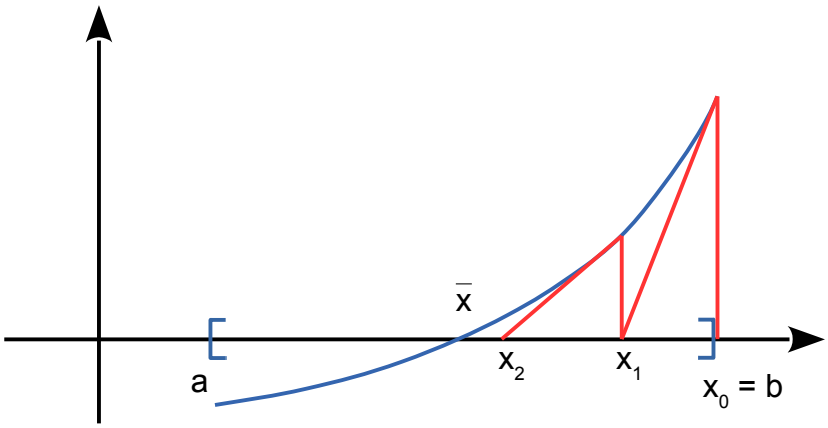
(iii) $f'' \geq 0$ (f ist linksgekrümmt)

Dann gilt:
Die iterative Folge $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert $x_0 \in [a;b]$ und der Bedingung,

dass $x_1 \in [a;b]$ liegt, falls $x_0 = a$ oder b ist, **konvergiert monoton fallend**

gegen die Nullstelle $\bar{x}$.

Beweis:



Das Verfahren beruht darauf, das sukzessive die Nullstellen entsprechender Tangenten an den Graphen der Funktion errechnet werden.

Es sei zum Beispiel $x_0 = b$ der Startwert. Die Gleichung der Tangente t_0 an dieser Stelle ist

t_0 : $\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

t_0 : $y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

Die Nullstelle der Tangen t_0 ist : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Führt man entsprechende Rechnungen für x_1 durch , gelangt man zu der iterativen Folge

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, die gegen die Nullstelle $\bar{x}$ konvergiert, was jetzt gezeigt wird:

Die Iterationsfunktion $i(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ hat folgende Eigenschaften:

$$i'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$i'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \begin{cases} \leq 0 \quad \text{für} \quad x \in [a;\bar{x}] \\ \geq 0 \quad \text{für} \quad x \in [\bar{x};b] \end{cases}$$

Die Funktion i fällt also links von $\bar{x}$ und steigt rechts von $\bar{x}$, das heißt

$i(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} = \bar{x}$ ist das Minimum von i auf [a;b] , und es gilt

$i(x) \geq i(\bar{x}) = \bar{x}$.

Wegen $f(x) \geq 0$ für $x \in [\bar{x};b]$ folgt

$i(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$ für $x \in [\bar{x};b]$.

Das bedeutet aber für die Folge x_n , dass sie monoton fallend ist, denn

$$\bar{x} \leq i(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$$

$\bar{x} \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Da die Folge beschränkt ist hat sie einen Grenzwert $\underline{x}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{x}$. Also folgt

$i(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} i(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \underline{x}$, $\underline{x} - \frac{f(\underline{x})}{f'(\underline{x})} = \underline{x}$ und $f(\underline{x}) = 0$.

Da f monoton ist , muss $\underline{x} = \bar{x}$ sein.

q.e.d.