05
Taylorentwicklung

Arno Fehringer

Entwicklung eines Polynoms um einen Mittelpunkt

Jede Polynomfunktion $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ kann für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ um den **Mittelpunkt x_0** entwickelt werden, das heißt,
das Polynom hat eine eindeutige Darstellung der Form $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i$.

Beweis:
Setze $\eta := x-x_0$, dann folgt $x = x_0+\eta$ und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x_0+\eta)^k$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{k-i} x_0^{k-i} \eta^i$$

$$p(x) = a_0 \binom{0}{0} x_0^0 \eta^0$$

$$+ a_1 \cdot \left(\binom{1}{0} x_0^1 \eta^0 + \binom{1}{1} x_0^0 \eta^1 \right)$$

$$+ a_2 \cdot \left(\binom{2}{0} x_0^2 \eta^0 + \binom{2}{1} x_0^1 \eta^1 + \binom{2}{2} x_0^0 \eta^2 \right)$$

$$+ a_3 \cdot \left(\binom{3}{0} x_0^3 \eta^0 + \binom{3}{1} x_0^2 \eta^1 + \binom{3}{2} x_0^1 \eta^2 + \binom{3}{3} x_0^0 \eta^3 \right)$$

...

$$+ a_n \cdot \left(\binom{n}{0} x_0^n \eta^0 + \binom{n}{1} x_0^{n-1} \eta^1 + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \eta^2 + \binom{n}{3} x_0^{n-3} \eta^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} x_0^0 \eta^n \right)$$

Addition in den Spalten ergibt:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_i \binom{k}{0} x_0^0 \eta^0 + \sum_{k=1}^{n} a_i \binom{k}{1} x_0^{k-1} \eta^1 + \sum_{k=2}^{n} a_i \binom{k}{2} x_0^{k-2} \eta^2 + \sum_{k=3}^{n} a_i \binom{k}{3} x_0^{k-3} \eta^3 + \ldots. + \sum_{k=n}^{n} a_i \binom{k}{n} x_0^{k-n} \eta^n$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \eta^i = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i$$

wobei $b_i = \sum_{k=i}^{n} a_k \binom{k}{i} x_0^{k-i}$ gesetzt wird.

q.e.d.

Ableitungen eines Polynoms

$$p^{0}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^{i-0}$$

$$p^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} i\ b_i (x-x_0)^{i-1}$$

$$p^{(2)}(x) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\ b_i (x-x_0)^{i-2}$$

$$p^{(3)}(x) = \sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2)\ b_i (x-x_0)^{i-3}$$

…

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\ldots(i-(k-1))\ b_i (x-x_0)^{i-k}$$

…

$$p^{(n)}(x) = \sum_{i=n}^{n} i(i-1)(i-2)\ldots(i-(n-1))\ b_i (x-x_0)^{i-n}$$

Ableitungen des Polynoms an der Stelle x_0 .

$$p^{(0)}(x_0) = b_0$$

$$p^{(1)}(x_0) = 1!\ b_1$$

$$p^{(2)}(x_0) = 2!\ b_2$$

$$p^{(3)}(x_0) = 3!\ b_3$$

...

$$p^{(k)}(x_0) = k!\ b_k$$

...

$$p^{(n)}(x_0) = n!\ b_n$$

Für alle i = 1,...,n folgt $b_i = \dfrac{p^{(i)}(x_0)}{i!}$, und das Polynom hat die Darstellung

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}$$

Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome

(Mit Verwendung der Integralrechnung)

Es geht um den Vergleich einer Funktion $f(x)$, die n+1-mal stetig differenzierbar sei, mit einem Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$, das an einer festen Stelle x_0 in allen n Ableitungen mit denen der Funktion übereinstimmt, das heißt ,

$p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ für alle i = 1, … ,n .

Wie gut der Vergleich ist, wird durch das Verhalten der **Restfunktion** oder des **Restgliedes** $R_n(x)$ beschrieben. Insbesonders würde gelten.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

Wir definieren nun zunächst für k = 1, … , n das **das k-te Taylorpolynom** durch

$T_{k\, x_0}(x) := \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ und mit $R_k(x)$ den jeweiligen Rest.

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + R_1(x)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} + R_2(x)$$

...

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + R_{k-1}(x)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k)!}(x-x_0)^{k} + R_k(x)$$

...

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{(1)!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n} + R_n(x)$$

Für die Reste gilt für k = 0 bzw. k = 1, …, n:

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0)$$

$$R_k(x) = R_{k-1}(x) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Nach Folgerung 2 zum **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** gilt:

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f^{(1)}(y)\ dy$$

$$R_1(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(1)}(y)\ dy - f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$R_1(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-y)^0 f^{(1)}(y)\ dy}_{\text{Partielle Integration}} - f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$R_1(x) = -(x-y)^1 f^{(1)}(y)\ \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -(x-y)^1 f^{(2)}(y)\ dy - f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$R_1(x) = -(x-x)^1 f^{(1)}(x) - -(x-x_0)^1 f^{(1)}(x_0) - \int_{x_0}^{x} -(x-y)^1 f^{(2)}(y)\ dy - f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$R_1(x) = (x-x_0)^1 f^{(1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-y)^1 f^{(2)}(y)\ dy - f^{(1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$R_1(x) = \int_{x_0}^{x} (x-y)^1 f^{(2)}(y)\ dy$$

$$R_2(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-y)^1 f^{(2)}(y)\ dy}_{\text{Partielle Integration}} - \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)$$

$$R_2(x) = \frac{-(x-y)^2}{2!} f^{(2)}(y)\ \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-y)^2}{2!} f^{(3)}(y)\ dy - \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$R_2(x) = \frac{-(x-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \frac{-(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-y)^2}{2!} f^{(3)}(y)\ dy - \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$R_2(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^2}{2!} f^{(3)}(y)\ dy - \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$R_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^2}{2!} f^{(3)}(y)\ dy$$

So fortfahrend, erhält man schließlich die **Integraldarstellung des Restgliedes**:

$$\boxed{R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\; dy} \quad ,$$

und es ist

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\; dy} \quad .$$

Abschätzung des Restgliedes R_n

Zur Abschätzung des Restgliedes benötigt man eine

Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

Seien $f, \varphi : [a;b] \text{-------->} IR$ stetig , $\varphi \geq 0$ (oder $\varphi \leq 0$) und m, M Minimum und Maximum von f. Dann gilt :

$$m\int_a^b \varphi(x)\ dx \leq \int_a^b \varphi(x)f(x)\ dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\ dx$$

$$m \leq \frac{\int_a^b \varphi(x)f(x)\ dx}{\int_a^b \varphi(x)\ dx} \leq M$$

Nach dem **Zwischenwertsatz** gibt es ein $\xi \in [a;b]$ mit

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)f(x)\ dx}{\int_a^b \varphi(x)\ dx} = f(\xi)$$

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)f(x)\ dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\ dx} \ .$$

Diesen Satz wendet man jetzt auf das Restglied $R_n(x)$ an:

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\ dy$$

Wegen $x_0 \leq y \leq x$ ist $x-y \geq 0$ und somit auch $\varphi(x) := \frac{(x-y)^n}{n!} \geq 0$. Es gibt ein $\xi \in [x_0;x]$ mit

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\ dy = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b \frac{(x-y)^n}{n!}\ dx$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b \frac{(x-y)^n}{n!} \, dx$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \left(\frac{-(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Big|_{x_0}^{x} \right)$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \left(\frac{-(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Dieses ist die **Lagrange- Darstellung des Restgliedes**

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}} \quad .$$

Das Restglied $R_n(x)$ **approximiert** die Funktion $f(x)$ **von höherer als n-ter Ordnung** :

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} \qquad \text{mit} \qquad \xi \in [x_0;x]$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0 \; .$$

Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome
(Ohne Verwendung der Integralrechnung)

Es geht um den Vergleich einer Funktion $f : (a;b) \longrightarrow IR$, die n+1-mal stetig differenzierbar sei, mit einem Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$, das an einer festen Stelle x_0 in allen n Ableitungen mit denen der Funktion übereinstimmt, das heißt ,

$p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ für alle i = 1, … ,n .

Wie gut der Vergleich ist, wird durch das Verhalten der **Restfunktion** oder des **Restgliedes** $R_n(x)$ beschrieben. Insbesonders würde gelten.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-x_0)^i + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

Das Polynom $\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ heißt das **das n-te Taylorpolynom** von f mit **Entwicklungspunkt** x_0 .

Es ist $R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$.

Für die k-te Ableitung , $k \in \{0;...;n\}$, gilt:

$R_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{i=k}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-k)!}(x-x_0)^{i-k}$ und $R_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0) = 0$.

Außerdem ist $R_n^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0) - 0 = f^{(n+1)}(x_0)$.

Auf die Funktion $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ kann man den **2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung** anwenden:

Es gibt ein $\xi_1 = x_0 + t_1(x-x_0)$ mit $0 < t_1 < 1$, so dass gilt:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(1)}(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \quad .$$

Wiederholte Anwendung des **2. Mittelwertsatzes** ergibt :

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R_n^{(1)}(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \\ &= \frac{R_n^{(2)}(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} \\ &= \ldots\ldots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} \quad , \text{ wobei } \quad \xi_n = x_0+t_n(x-x_0) \text{ mit } 0 < t_n < 1 \text{ ist.}\end{aligned}$$

Die letzte Anwendung des **2. Mittelwertsatzes** liefert :

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f_n^{(n+1)}(\xi)-0}{(n+1)!} = \frac{f_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \text{ mit } \xi=x_0+t(x-x_0) \quad , \quad 0 < t < 1 \quad .$$

Daraus folgt :

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} \quad \text{mit } \xi=x_0+t(x-x_0) \text{ und } \quad 0 < t < 1 \quad .$$

Dies ist die **Lagrange-Darstellung des Restglieds** .

Die Funktion f lässt sich also folgendermaßen darstellen :

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

mit $\xi=x_0+t(x-x_0)$ und $0 < t < 1$.

q.e.d.

Approximation einer Funktion durch die Taylorreihe

Definition:
Die Funktion f(x) sei ∞ -mal differenzierbar. Dann definiert man die **Taylorreihe** von f mit **Entwicklungspunkt** x_0 durch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \quad .$$

Nach dem **Satz vom Konvergenzradius** gibt es ein $\rho \in [0;\infty]$, so dass die Reihe für $|x-x_0| < \rho$ absolut konvergiert, für $|x-x_0| > \rho$ dagegen divergiert.

Die Funktion $f : (a;b)$ ------> IR heißt **analytisch**, wenn es zu jedem $x_0 \in (a;b)$ eine Umgebung $U_\delta(x_0) \in (a;b)$ gibt, auf der f als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar ist : $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$.

Satz:

Für die Funktion $f : U_\delta(x_0) = (x_0-\delta; x_0+\delta)$ ------> IR sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist auf $U_\delta(x_0)$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar,
$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$.

(2) f ist auf $U_\delta(x_0)$ ∞ -mal differenzierbar und für alle $x \in U_\delta(x_0)$ konvergiert das n-te Restglied $R_n(x)$ der Taylorentwicklung gegen Null für $n \rightarrow \infty$.

Die darstellende Potenzreihe ist **notwendigerweise die Taylorreihe** .

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ auf $U_\delta(x_0) = (x_0-\delta; x_0+\delta)$, ihr Konvergenzradius mindestens $\delta > 0$.

Wegen der **Vertauschbarkeit von Grenzprozessen** im Zusammenhang mit der Ableitung von Potenzreihen, kann man gliedweise , also ist $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ a_i(x-x_0)^{i-1}$, und diese Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius $\delta > 0$.

Wendet man die entsprechende Überlegung auf Ableitungsfunktion

$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ a_i (x-x_0)^{i-1}$ bzw. auf die gewonnenen Ableitungsfunktionen höherer Ordnung $f^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$ an, folgt dass f ∞ -mal differenzierbar ist.

Man erhält dann $f^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{\infty} k!\ a_i (x-x_0)^{i-k}$ und $f^{(k)}(x_0) = k!\ a_k$, also $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Folglich ist die Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0 .

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i \right| < \epsilon$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \right| < \epsilon$$

$$\left| R_n(x) \right| < \epsilon \ .$$

Das n-te Restglied der Taylorentwicklung strebt also gegen Null für $n \to \infty$.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1)

Sind umgekehrt die Voraussetzungen von (2) erfüllt, gilt:

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \right| = \left| R_n(x) \right| \quad \text{, das heißt} \quad \lim_{n \to -\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i = f(x) \ ,$$

bzw. $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$.

q.e.d.