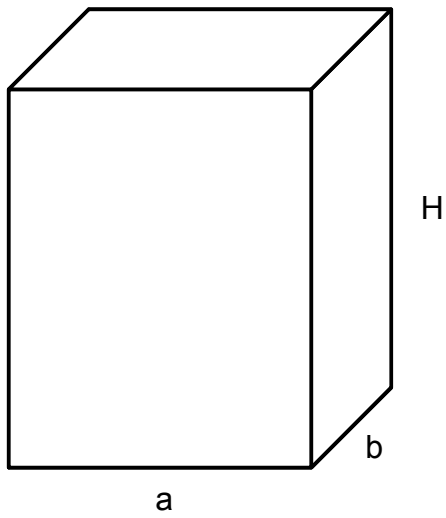


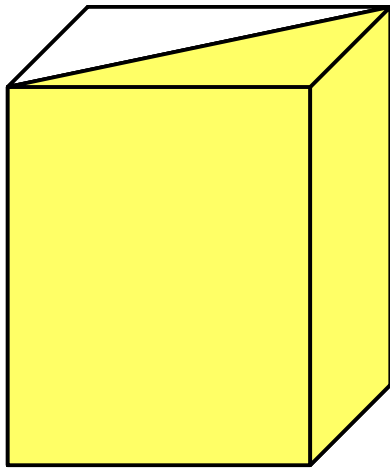
Volumen und Oberflächen

Oktober 2015

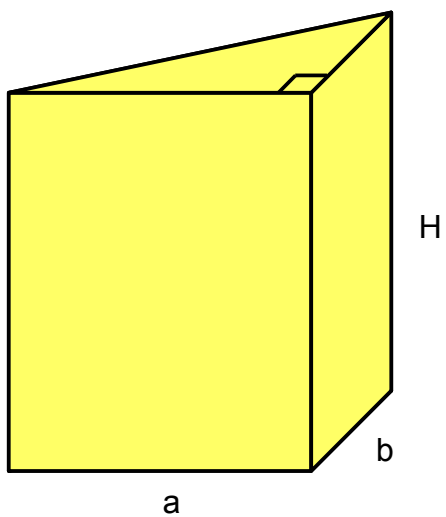
Quader



$$V = a \cdot b \cdot H$$

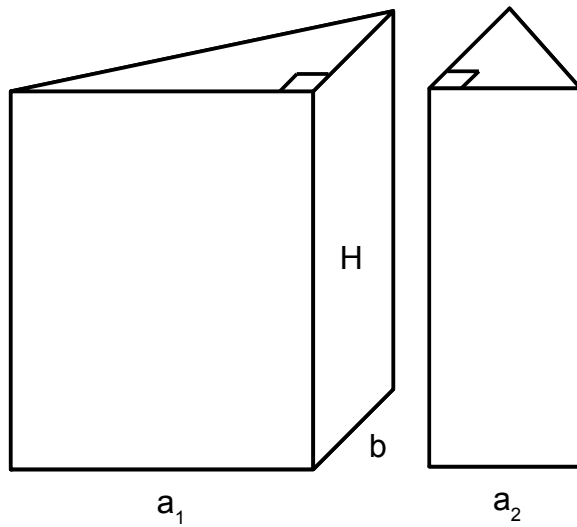


3-seitiges rechtwinkliges Prisma (gr. - lat. = das Zersägte; dreiseitige Säule)



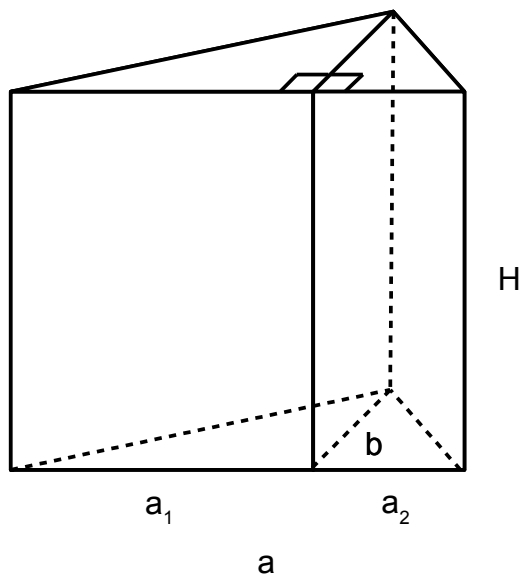
$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2}$$

(Allgemeines) 3-seitiges Prisma



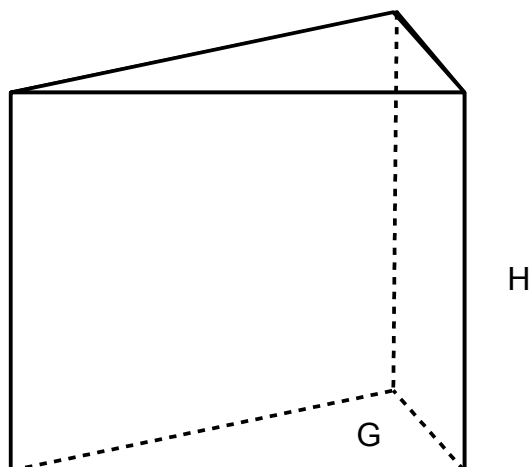
$$V = \frac{a_1 \cdot b \cdot H}{2} + \frac{a_2 \cdot b \cdot H}{2}$$

$$V = \frac{a_1 \cdot b \cdot H + a_2 \cdot b \cdot H}{2}$$



$$V = \frac{(a_1 + a_2) \cdot b \cdot H}{2}$$

$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2}$$



$$V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot H$$

$$V = G \cdot H$$

Definition: 3-seitiges Prisma :

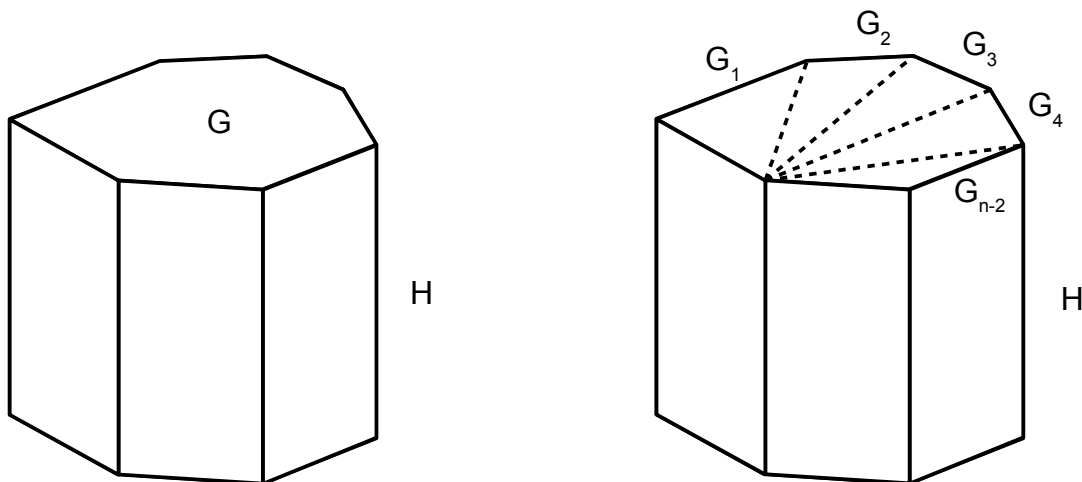
Ein **3-seitiges Prisma** hat **2 kongruente, parallele Dreiecke** (Grundfläche und Deckfläche, **G**). Der **Mantel M** besteht aus **3 Rechtecken**.

Die **Oberfläche** ist die Summe der Flächeninhalte aus Grund- und Deckfläche und dem Mantel :

$$O = 2 G + M$$

Definition: n-seitiges Prisma :

Ein **n-seitiges Prisma** hat **2 kongruente, parallele n-Dreiecke** (Grundfläche und Deckfläche, **G**). Der **Mantel M** besteht aus **n Rechtecken**.



$$V = G_1 H + G_2 H + \dots + G_{n-2} H$$

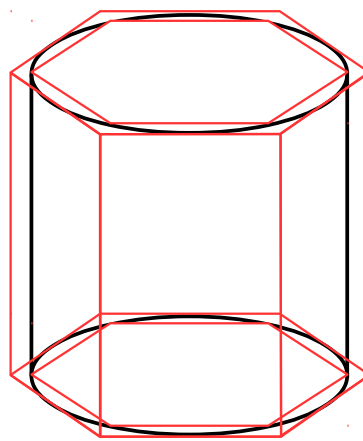
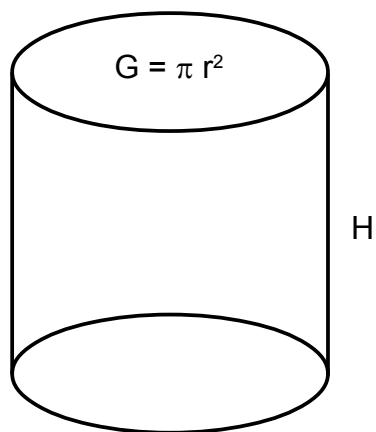
$$V = (G_1 + G_2 + \dots + G_{n-2}) H$$

$$V = G H$$

Die **Oberfläche** ist die Summe der Flächeninhalte aus Grund- und Deckfläche und den **n** Rechteckflächen des Mantels :

$$O = 2 G + M$$

Zylinder (gr. κυλινδριν = wälzen, rollen)



Volumen

Approximation

$$A_m H < V < A_m' H$$

Grenzwertbildung

$$A_{K;r} H \leq V \leq A_{K;r} H$$

$$\pi r^2 H \leq V \leq \pi r^2 H$$

$$V = \pi r^2 H$$

Mantel

Approximation

$$U_m H < V < U_m' H$$

Grenzwertbildung

$$U_{K;r} H \leq V \leq U_{K;r} H$$

$$2\pi r H \leq V \leq 2\pi r H$$

$$M = 2\pi r H$$

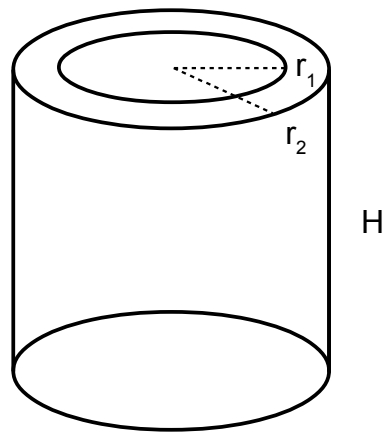
Oberfläche

$$O = 2 G + M$$

$$O = 2 \pi r^2 H + 2\pi r H$$

$$O = 2\pi r (r + H)$$

Rohr



Volumen

$$V = \pi r_2^2 H + \pi r_1^2 H$$

$$V = \pi (r_2^2 - r_1^2) H$$

Mantel

$$M = 2\pi r_2 H + 2\pi r_1 H$$

$$M = 2\pi (r_2 + r_1) H$$

Oberfläche

$$O = 2G + M$$

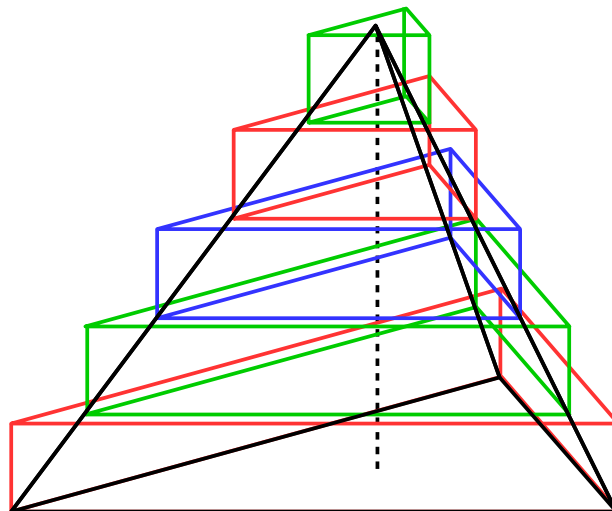
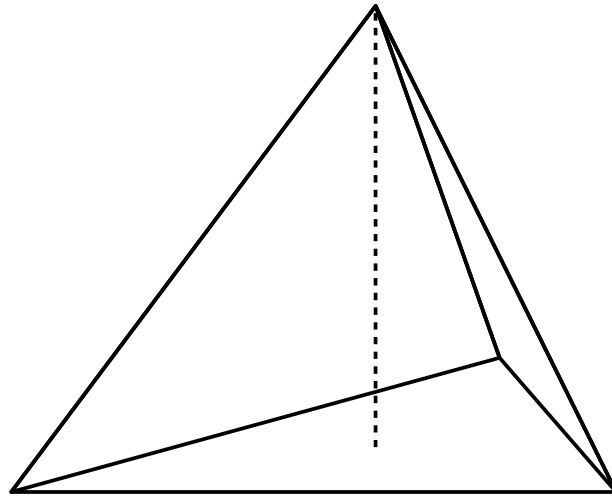
$$O = 2\pi (r_2^2 - r_1^2) H + 2\pi (r_2 + r_1) H$$

$$O = 2\pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) H + 2\pi (r_2 + r_1) H$$

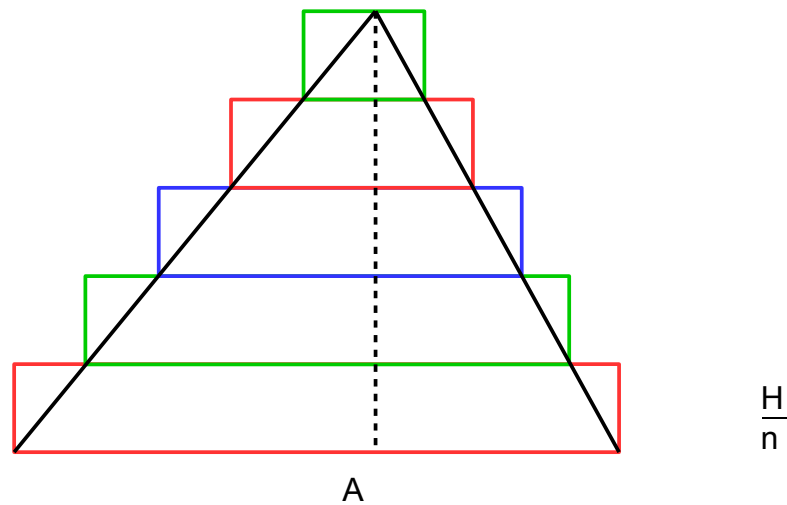
$$O = 2\pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1 + 1) H$$

$$O = 2\pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1 + 1) H$$

Pyramide (ägypt. - gr. - lat.)



Approximation des Volumens durch n 3-seitige Prismen der Höhe $\frac{H}{n}$ von außen :



$$V_n' = \sum_{i=1}^n V_i, \quad n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$V_n' = \sum_{i=1}^n A_i \frac{H}{n}$$

Aufgrund der **Strahlensätze** erhält man die Formel für die Grundflächen der Prismen zu

$$A_i = A \left(\frac{i}{n} \right)^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{Durch Einsetzen folgt :}$$

$$V_n' = \sum_{i=1}^n A \left(\frac{i}{n} \right)^2 \frac{H}{n}$$

$$V_n' = A \frac{H}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Mit $\boxed{\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$ folgt :

$$V_n' = A \frac{H}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$V_n' = A \frac{H}{n^3} \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right)$$

$$V_n' = A H \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right).$$

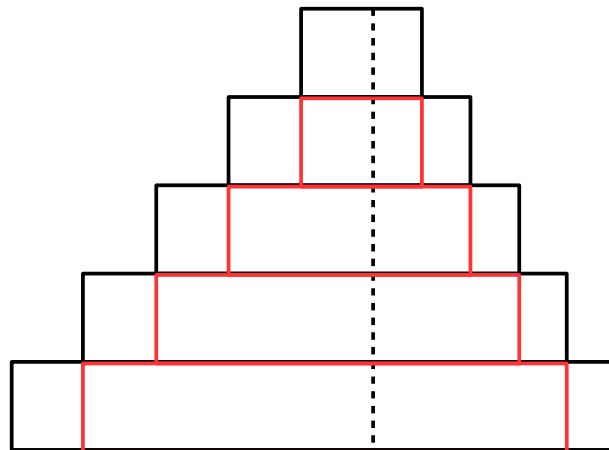
$$V' = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n'$$

$$V' = \lim_{n \rightarrow \infty} A H \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

$$V' = A H \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$V' = \frac{1}{3} A H$$

Approximation durch $n-1$ 3-seitige Prismen der Höhe $\frac{H}{n}$ von innen :



$$V_n = V_n' - A \frac{H}{n}, \quad n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_n' - A \frac{H}{n} \right)$$

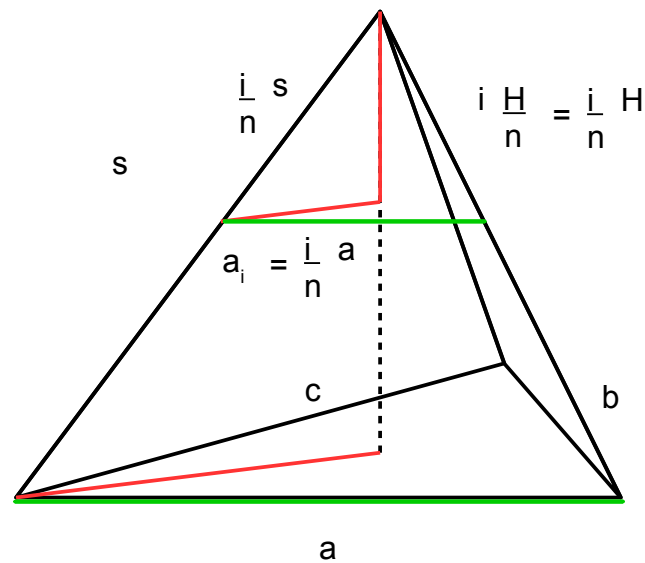
$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V_n'$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{3} A H$$

Da die Grenzwerte der Volumen durch Approximation von außen und innen übereinstimmen, und weil $V_n < V < V_n'$ ist, ist das **Volumen der Pyramide** gegeben durch :

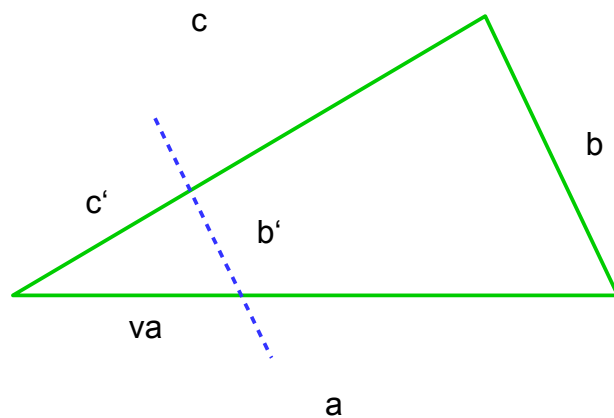
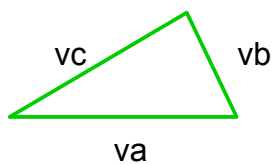
$$V = \frac{1}{3} A H$$

Strahlensätze an der Pyramide



Für die Seiten des Grunddreiecks des i -ten Prismas gilt :

$$a_i = v a \quad , \quad b_i = v b \quad , \quad c_i = v c \quad , \quad \text{mit} \quad v = \frac{i}{n} \quad .$$



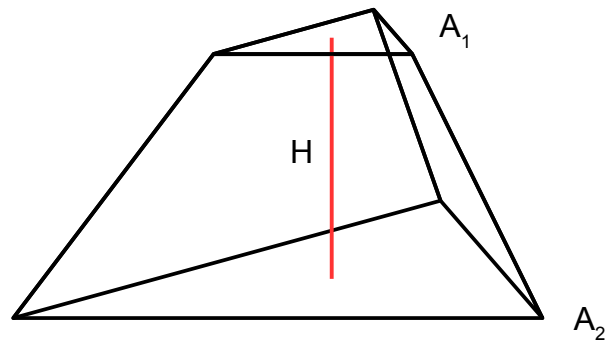
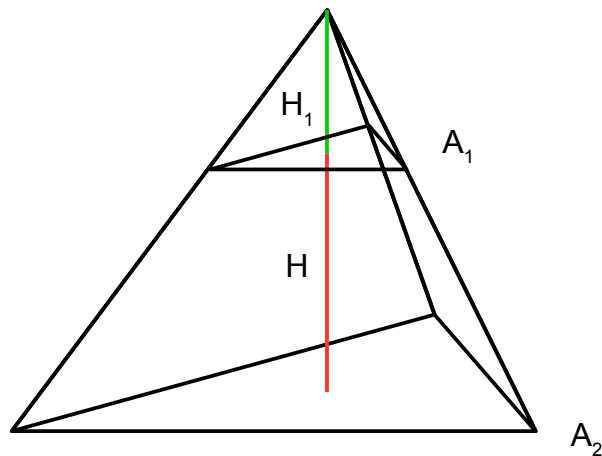
Wegen $b' = v b$, $c' = v c$ sind $\Delta (va \ vb \ vc)$ und $\Delta (va \ b' \ c')$ kongruent und stimmen deshalb in allen Winkeln überein.

Die Höhen der Dreiecke sind dann $v h$ bzw. h .

Die Flächeninhalte sind $A_i = \frac{1}{2} va \ v h = \frac{1}{2} a \ h \ v^2$ bzw. $A = \frac{1}{2} a \ h$, das heißt

$$A_i = A \ v^2 = A \left(\frac{i}{n} \right)^2 \quad .$$

Pyramidenstumpf



$$V = \frac{1}{3} A_2 (H + H_1) - \frac{1}{3} A_1 H_1$$

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} A_2 H_1 - \frac{1}{3} A_1 H_1$$

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} (A_2 - A_1) H_1$$

Aufgrund der **Strahlensätze** gilt :

$$v = \frac{H_1 + H}{H_1} \quad , \quad v^2 = \frac{A_2}{A_1} \quad , \quad \text{also} \quad v = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}} \quad ,$$

$$\frac{H_1 + H}{H_1} = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}}$$

$$1 + \frac{H}{H_1} = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}}$$

$$\frac{H}{H_1} = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}} - 1$$

$$\frac{H}{H_1} = \frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1}}$$

$$\frac{H_1}{H} = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}$$

$$H_1 = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}} H$$

Dieses Ergebnis $H_1 = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}} H$ setzt man in die Volumengleichung

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} (A_2 - A_1) H_1 \text{ und erhält :}$$

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} (A_2 - A_1) \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}} H$$

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} (\sqrt{A_2} + \sqrt{A_1})(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}) \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}} H$$

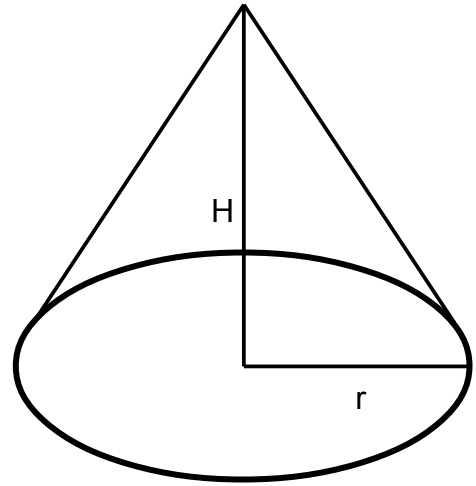
$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} (\sqrt{A_2} + \sqrt{A_1}) \sqrt{A_1} H$$

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} \sqrt{A_2} \sqrt{A_1} H + \frac{1}{3} A_1 H$$

$$V = \frac{1}{3} A_2 H + \frac{1}{3} \sqrt{A_2 A_1} H + \frac{1}{3} A_1 H$$

$$V = \frac{1}{3} (A_2 + \sqrt{A_2 A_1} + A_1) H$$

Kegel , Volumen



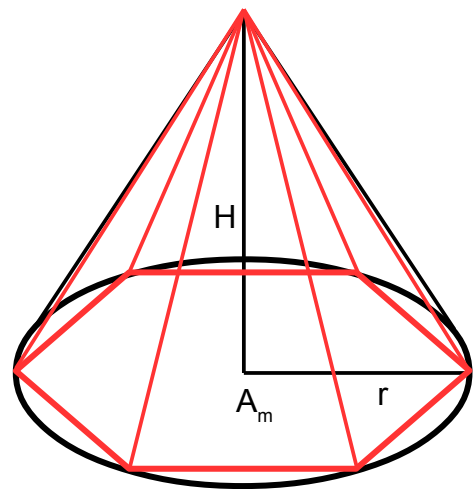
Approximation von innen :

$$V_m = \frac{1}{3} A_m H \quad \text{mit} \quad m = 2^k n, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$V := \lim_{m \rightarrow \infty} V_m$$

$$V = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3} A_m H$$

$$V = \frac{1}{3} A_{K;r} H$$



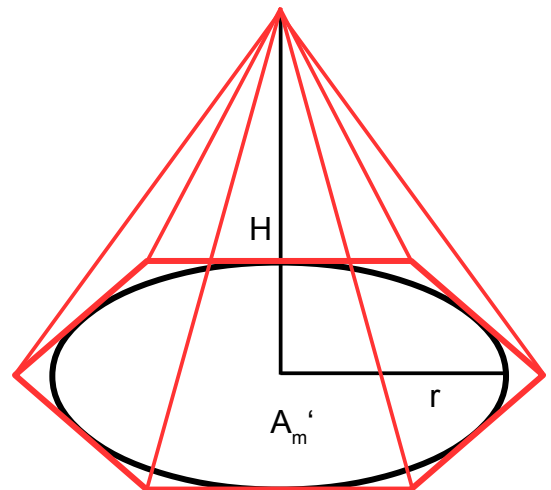
Approximation von außen:

$$V'_m = \frac{1}{3} A'_m H \quad \text{mit} \quad m = 2^k n, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$V' := \lim_{m \rightarrow \infty} V'_m$$

$$V' = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3} A'_m H$$

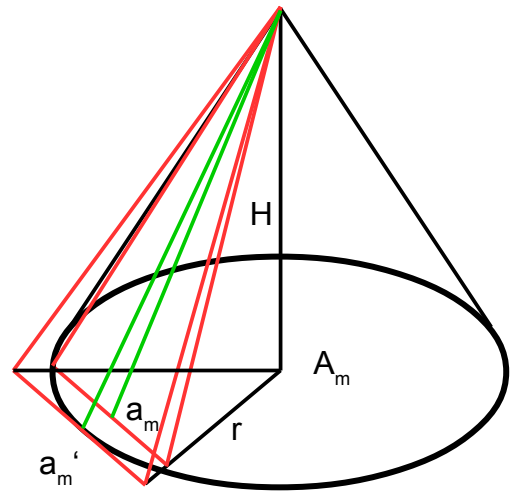
$$V' = \frac{1}{3} A_{K;r} H$$



Da die Grenzwerte übereinstimmen, folgt für das **Volumen des Kegels** :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

Kegel , Mantel



Approximation von außen :

$$M_m' = m \frac{1}{2} a_m' s$$

$$M_m' = \frac{1}{2} U_m' s$$

$$M' := \lim_{m \rightarrow \infty} M_m'$$

$$M' = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} U_m' s$$

$$M' = \frac{1}{2} U_{K;r} s$$

$$M' = \frac{1}{2} 2\pi r s$$

$$M' = \pi r s$$

Approximation von innen :

$$M_m = m \frac{1}{2} a_m s_m$$

$$M_m = \frac{1}{2} U_m s_m$$

Wegen der **Dreiecksungleichung** gilt :

$$s < s_m + r - h_m$$

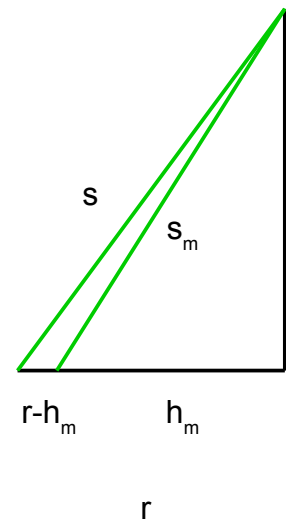
$$s - (r - h_m) < s_m$$

und

$$s_m < s + (r - h_m) ,$$

also

$$s - (r - h_m) < s_m < s + (r - h_m) .$$



Da $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = r$ folgt $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s$ und

weiter

$$M_m = \frac{1}{2} U_m s_m$$

$$M := \lim_{m \rightarrow \infty} M_m$$

$$M = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} U_m s_m$$

$$M = \frac{1}{2} U_{K;r} s$$

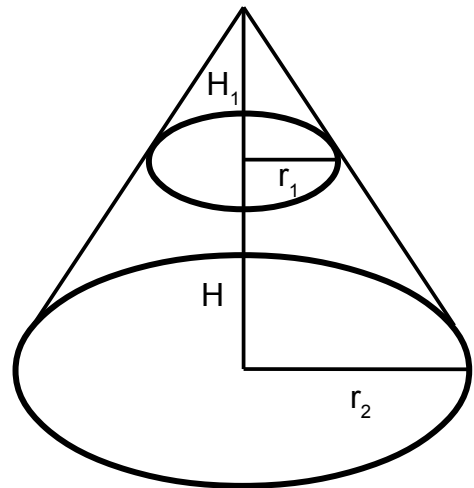
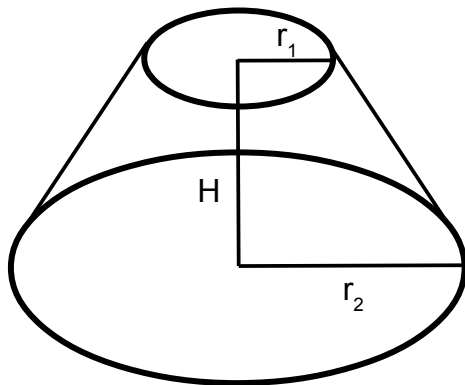
$$M = \frac{1}{2} 2\pi r s$$

$$M = \pi r s .$$

Da die Grenzwerte der äußeren und inneren Approximation übereinstimmen, erhält man für den **Kegelmantel** :

$$M = \pi r s$$

Kegelstumpf , Volumen



$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 (H + H_1) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 H_1$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi r_2^2 H_1 - \frac{1}{3} \pi r_1^2 H_1$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi (r_2^2 - r_1^2) H_1$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) H_1$$

Wegen der **Strahlensätze** gilt .

$$\frac{H_1 + H}{H_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$1 + \frac{H}{H_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{H}{H_1} = \frac{r_2}{r_1} - 1$$

$$\frac{H}{H_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_1}$$

$$\frac{H_1}{H} = \frac{r_1}{r_2 - r_1}$$

$$H_1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1} H$$

Und weiter :

$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) H$$

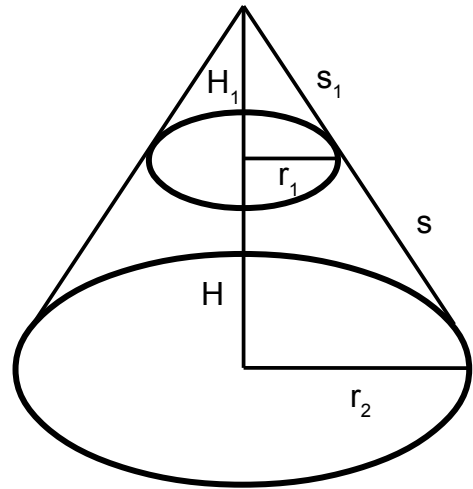
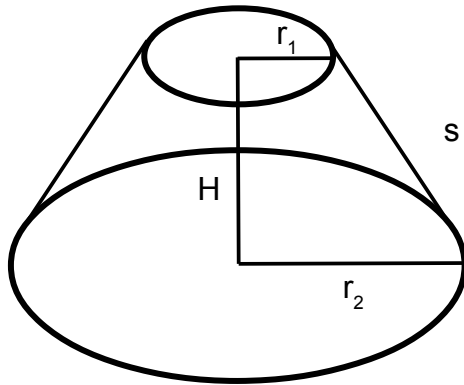
$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \frac{r_1}{r_2 - r_1} H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi (r_2 + r_1) r_1 H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H + \frac{1}{3} \pi r_2 r_1 H + \frac{1}{3} \pi r_1^2 H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2) H$$

Kegelstumpf , Mantel



$$M = \pi r_2 (s + s_1) - \pi r_1 s_1$$

$$M = \pi r_2 s + \pi r_2 s_1 - \pi r_1 s_1$$

$$M = \pi r_2 s + \pi (r_2 - r_1) s_1$$

Wegen der **Strahlensätze** gilt :

$$\frac{s_1 + s}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

und nach Umformung

$$s_1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1} s$$

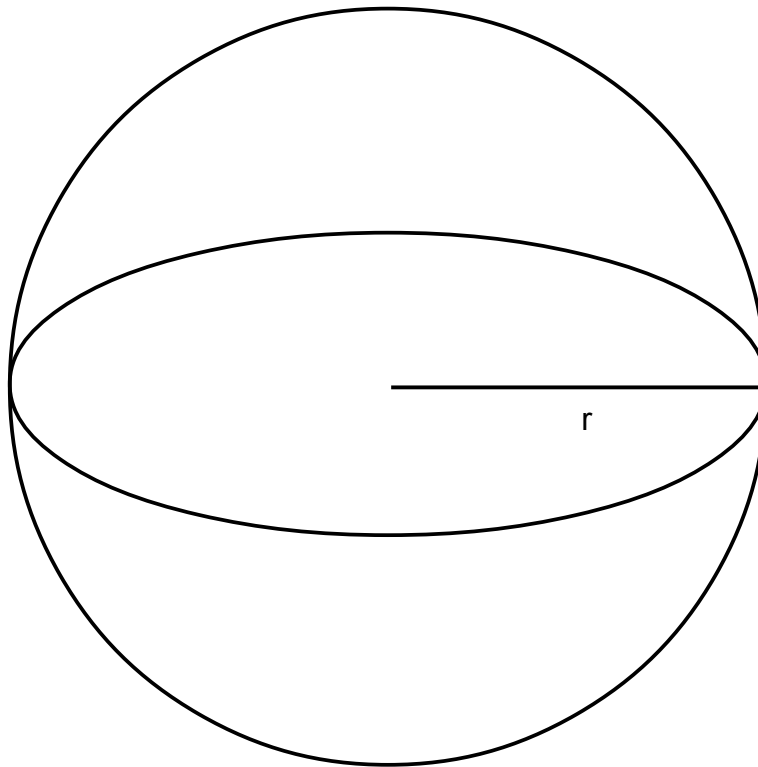
Und weiter :

$$M = \pi r_2 s + \pi (r_2 - r_1) \frac{r_1}{r_2 - r_1} s$$

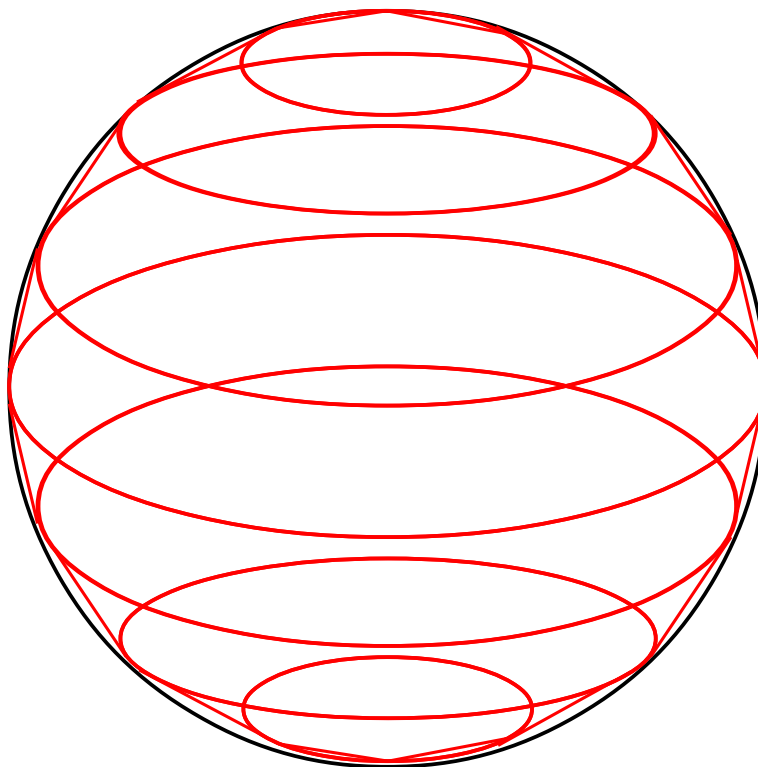
$$M = \pi r_2 s + \pi r_1 s$$

$$M = \pi (r_2 + r_1) s$$

Kugel, Oberfläche

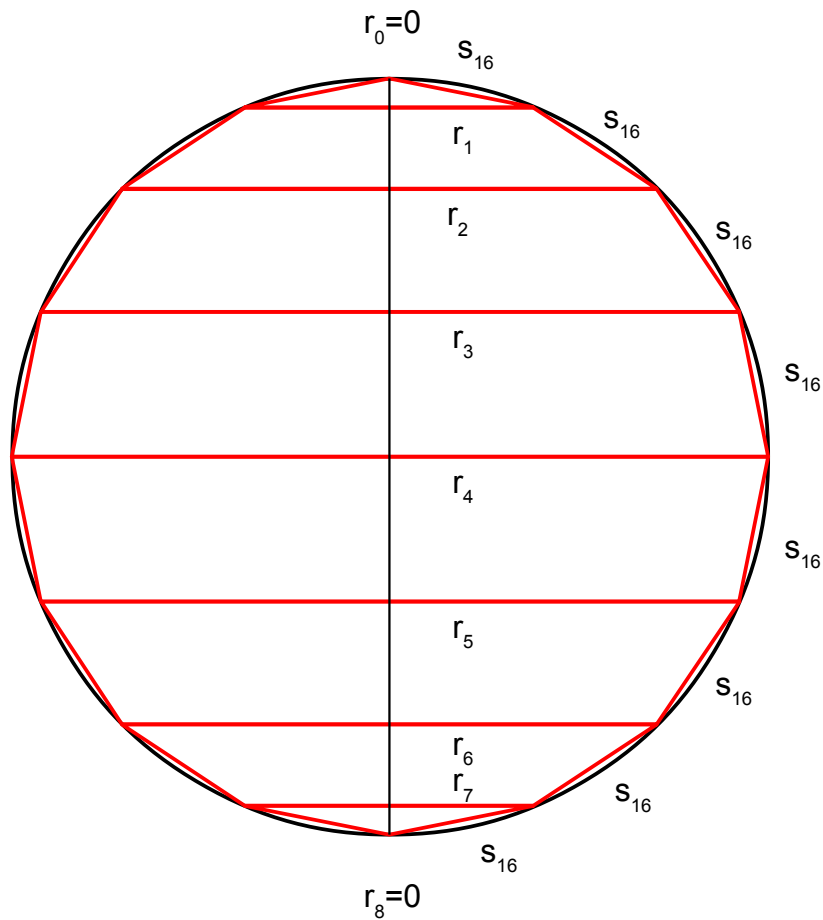


Approximation durch Kegelstümpfe gleicher Mantellinie von innen :



Approximation durch Kegelstümpfe von innen :

$$s_m = s_{16} = s_{2^2 \cdot 4} = s_{2^k 4}$$



$$r_i \text{ mit } i \in \{0, \dots, \frac{m}{2}\} \quad , \quad r_0 = 0 \quad , \quad r_{\frac{m}{2}} = 0$$

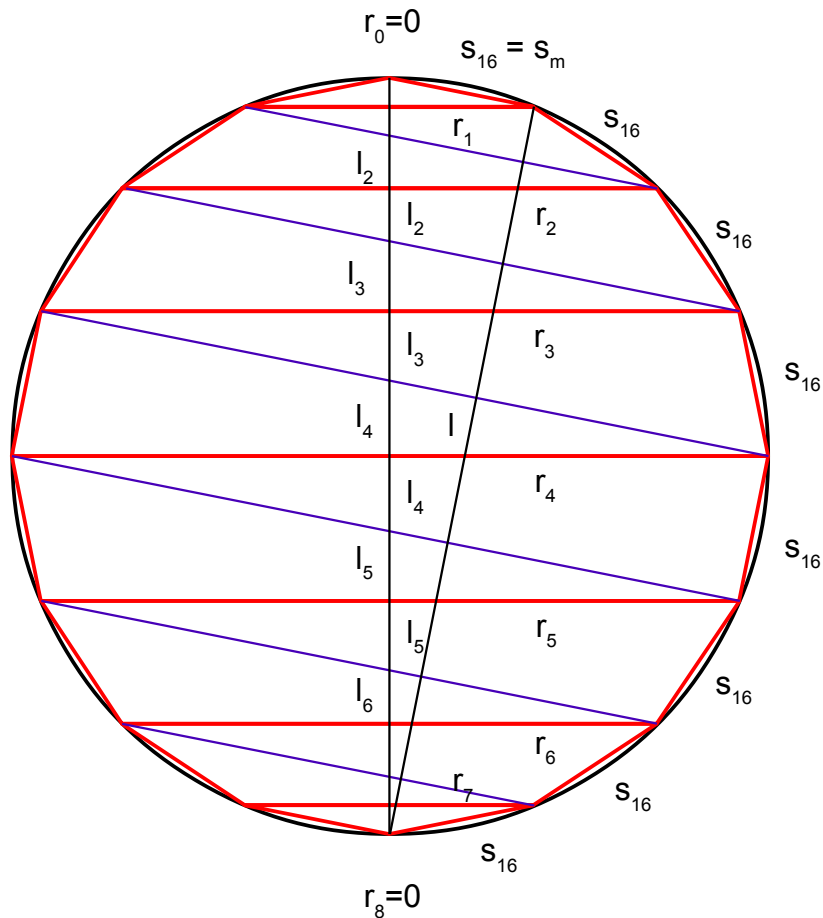
$$M_m = \pi (r_0 + r_1) s_m + \pi (r_1 + r_2) s_m + \dots + \pi \left(r_{\frac{m}{2}-2} + r_{\frac{m}{2}-1} \right) s_m + \pi \left(r_{\frac{m}{2}-1} + r_{\frac{m}{2}} \right) s_m$$

$$M_m = \pi \left(r_0 + r_1 + r_1 + r_2 + \dots + r_{\frac{m}{2}-2} + r_{\frac{m}{2}-1} + r_{\frac{m}{2}-1} + r_{\frac{m}{2}} \right) s_m$$

$$M_m = \pi \left(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1} \right) s_m$$

Man kann nun den Term $\left(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1} \right)$ einfacher ausdrücken :

Das Schnittbild der Zerlegung wird durch folgende Linien ergänzt :



Dadurch entsteht aufgrund des **Umfangswinkelsatzes** eine Folge von **kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken**

und insbesondere auch eine Folge von **rechtwinkligen, kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken** mit den **Katheten** r_i , l_i mit $i \in \left\{ 1 , \dots , \frac{m}{2}-1 \right\}$.

Das letzte Dreieck ist nach nach dem **Satz von Thales** rechtwinklig und hat die **Katheten** l , s_m .

Es gelten die Verhältnisgleichungen :

$$\frac{r_1}{l_1} = \frac{r_2}{l_2} = \frac{r_3}{l_3} = \frac{r_4}{l_4} = \dots = \frac{r_{\frac{m}{2}-1}}{l_{\frac{m}{2}-1}} = \frac{l}{s_m} .$$

Die Umformung ergibt folgende Produktgleichungen :

$$r_1 s_m = l_1$$

$$r_2 s_m = l_2$$

$$r_3 s_m = l_3$$

·
·
·

$$r_{\frac{m}{2}-1} s_m = l_{\frac{m}{2}-1}$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt :

$$\left(r_1 + r_2 + \dots + r_{\frac{m}{2}-1} \right) s_m = l \left(l_1 + l_2 + \dots + l_{\frac{m}{2}-1} \right)$$

$$\left(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1} \right) s_m = l \left(2 l_1 + 2 l_2 + \dots + 2 l_{\frac{m}{2}-1} \right)$$

Die Summe der doppelten Katheten $2 l_1 + 2 l_2 + \dots + 2 l_{\frac{m}{2}-1}$ ist gleich $2 r$:

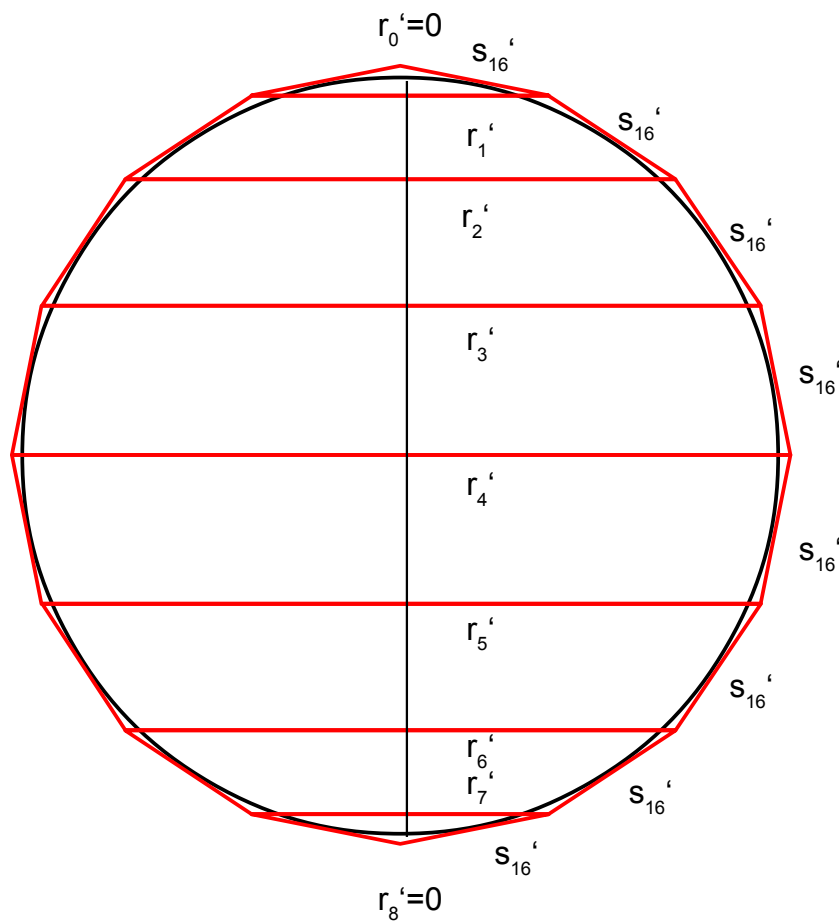
$$\left(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1} \right) s_m = l \cdot 2 r$$

Für den **Mantel der von innen approximierenden Kegelstümpfe** ergibt sich :

$$M_m = \pi \left(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1} \right) s_m = \pi l \cdot 2r$$

Approximation durch Kegelstümpfe gleicher Mantellinie von außen :

$$s_m' = s_{16}' = s_{2^2.4} = s_{2^k.4}'$$

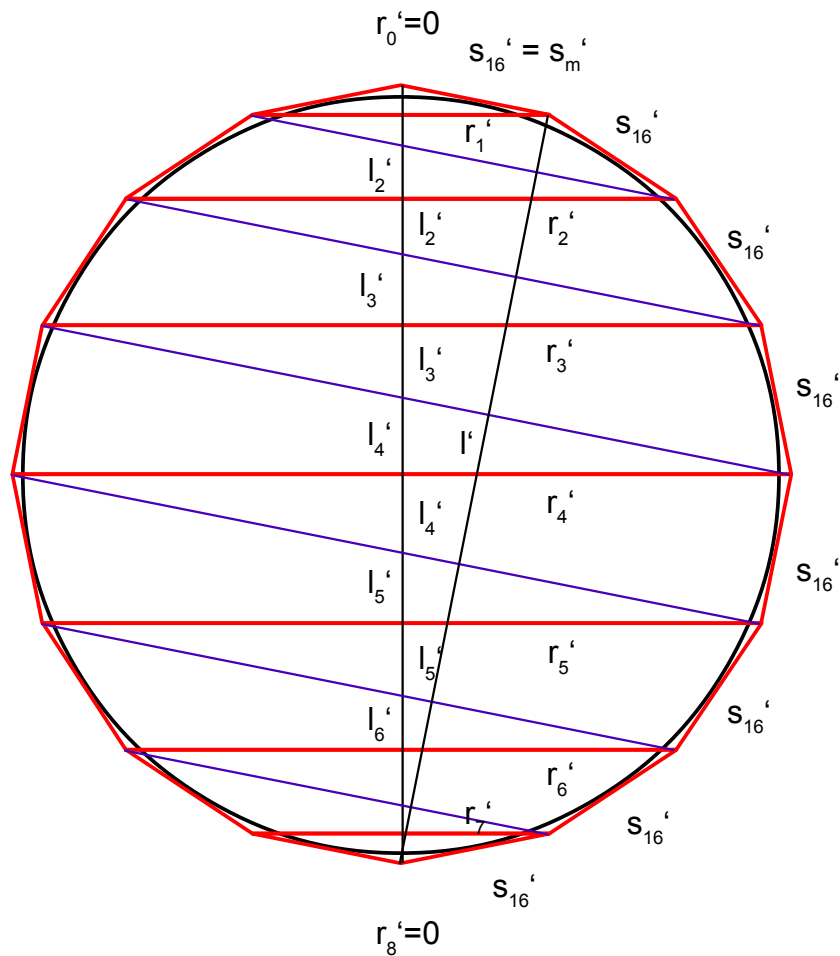


$$r_i' \text{ mit } i \in \{0, \dots, \frac{m}{2}\} \quad , \quad r_0' = 0 \quad , \quad r_{\frac{m}{2}}' = 0$$

Man erhält für die Mantelfläche der von außen approximierenden Kegelstümpfe analog folgende Formel :

$$M_m' = \pi \left(2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1}' \right) s_m'$$

Das Schnittbild der Zerlegung wird durch folgende Linien ergänzt :



Außerdem denkt man sich die Strecken s'_m als Sehnen in einem Kreis mit dem Radius $r' > r$.

Dadurch entsteht aufgrund des **Umfangswinkelsatzes** eine Folge von **kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken**

und insbesondere auch eine Folge von **rechtwinkligen, kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken** mit den **Katheten** r'_i , l'_i mit $i \in \left\{ 1, \dots, \frac{m}{2}-1 \right\}$.

Das letzte Dreieck ist nach nach dem **Satz von Thales** rechtwinklig und hat die **Katheten** l' , s'_m .

Es gelten die Verhältnisgleichungen :

$$\frac{r'_1}{l'_1} = \frac{r'_2}{l'_2} = \frac{r'_3}{l'_3} = \frac{r'_4}{l'_4} = \dots = \frac{r'_{\frac{m}{2}-1}}{l'_{\frac{m}{2}-1}} = \frac{l'}{s'_m}.$$

Die Umformung ergibt folgende Produktgleichungen :

$$r_1' \cdot s_m' = l' \cdot l_1'$$

.

.

.

$$r_{\frac{m}{2}-1}' \cdot s_m' = l' \cdot l_{\frac{m}{2}-1}'$$

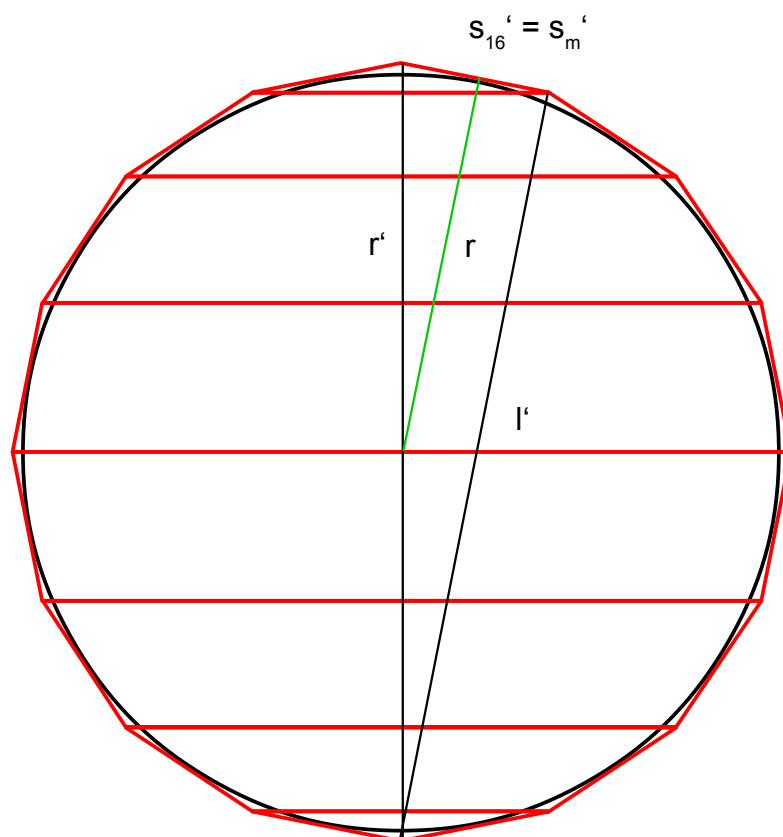
Die Addition dieser Gleichungen ergibt :

$$\left(r_1' + r_2' + \dots + r_{\frac{m}{2}-1}' \right) s_m' = l' \left(l_1' + l_2' + \dots + l_{\frac{m}{2}-1}' \right)$$

$$\left(2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1}' \right) s_m' = l' \left(2 l_1' + 2 l_2' + \dots + 2 l_{\frac{m}{2}-1}' \right) .$$

Die Summe der doppelten Katheten $2 l_1' + 2 l_2' + \dots + 2 l_{\frac{m}{2}-1}'$ ist gleich $2 r'$, und es folgt :

$$\left(2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1}' \right) s_m' = l' \cdot 2 r' .$$



Wegen der **Strahlensätze** folgt:

$$\frac{l'}{r} = \frac{2r'}{r'}$$

$$l' = 2r \quad ,$$

$$\left(2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1}' \right) s_m' = l' \cdot 2 r' = 2 r \cdot 2 r'$$

Für den **Mantel der von außen approximierenden Kegelstümpfe** ergibt sich :

$$M_m' = \pi \left(2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{\frac{m}{2}-1}' \right) s_m' = \pi l' \cdot 2 r' = \pi \cdot 2 r \cdot 2 r'$$

Wir haben bis jetzt folgendes Ergebnis für die Approximation der Kugeloberfläche O :

$$M_m < O < M_m'$$

$$\pi \cdot l \cdot 2 r = M_m < O < M_m' = \pi \cdot 2 r \cdot 2 r'$$

Wegen der **Dreiecksungleichung** gilt :

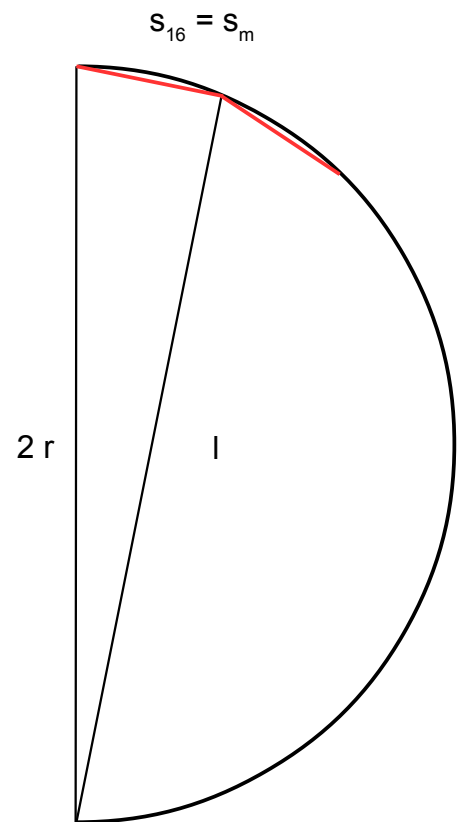
$$l < 2r + s_m$$

$$2r < l + s_m$$

$$2r - s_m < l, \text{ also}$$

$$2r - s_m < l < 2r + s_m .$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 0$ ist $\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} l = 2r}$.



Wegen der **Dreiecksungleichung** gilt :

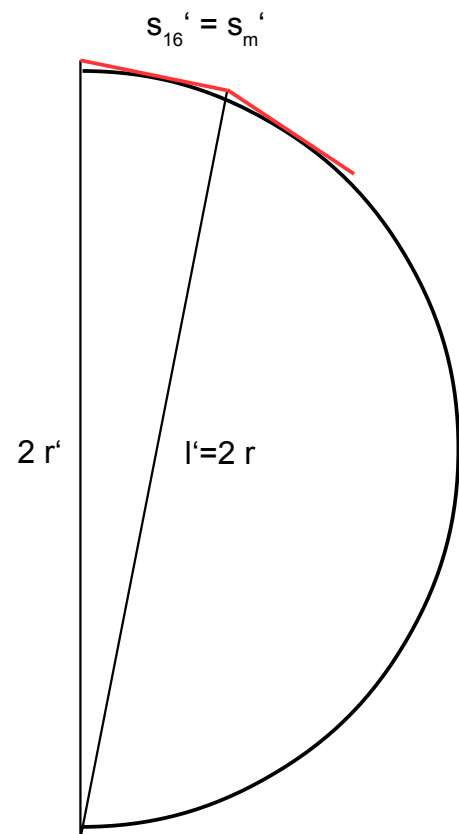
$$2r' < 2r + s_m'$$

$$2r < 2r' + s_m'$$

$$2r - s_m' < 2r', \text{ also}$$

$$2r - s_m' < 2r' < 2r + s_m' .$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m' = 0$ ist $\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} 2r' = 2r}$.



Wegen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi \cdot 2r \cdot \Delta r = \pi \cdot 2r \cdot 2r = \pi \cdot 4r^2$$

und

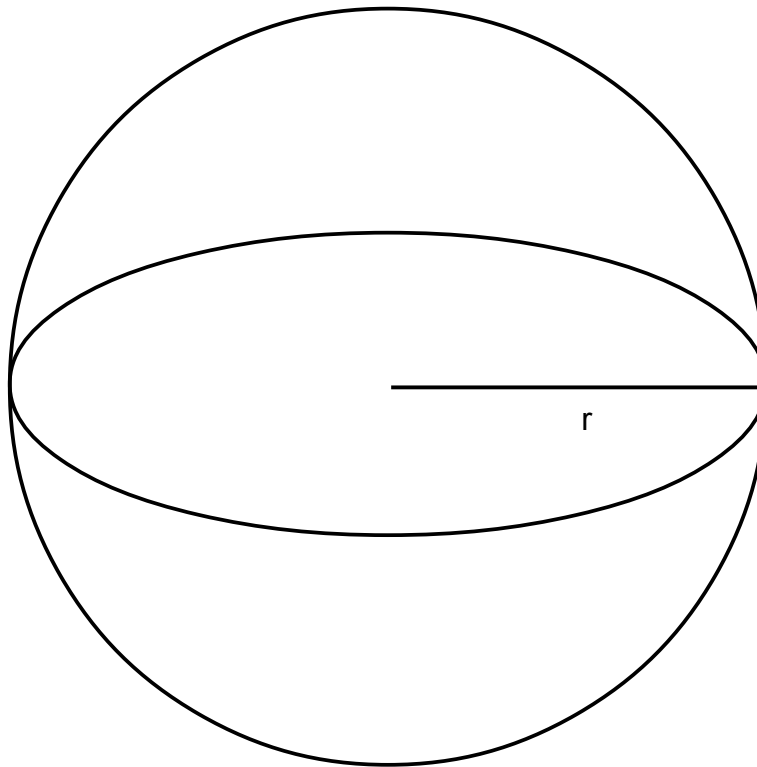
$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m' = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi \cdot 2r \cdot \Delta r' = \pi \cdot 2r \cdot 2r = \pi \cdot 4r^2$$

folgt, dass die **Oberfläche der Kugel** durch

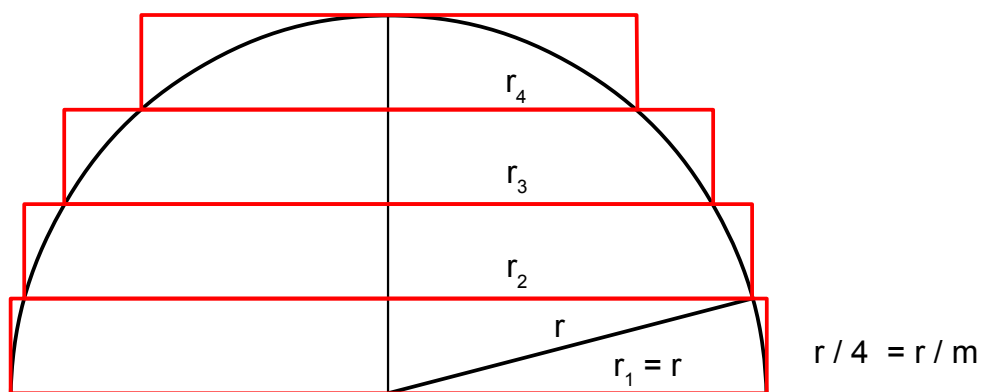
$O = 4\pi r^2$

gegeben ist .

Kugel, Volumen



Approximation der Halbkugel durch Zylinder der Höhe $\frac{r}{m}$ von außen :



$$V_m' = \pi r_1^2 \frac{r}{m} + \pi r_2^2 \frac{r}{m} + \dots + \pi r_m^2 \frac{r}{m}, \quad m = 2^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi r_i^2 \left(\frac{r}{m} \right)$$

Wegen des **Satzes des Pythagoras** folgt :

$$r_i^2 = r^2 - \left((i-1) \frac{r}{m} \right)^2, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

$$r_i^2 = r^2 - (i-1)^2 \left(\frac{r}{m} \right)^2, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi \left(r^2 - (i-1)^2 \left(\frac{r}{m} \right)^2 \right) \left(\frac{r}{m} \right)$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi \left(\frac{r^3}{m} - (i-1)^2 \left(\frac{r}{m} \right)^3 \right)$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \left(\pi \frac{r^3}{m} - \pi (i-1)^2 \frac{r^3}{m^3} \right)$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi \frac{r^3}{m} - \sum_{i=1}^m \pi (i-1)^2 \frac{r^3}{m^3}$$

$$V_m' = \pi \frac{r^3}{m} \sum_{i=1}^m 1 - \pi \frac{r^3}{m^3} \sum_{i=1}^m (i-1)^2$$

Es ist $\sum_{i=1}^m 1 = m$ und $\sum_{i=1}^m (i-1)^2 = \sum_{i=1}^{m-1} i^2$, also

$$V_m' = \pi \frac{r^3}{m} m - \pi \frac{r^3}{m^3} \sum_{i=1}^{m-1} i^2$$

$$V_m' = \pi r^3 - \pi \frac{r^3}{m^3} \sum_{i=1}^{m-1} i^2$$

Wegen der Formel

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

ist

$$\sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{(m-1)(m-1+1)(2(m-1)+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m \quad .$$

Deshalb folgt :

$$V_m' = \pi r^3 - \pi \frac{r^3}{m^3} \sum_{i=1}^{m-1} i^2$$

$$V_m' = \pi r^3 - \pi \frac{r^3}{m^3} \left(\frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m \right)$$

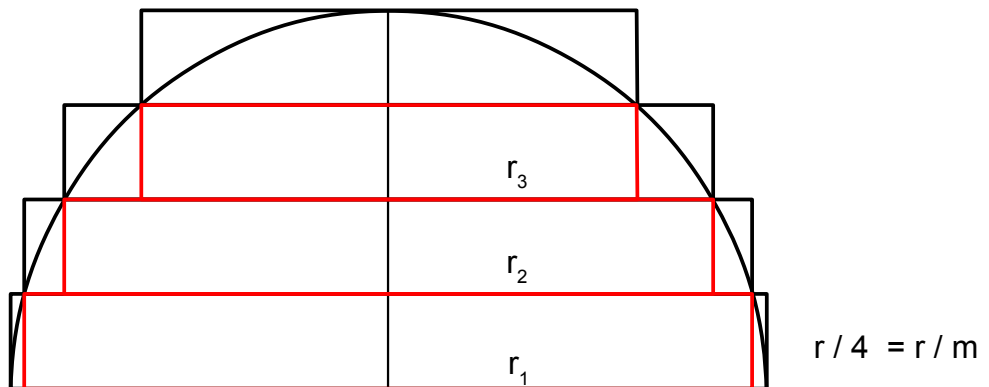
$$V_m' = \pi r^3 - \pi r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{m} + \frac{1}{6} \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\pi r^3 - \pi r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{m} + \frac{1}{6} \frac{1}{m^2} \right) \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \pi r^3 - \pi r^3 \frac{1}{3}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Approximation der Halbkugel durch Zylinder der Höhe $\frac{r}{m}$ von innen :



$$V_m = V_m' - \pi r^2 \frac{r}{m} \quad , \quad m = 2^k \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(V_m' - \pi r^2 \frac{r}{m} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Die Grenzwerte der Approximation von außen und innen stimmen überein, und wegen $M_m < V_{\text{Halbkugel}} < M_m'$ folgt :

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad .$$

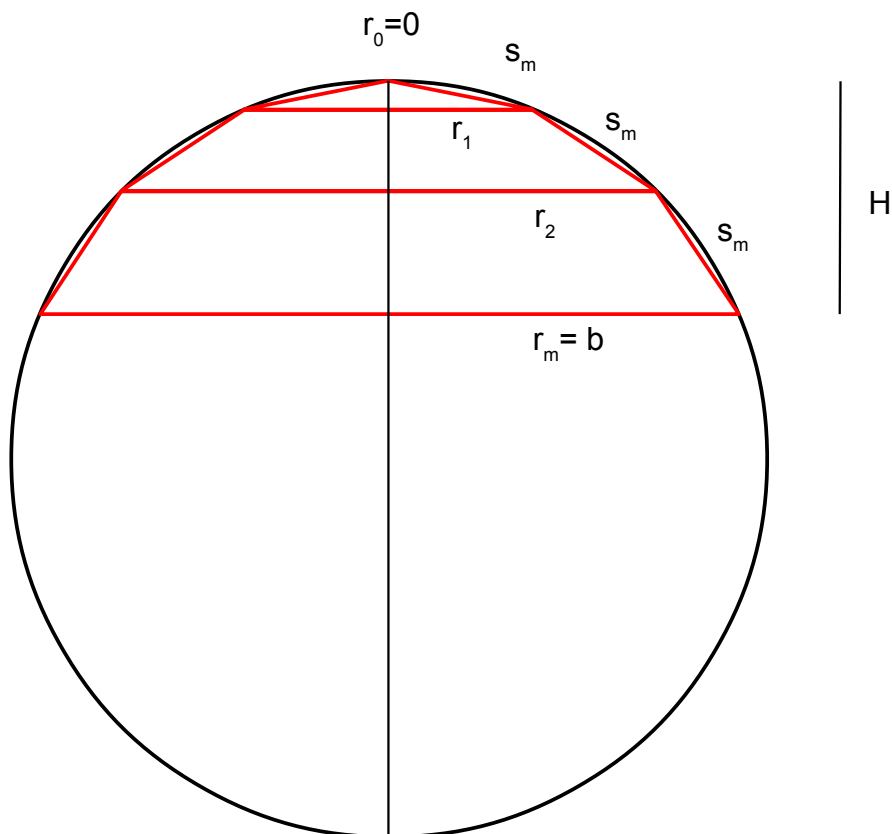
Das **Volumen der Kugel** ist somit

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad .$$

Kugelabschnitt, Mantel

Approximation durch Kegelstümpfe gleicher Mantellinie s_m von innen :

s_m mit $m \in \mathbb{N}$, r_i mit $i \in \{0, \dots, m\}$, $r_0 = 0$, $r_m = b$

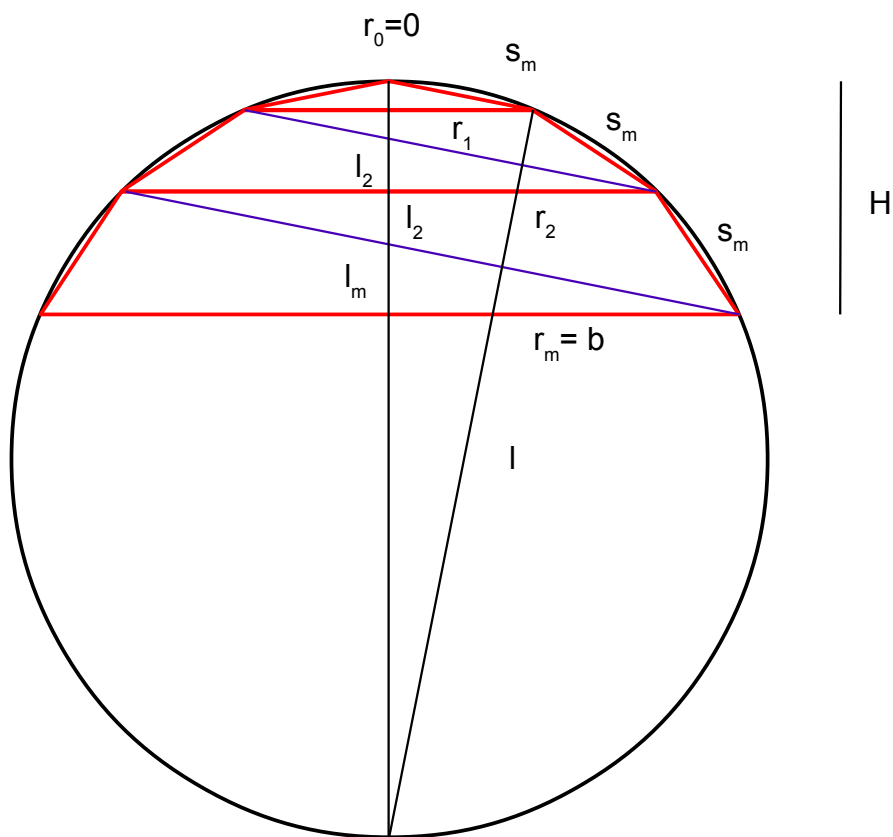


$$M_m = \pi (r_0 + r_1) s_m + \pi (r_1 + r_2) s_m + \dots + \pi (r_{m-2} + r_{m-1}) s_m + \pi (r_{m-1} + r_m) s_m$$

$$M_m = \pi (r_0 + r_1 + r_1 + r_2 + \dots + r_{m-2} + r_{m-1} + r_{m-1} + r_m) s_m$$

$$M_m = \pi (2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{m-2} + 2 r_{m-1} + b) s_m$$

Das Schnittbild der Zerlegung wird durch folgende Linien ergänzt :



s_m mit $m \in \mathbb{N}$, r_i mit $i \in \{0, \dots, m\}$, $r_0 = 0$, $r_m = b$

Dadurch entsteht aufgrund des **Umfangswinkelsatzes** eine Folge von **kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken**

und insbesondere auch eine Folge von **rechtwinkligen, kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken** mit den **Katheten** r_i , l_i mit $i \in \{1, \dots, m\}$.

Das letzte Dreieck ist nach nach dem **Satz von Thales** rechtwinklig und hat die **Katheten** l , s_m .

Es gelten die Verhältnisgleichungen :

$$\frac{r_1}{l_1} = \frac{r_2}{l_2} = \dots = \frac{b}{l_m} = \frac{l}{s_m} .$$

Die Umformung ergibt folgende Produktgleichungen :

$$r_1 s_m = l l_1$$

$$r_2 s_m = l l_2$$

.

$$r_{m-1} s_m = l l_{m-1}$$

$$b s_m = l l_m$$

Die Addition der ersten $m-1$ Gleichungen ergibt :

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_{m-1}) s_m = l (l_1 + l_2 + \dots + l_{m-1})$$

$$(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{m-1}) s_m = l (2 l_1 + 2 l_2 + \dots + 2 l_{m-1})$$

Das Dazuaddieren der m -ten Gleichung $b s_m = l l_m$ ergibt :

$$(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{m-1}) s_m + b s_m = l (2 l_1 + 2 l_2 + \dots + 2 l_{m-1}) + l l_m$$

$$(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{m-1} + b) s_m = l (2 l_1 + 2 l_2 + \dots + 2 l_{m-1} + l_m)$$

Die Summe auf der rechten Seite ist gleich der Höhe H :

$$(2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{m-1} + b) s_m = l H$$

Für den **Mantel der von innen approximierenden Kegelstümpfe** ergibt sich :

$$M_m = \pi (2 r_1 + 2 r_2 + \dots + 2 r_{m-2} + 2 r_{m-1} + b) s_m$$

$$M_m = \pi l H$$

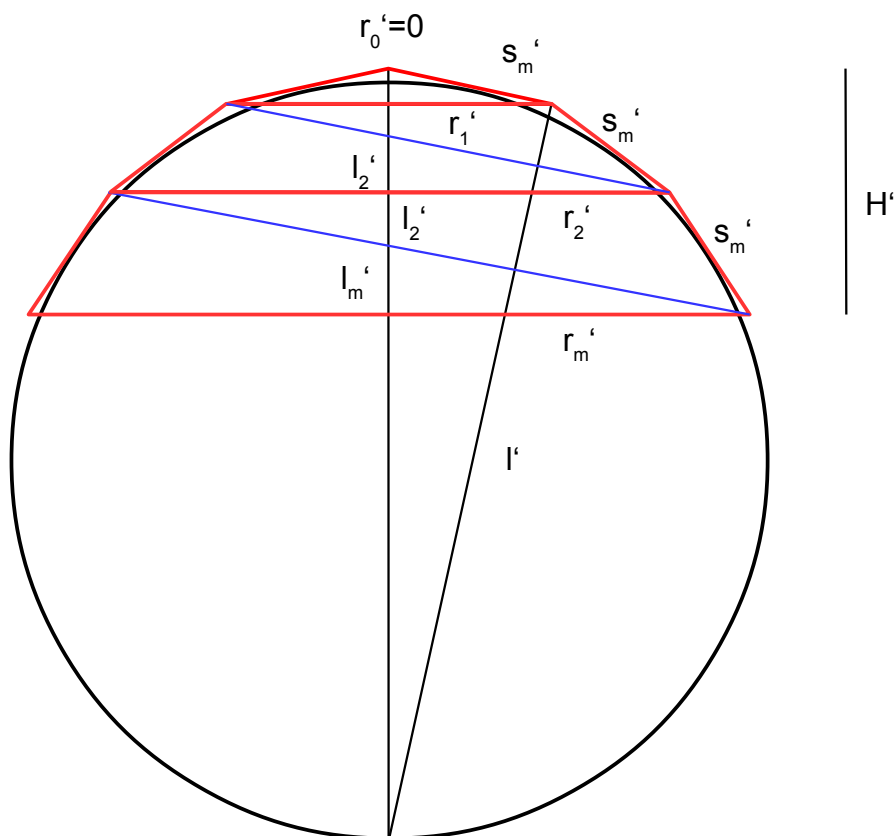
Approximation durch Kegelstümpfe gleicher Mantellinie s_m' von außen :

$$M_m' = \pi (r_0' + r_1') s_m' + \pi (r_1' + r_2') s_m' + \dots + \pi (r_{m-1}' + r_m') s_m'$$

$$M_m' = \pi (r_0' + r_1' + r_1' + r_2' + \dots + r_{m-1}' + r_{m-1}' + r_m') s_m'$$

$$M_m' = \pi (2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{m-1}' + r_m') s_m'$$

Das Schnittbild der Zerlegung wird durch folgende Linien ergänzt :



s_m' mit $m \in \mathbb{N}$, r_i' mit $i \in \{0, \dots, m\}$, $r_0' = 0$

Außerdem denkt man sich die Strecken s_m' als Sehnen in einem Kreis mit dem Radius $r' > r$.

Dadurch entsteht aufgrund des **Umfangswinkelsatzes** eine Folge von **kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken**

und insbesondere auch eine Folge von **rechtwinkligen, kongruenten bzw. ähnlichen Dreiecken** mit den **Katheten** r_i' , l_i' mit $i \in \{1, \dots, m\}$.

Das letzte Dreieck ist nach nach dem **Satz von Thales** rechtwinklig und hat die **Katheten** l' , s_m' .

Es gelten die Verhältnisgleichungen :

$$\frac{r_1'}{l_1'} = \frac{r_2'}{l_2'} = \dots = \frac{r_m'}{l_m'} = \frac{l'}{s_m'}$$

Die Umformung ergibt folgende Produktgleichungen :

$$r_1' s_m' = l' l_1'$$

$$r_2' s_m' = l' l_2'$$

.

$$r_{m-1}' s_m' = l' l_{m-1}'$$

$$r_m' s_m' = l' l_m'$$

Die Addition der ersten $m-1$ Gleichungen ergibt :

$$(r_1' + r_2' + \dots + r_{m-1}') s_m' = l' (l_1' + l_2' + \dots + l_{m-1}')$$

$$(2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{m-1}') s_m' = l' (2 l_1' + 2 l_2' + \dots + 2 l_{m-1}')$$

Das Dazuaddieren der m -ten Gleichung $r_m' s_m' = l' l_m'$ ergibt :

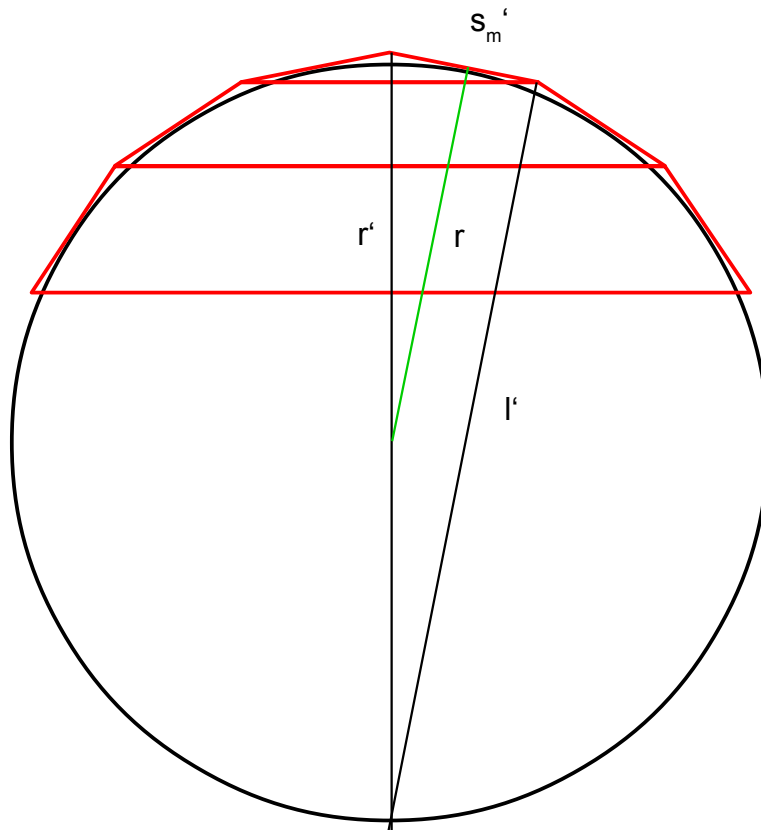
$$(2 r_1' + \dots + 2 r_{m-1}') s_m' + r_m' s_m' = l' (2 l_1' + \dots + 2 l_{m-1}') + l' l_m'$$

$$(2 r_1' + \dots + 2 r_{m-1}' + r_m') s_m' = l' (2 l_1' + \dots + 2 l_{m-1}' + l_m')$$

Die Summe auf der rechten Seite ist gleich der Höhe H' :

$$(2 r_1' + \dots + 2 r_{m-1}' + r_m') s_m' = l' H'$$

Wegen der **Strahlensätze** folgt:



$$\frac{l'}{r} = \frac{2r'}{r'}$$

$$l' = 2r' ,$$

also

$$(2 r_1' + \dots + 2 r_{m-1}' + r_m') s_m' = 2 r H'$$

Für den **Mantel der von außen approximierenden Kegelstümpfe** ergibt sich :

$$M_m' = \pi (2 r_1' + 2 r_2' + \dots + 2 r_{m-1}' + r_m') s_m'$$

$$M_m' = \pi 2 r H'$$

Wir haben für den **Mantel M des Kugelabschnitts** bis jetzt folgendes Ergebnis :

$$M_m = \pi l H < M < M_m' = \pi 2 r H'$$

Wegen der **Dreiecksungleichung** gilt :

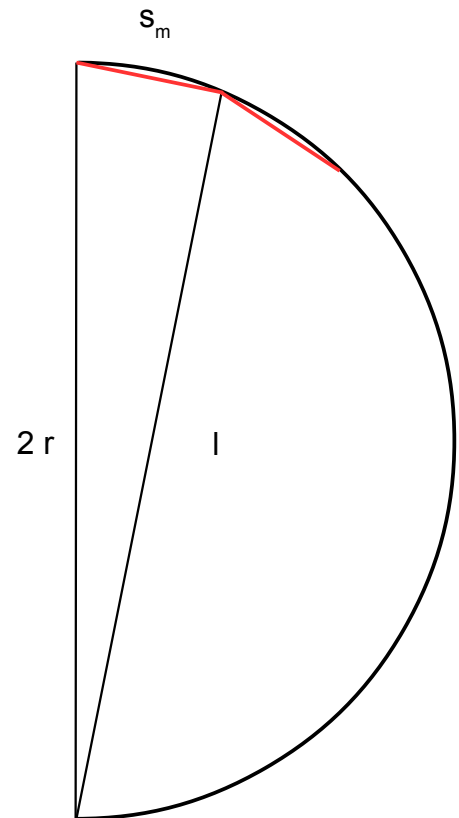
$$l < 2r + s_m$$

$$2r < l + s_m$$

$$2r - s_m < l, \text{ also}$$

$$2r - s_m < l < 2r + s_m .$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 0$ ist $\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} l = 2r}$.



Wegen der **Dreiecksungleichung** gilt :

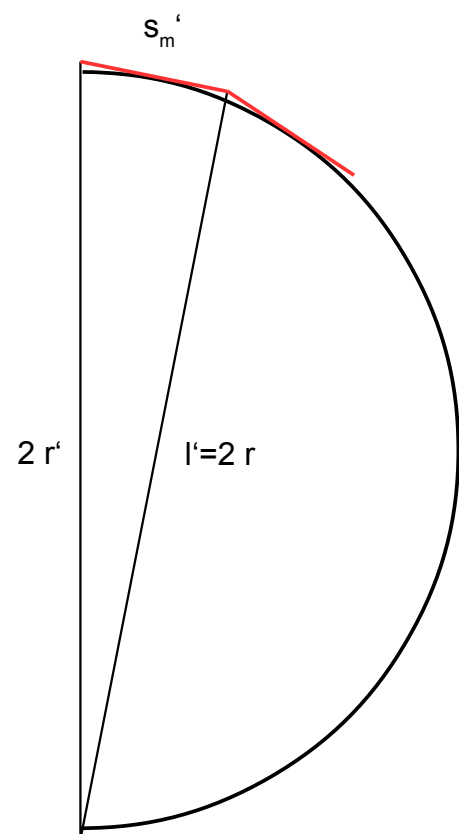
$$2r' < 2r + s_m'$$

$$2r < 2r' + s_m'$$

$$2r - s_m' < 2r', \text{ also}$$

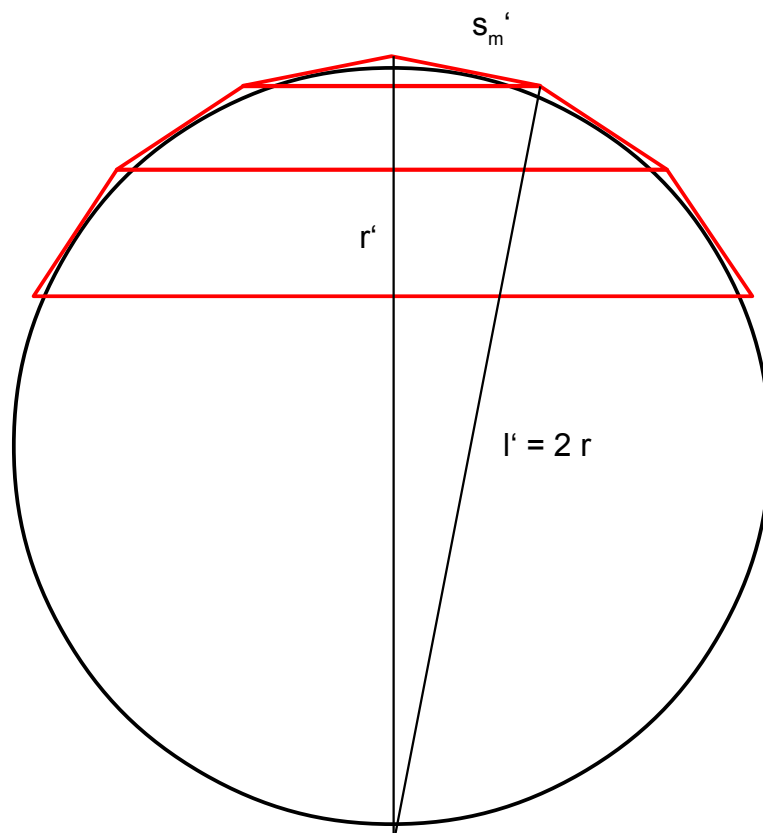
$$2r - s_m' < 2r' < 2r + s_m' .$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m' = 0$ ist $\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} 2r' = 2r}$.



Außerdem folgt :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H' = \lim_{m \rightarrow \infty} H + r' - r = H$$



$$H' = H + r' - r$$

Für den **Mantel** M **des Kugelabschnitts** ergibt sich nach der Grenzwertbildung :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi l H$$

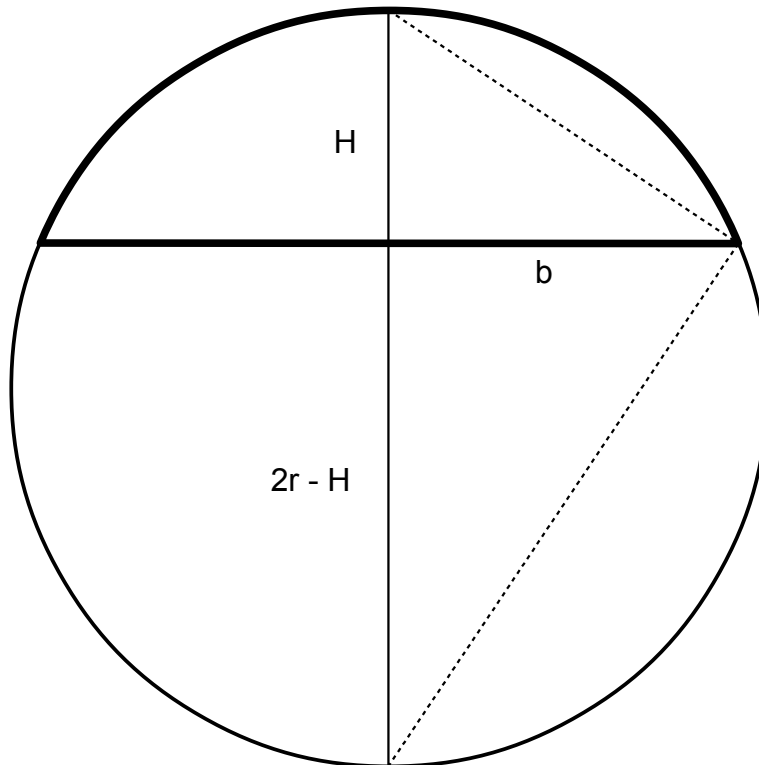
$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \pi 2 r H \leq M$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m' = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi 2 r H'$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m' = \pi 2 r H \geq M, \text{ also folgt :}$$

$$M = 2 \pi r H .$$

Alternative Formel für den Mantel eines Kugelabschnitts :



Nach dem **Höhensatz** gilt :

$$b^2 = H (2r - H)$$

$$b^2 = 2 r H - H^2$$

$$2 r H = b^2 + H^2 ,$$

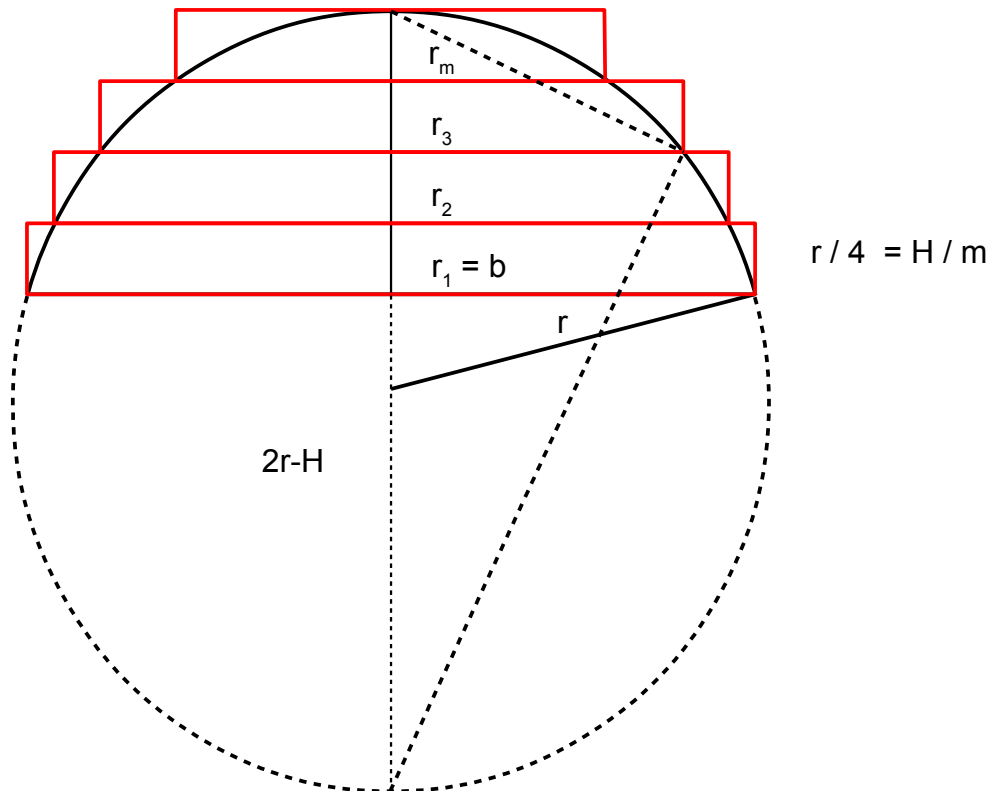
also

$$M = 2 \pi r H$$

$$M = \pi (b^2 + H^2) .$$

Kugelabschnitt, Volumen

Approximation des Kugelabschnitts durch Zylinder der Höhe $\frac{H}{m}$ von außen :



$$V_m' = \pi r_1^2 \frac{H}{m} + \pi r_2^2 \frac{H}{m} + \dots + \pi r_m^2 \frac{H}{m} \quad , \quad m = 2^k \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi r_i^2 \left(\frac{H}{m} \right)$$

Nach dem **Höhensatz** gilt :

$$r_i^2 = \left(2r - H + i \frac{H}{m} \right) \left(H - i \frac{H}{m} \right) \quad , \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

$$r_i^2 = (2r - H)H - (2r - H) \frac{H}{m} i + \frac{H^2}{m} i - \frac{H^2}{m^2} i^2$$

$$r_i^2 = (2r - H)H - 2(r - H) \frac{H}{m} i - \frac{H^2}{m^2} i^2$$

Dann folgt :

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi r_i^2 \left(\frac{H}{m} \right)$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi \left[(2r - H)H - 2(r - H) \frac{H}{m} i - \frac{H^2}{m^2} i^2 \right] \left(\frac{H}{m} \right)$$

$$V_m' = \sum_{i=1}^m \pi \left[(2r - H) \frac{H^2}{m} - 2(r - H) \frac{H^2}{m^2} i - \frac{H^3}{m^3} i^2 \right]$$

$$V_m' = \pi (2r - H) \frac{H^2}{m} \sum_{i=1}^m 1 - 2\pi (r - H) \frac{H^2}{m^2} \sum_{i=1}^m i - \pi \frac{H^3}{m^3} \sum_{i=1}^m i^2$$

Verwendet man nun die folgenden Formeln

$$\boxed{\sum_{i=1}^m 1 = m}, \quad \boxed{\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}}, \quad \boxed{\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}, \quad \text{so erhält man}$$

$$V_m' = \pi (2r - H) \frac{H^2}{m} m - 2\pi (r - H) \frac{H^2}{m^2} \frac{m(m+1)}{2} - \pi \frac{H^3}{m^3} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$V_m' = \pi (2r - H) H^2 - 2\pi (r - H) \frac{H^2}{m^2} \frac{m^2+m}{2} - \pi \frac{H^3}{m^3} \frac{(m^2+m)(2m+1)}{6}$$

$$V_m' = \pi (2r - H) H^2 - 2\pi (r - H) H^2 \frac{m^2+m}{2m^2} - \pi H^3 \frac{2m^3+3m^2+m}{6m^3}$$

$$V_m' = \pi (2r - H) H^2 - 2\pi (r - H) H^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \right) - \pi H^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi (2r - H) H^2 - 2\pi (r - H) H^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \right) - \pi H^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2} \right)$$

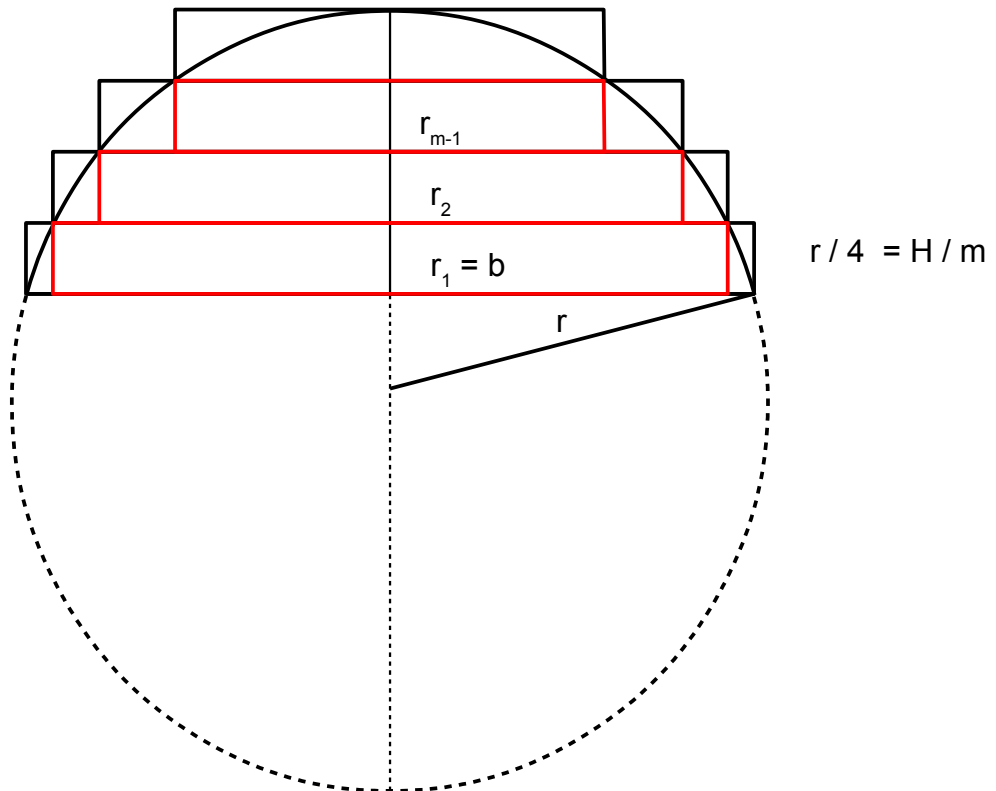
$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \pi (2r - H) H^2 - \pi (r - H) H^2 - \frac{\pi H^3}{3}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = 2\pi r H^2 - \pi H^3 - \pi r H^2 + \pi H^3 - \frac{\pi H^3}{3}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \pi r H^2 - \frac{\pi H^3}{3}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m' = \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$$

Approximation des Kugelabschnitts durch Zylinder der Höhe $\frac{H}{m}$ von innen :



$$V_m = V_m' - \pi b^2 \frac{H}{m}$$

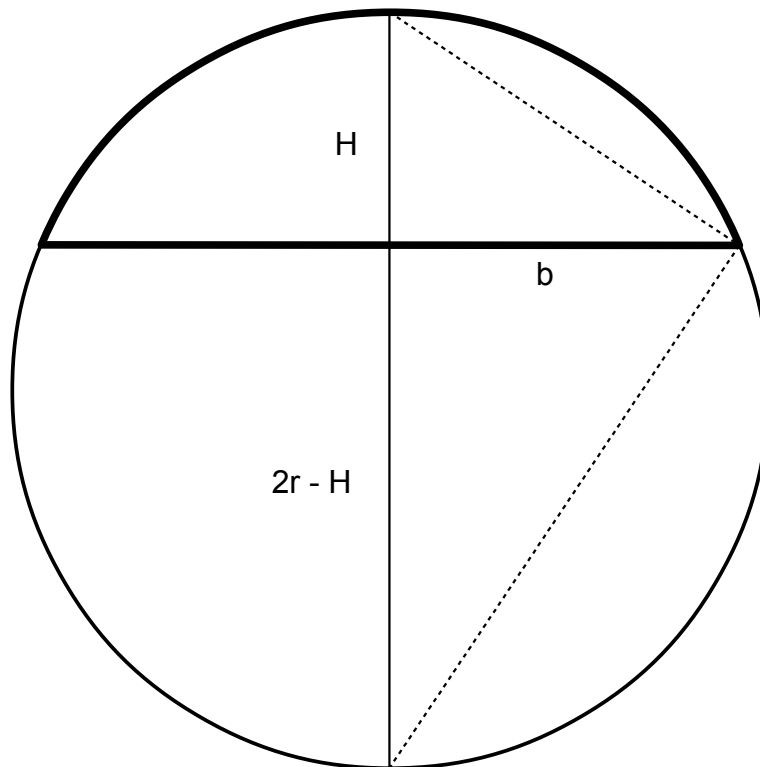
$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m' - \pi b^2 \frac{H}{m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$$

Wegen $V_m < V < V_m'$ folgt :

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H) .$$

Alternative Formel für das Volumen eines Kugelabschnitts :



Nach dem **Höhensatz** gilt $b^2 = H (2r - H)$, und es folgt :

$$\frac{b^2}{H} = 2r - H \quad , \quad \frac{b^2 + H^2}{2} = r H \quad , \text{ also}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (2r - H + r)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 \left(\frac{b^2}{H} + r \right)$$

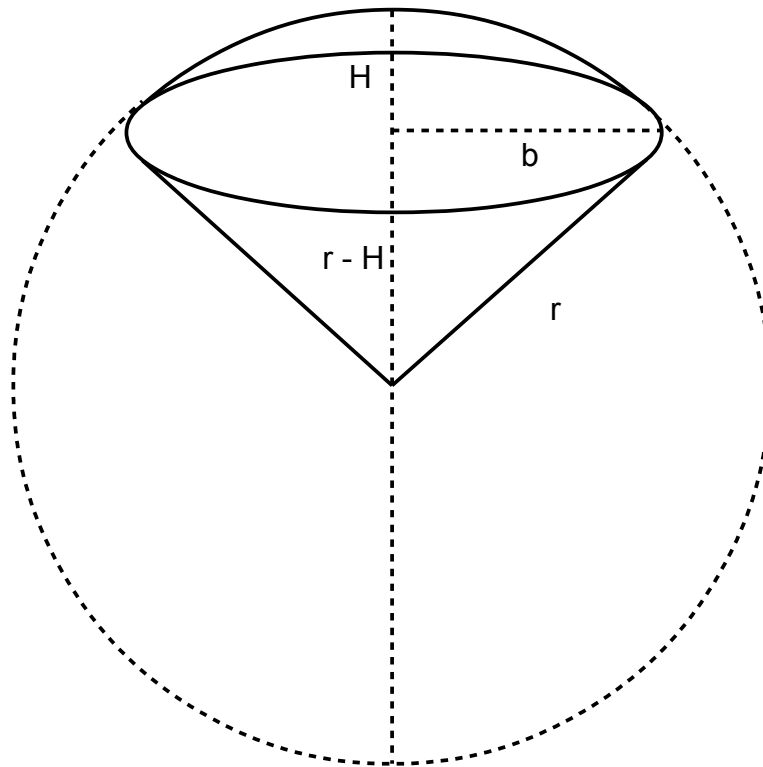
$$V = \frac{1}{3} \pi H (b^2 + r H)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H \left(b^2 + \frac{b^2 + H^2}{2} \right)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H \left(\frac{3 b^2 + H^2}{2} \right)$$

$$V = \frac{1}{6} \pi H (3 b^2 + H^2)$$

Kugelausschnitt



Oberfläche

$$O = 2 \pi r H + \pi b r$$

$$O = \pi r (2 H + b)$$

Volumen

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3 r - H) + \frac{1}{3} \pi b^2 (r - H)$$

Wegen des **Höhensatzes** $b^2 = H (2r - H)$ folgt :

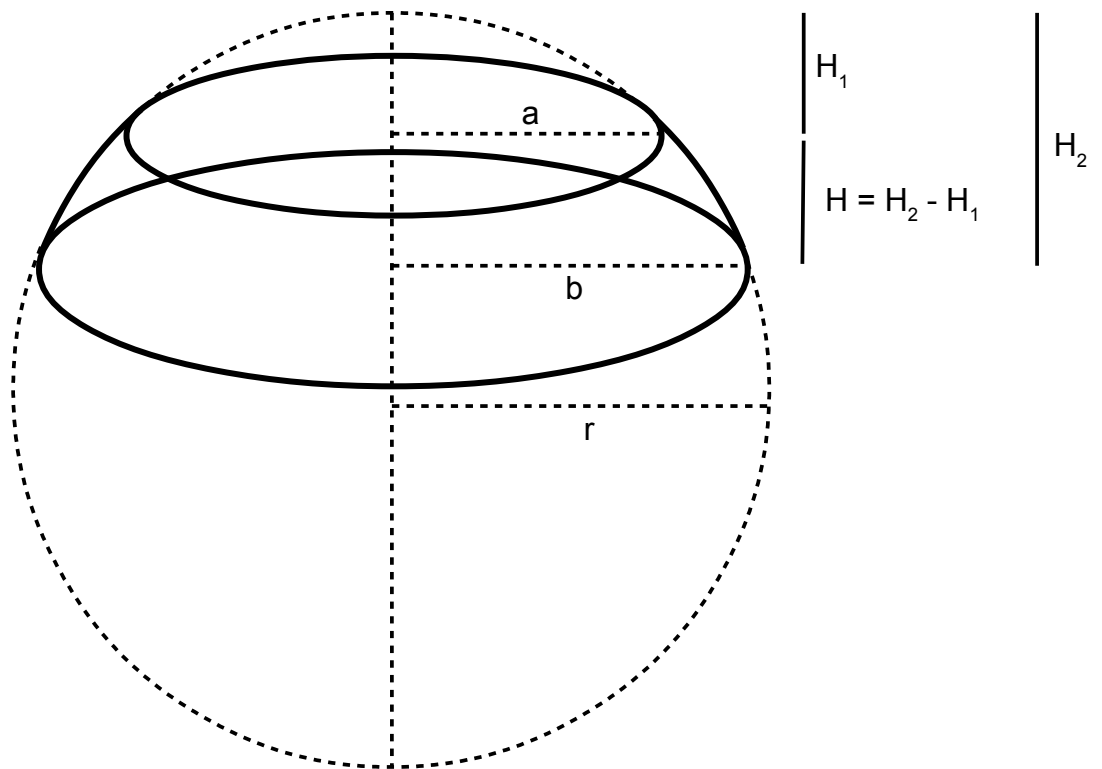
$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3 r - H) + \frac{1}{3} \pi H (2r - H)(r - H)$$

$$V = \pi r H^2 - \frac{1}{3} \pi H^3 + \frac{1}{3} \pi (2 r^2 H - 3 r H^2 + H^3)$$

$$V = \pi r H^2 - \frac{1}{3} \pi H^3 + \frac{2}{3} \pi r^2 H - \pi r H^2 + \frac{1}{3} \pi H^3$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 H$$

Kugelschicht, Mantel

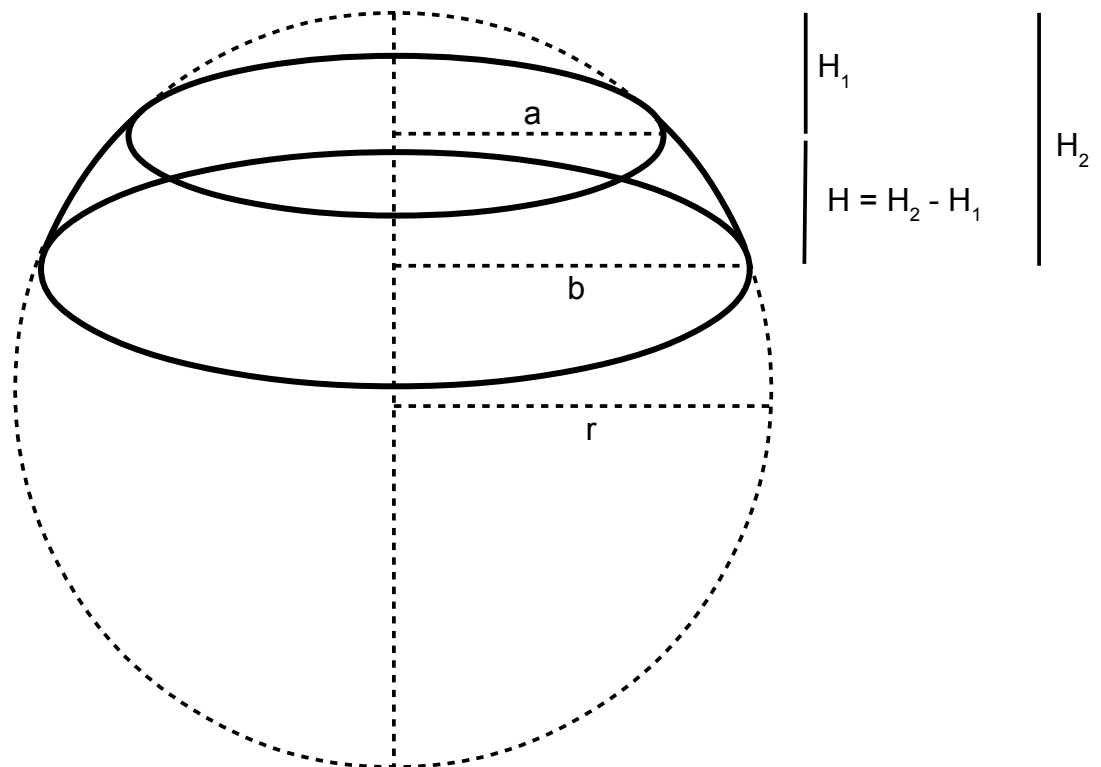


$$M = 2 \pi r H_2 - 2 \pi r H_1$$

$$M = 2 \pi r (H_2 - H_1)$$

$$M = 2 \pi r H$$

Kugelschicht, Volumen



$$V = \frac{1}{6} \pi (3 b^2 + H_2^2) H_2 - \frac{1}{6} \pi (3 a^2 + H_1^2) H_1$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3 b^2 H_2 + H_2^3 - 3 a^2 H_1 - H_1^3]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3 b^2 H_2 - 3 a^2 H_1 + H_2^3 - H_1^3]$$

Wegen der **3. Binomischen Formel** gilt

$$H^3 = (H_2 - H_1)^3 = H_2^3 - 3 H_2^2 H_1 + 3 H_2 H_1^2 - H_1^3$$

$$H^3 = H_2^3 - 3 H_2^2 H_1 + 3 H_2 H_1^2 - H_1^3$$

$$H^3 + 3 H_2^2 H_1 - 3 H_2 H_1^2 = H_2^3 - H_1^3$$

Dann folgt :

$$V = \frac{1}{6} \pi [3 b^2 H_2 - 3 a^2 H_1 + H_2^3 - H_1^3]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3 b^2 H_2 - 3 a^2 H_1 + H^3 + 3 H_2^2 H_1 - 3 H_2 H_1^2]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2H_2 - 3a^2H_1 + H^3 + 3H_2^2H_1 - 3H_2H_1^2]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2H_2 - 3a^2H_1 + H^3 + 3H_2^2H_1 - 3H_2H_1^2]$$

Nun fügt man den Term $3b^2H_1 - 3b^2H_1 + 3a^2H_2 - 3a^2H_2 = 0$ ein und fasst zusammen :

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2H_2 - 3a^2H_1 + H^3 + 3H_2^2H_1 - 3H_2H_1^2 + 3b^2H_1 - 3b^2H_1 + 3a^2H_2 - 3a^2H_2]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2(H_2 - H_1) + 3a^2(H_2 - H_1) + H^3 + (H_2^2 + b^2)3H_1 - (H_1^2 + a^2)3H_2]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2(H_2 - H_1) + 3a^2(H_2 - H_1) + H^3 + (H_2^2 + b^2)3H_1 - (H_1^2 + a^2)3H_2]$$

Wegen der **Höhensätze**

$$b^2 = H_2 (2r - H_2) \quad , \quad a^2 = H_1 (2r - H_1)$$

folgt

$$H_2^2 + b^2 = 2r H_2 \quad , \quad H_1^2 + a^2 = 2r H_1 \quad ,$$

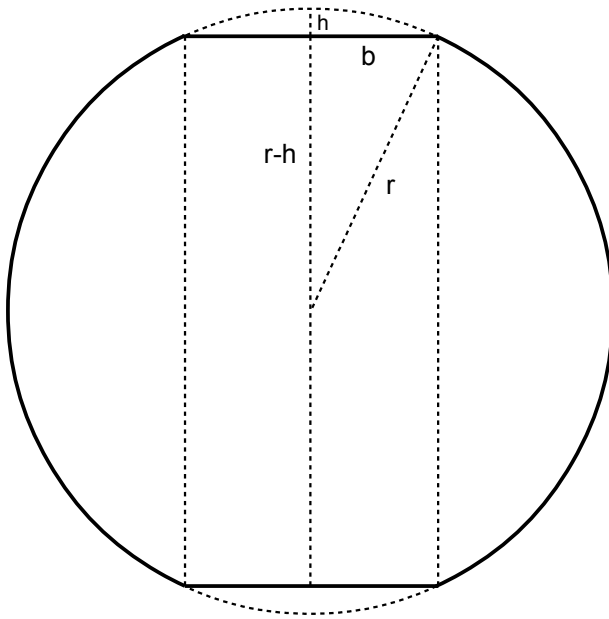
und weiter

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2H + 3a^2H + H^3 + 2rH_23H_1 - 2r H_13H_2]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2H + 3a^2H + H^3]$$

$$V = \frac{1}{6} \pi [3b^2 + 3a^2 + H^2] H$$

Perle, Volumen



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \frac{\pi}{6} h (3b^2 + h^2) - \pi b^2 (2r - 2h)$$

Wegen des **Höhensatzes** $b^2 = h (2r - h)$ folgt :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \frac{\pi}{6} h (3h(2r - h) + h^2) - \pi h (2r - h) (2r - 2h)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{\pi}{3} h (6rh - 2h^2) - \pi h (4r^2 - 6rh + 2h^2)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h \left(\frac{1}{3} (6rh - 2h^2) + 4r^2 - 6rh + 2h^2 \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h \left(2rh - \frac{2}{3}h^2 + 4r^2 - 6rh + 2h^2 \right)$$

Somit ergibt sich das Volumen in Abhängigkeit von r und h :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h \left(4r^2 - 4rh + \frac{4}{3}h^2 \right)$$

Wegen $r-h = \sqrt{r^2-b^2}$ ist $h = r-\sqrt{r^2-b^2}$, und es folgt :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h \left(4r^2 - 4rh + \frac{4}{3}h^2 \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi (r-\sqrt{r^2-b^2}) \left(4r^2 - 4r(r-\sqrt{r^2-b^2}) + \frac{4}{3}(r-\sqrt{r^2-b^2})^2 \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi (r-\sqrt{r^2-b^2}) \left(4r^2 - 4r^2 + 4r\sqrt{r^2-b^2} + \frac{4}{3}(r^2 - 2r\sqrt{r^2-b^2} + r^2 - b^2) \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi (r-\sqrt{r^2-b^2}) \left(4r\sqrt{r^2-b^2} + \frac{4}{3}r^2 - \frac{8}{3}r\sqrt{r^2-b^2} + \frac{4}{3}r^2 - \frac{4}{3}b^2 \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi (r-\sqrt{r^2-b^2}) \left(4r\sqrt{r^2-b^2} + \frac{8}{3}r^2 - \frac{8}{3}r\sqrt{r^2-b^2} - \frac{4}{3}b^2 \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi (r-\sqrt{r^2-b^2}) \left(\frac{8}{3}r^2 + \frac{4}{3}r\sqrt{r^2-b^2} - \frac{4}{3}b^2 \right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r - \sqrt{r^2-b^2}) (2r^2 + r\sqrt{r^2-b^2} - b^2)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r - \sqrt{r^2-b^2}) (2r^2 - b^2 + r\sqrt{r^2-b^2})$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r(2r^2 - b^2) + r^2\sqrt{r^2-b^2} - (2r^2 - b^2)\sqrt{r^2-b^2} - r(r^2 - b^2))$$

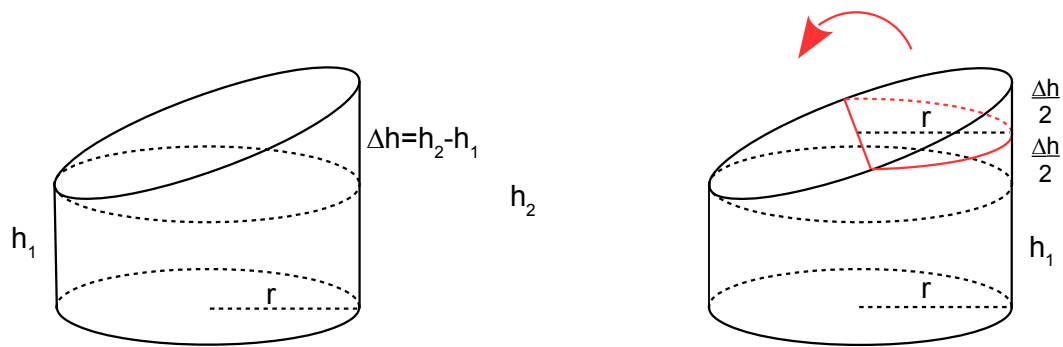
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (2r^3 - rb^2 - (r^2 - b^2)\sqrt{r^2-b^2} - r^3 + rb^2)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r^3 - (r^2 - b^2)\sqrt{r^2-b^2})$$

Somit ergibt sich da Volumen in Abhängigkeit von r und b :

$$V = \frac{4}{3}\pi (r^2 - b^2)\sqrt{r^2 - b^2}$$

Zylinderabschnitt, Volumen, Mantel



$$V = \pi r^2 \left(h_1 + \frac{\Delta h}{2} \right)$$

$$V = \pi r^2 \left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{2} \right)$$

$$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$$

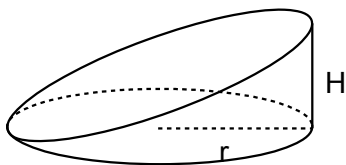
$$M = 2\pi r \left(h_1 + \frac{\Delta h}{2} \right)$$

$$M = 2\pi r \left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{2} \right)$$

$$M = 2\pi r \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$M = \pi r (h_1 + h_2)$$

Zylinderhuf (mit Kreis als Grundfläche), Volumen, Mantel, Deckfläche



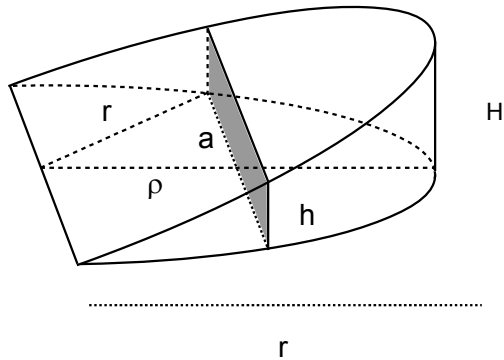
$$h_1 = 0$$

$$h_2 = H$$

$$V = \pi r^2 \frac{H}{2}$$

$$M = \pi r H$$

Zylinderhuf (mit Halbkreis als Grundfläche), Volumen



$$A(\rho) = 2 a(\rho) h(\rho)$$

$$\frac{h}{\rho} = \frac{H}{r}$$

$$h(\rho) = \frac{H}{r} \rho$$

$$a(\rho) = \sqrt{r^2 - \rho^2}$$

$$V = \int_0^r A(\rho) d\rho$$

$$V = \int_0^r 2 a(\rho) h(\rho) d\rho$$

$$V = \int_0^r 2 \sqrt{r^2 - \rho^2} \frac{H}{r} \rho d\rho$$

$$V = \frac{-2H}{3r} (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^r$$

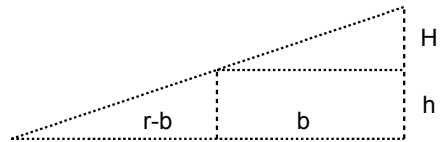
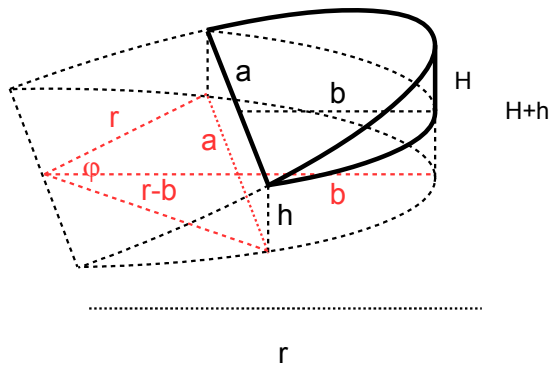
$$V = 0 - \frac{-2H}{3r} (r^2 - 0^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$V = \frac{2H}{3r} (r^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$V = \frac{2H}{3r} r^3$$

$$V = \frac{2}{3} H r^2$$

Allgemeiner Zylinderhuf , Volumen



$$\frac{h}{r-b} = \frac{H}{b}$$

$$\frac{H+h}{r} = \frac{H}{b}$$

$$h = \frac{H}{b}(r-b)$$

$$H+h = \frac{H}{b}r$$

$$V = \frac{2}{3} (H+h)r^2 - \int_0^{r-b} 2 \sqrt{r^2 - \rho^2} \frac{H+h}{r} \rho \, d\rho - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] h$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} r^3 - \int_0^{r-b} 2 \sqrt{r^2 - \rho^2} \frac{H}{b} \rho \, d\rho - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] \frac{H}{b}(r-b)$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} r^3 - \frac{-2}{3} \frac{H}{b} (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{r-b} - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] \frac{H}{b}(r-b)$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} r^3 - \left[\frac{-2}{3} \frac{H}{b} (r^2 - (r-b)^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{-2}{3} \frac{H}{b} (r^2)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] \frac{H}{b}(r-b)$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} r^3 - \left[\frac{-2}{3} \frac{H}{b} (a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{-2}{3} \frac{H}{b} (r^2)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] \frac{H}{b}(r-b)$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} r^3 - \left[\frac{-2}{3} \frac{H}{b} a^3 - \frac{-2}{3} \frac{H}{b} r^3 \right] - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] \frac{H}{b}(r-b)$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} a^3 - \left[\frac{1}{2}r^2\varphi - a(r-b) \right] \frac{H}{b}(r-b)$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} a^3 - \frac{1}{2} \frac{H}{b} r^2(r-b)\varphi + \frac{H}{b} a(r-b)^2$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{H}{b} a^3 + \frac{H}{b} a(r-b)^2 - \frac{1}{2} \frac{H}{b} r^2(r-b)\varphi$$

$$V = \frac{H}{3b} \left[2a^3 + 3a(r-b)^2 - 3r^2(r-b)\frac{\varphi}{2} \right]$$

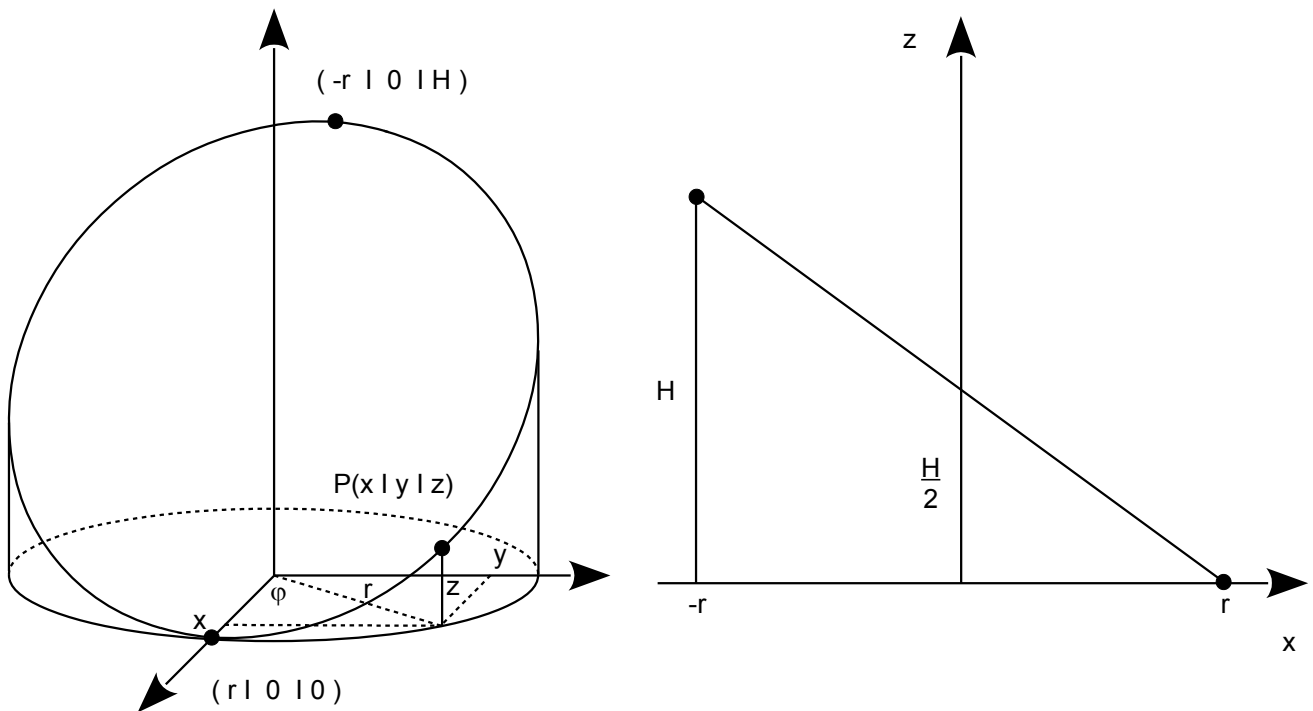
$$V = \frac{H}{3b} \left[2a^3 + 3a(r^2 - a^2) - 3r^2(r-b)\frac{\varphi}{2} \right]$$

$$V = \frac{H}{3b} \left[2a^3 + 3ar^2 - 3a^3 - 3r^2(r-b)\frac{\varphi}{2} \right]$$

$$V = \frac{H}{3b} \left[3ar^2 - a^3 - 3r^2(r-b)\frac{\varphi}{2} \right]$$

$$V = \frac{H}{3b} \left[a(3r^2 - a^2) - 3r^2(r-b)\frac{\varphi}{2} \right]$$

Zylinderhuf (mit Kreis als Grundfläche), Mantel



$$Z : x^2 + y^2 = r^2$$

$$E : z = -\frac{H}{2r}x + \frac{H}{2}$$

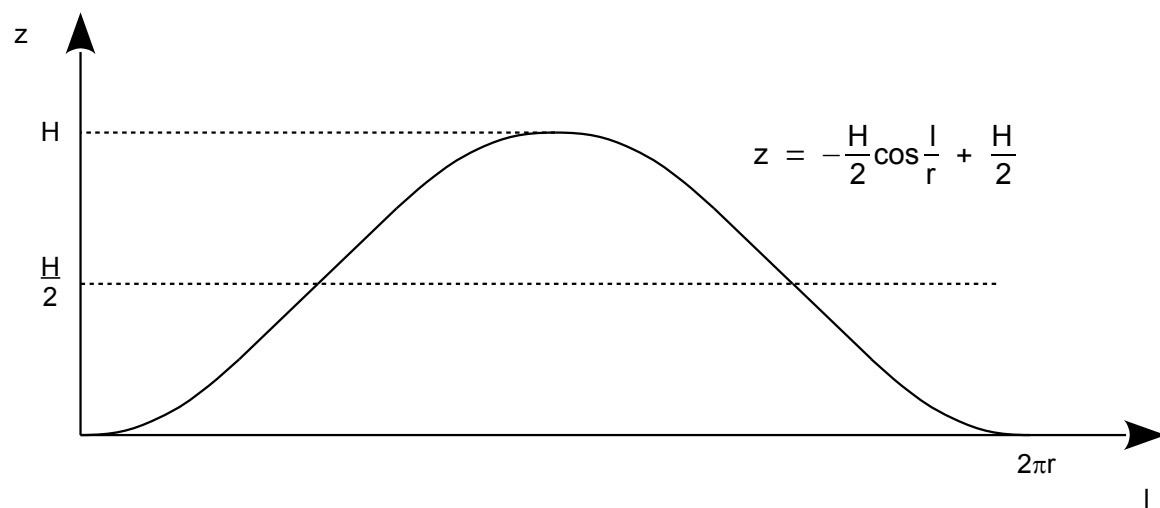
Irgend ein Punkt $P(x | y | z)$ der Mantellinie hat folgende Polarkoordinaten :

$$P(x | y | z) = P\left(r \cos \varphi \mid r \sin \varphi \mid -\frac{H}{2} \cos \varphi + \frac{H}{2}\right) .$$

Parametrisiert man über die Bogenlänge $l = r\varphi$ folgt :

$$P(x | y | z) = P\left(r \cos \frac{l}{r} \mid r \sin \frac{l}{r} \mid -\frac{H}{2} \cos \frac{l}{r} + \frac{H}{2}\right) .$$

Die Abwicklung der Mantelfläche ergibt folgendes Bild :



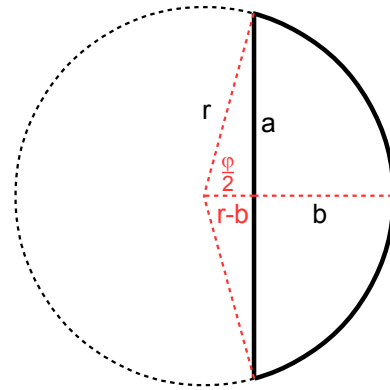
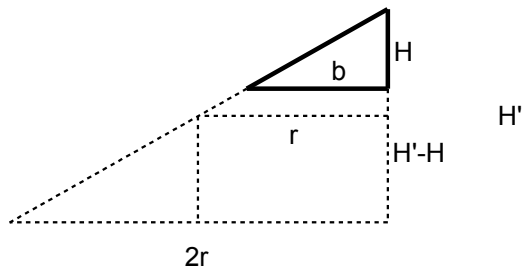
$$M = \int_0^{2\pi r} -\frac{H}{2} \cos \frac{l}{r} + \frac{H}{2} dl$$

$$M = -r \frac{H}{2} \sin \frac{l}{r} + \frac{H}{2} l \quad \Big|_0^{2\pi r}$$

$$M = \frac{H}{2} 2\pi r$$

$$M = \pi r H$$

Allgemeiner Zylinderhuf , Mantel , Deckfläche

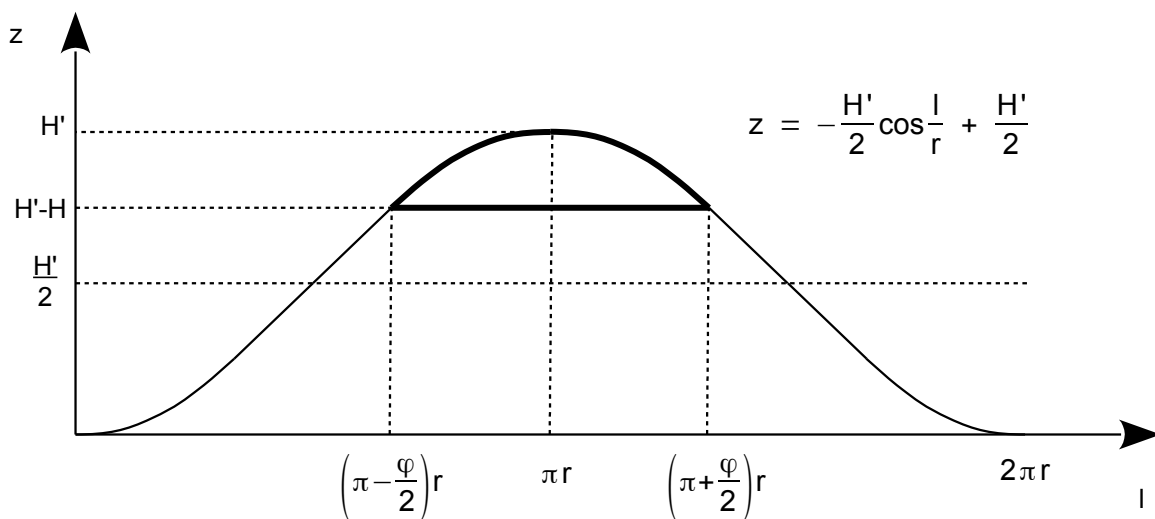


$$\frac{H'}{2r} = \frac{H}{b}$$

$$\frac{H'}{2} = r \frac{H}{b}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{r}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{r-b}{r}$$



$$H'-H = z\left(\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)r\right) = -\frac{H'}{2} \cos \frac{\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)r}{r} + \frac{H'}{2} = -\frac{H'}{2} \cos \left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{H'}{2}$$

$$H'-H = -\frac{H'}{2} \cos \left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{H'}{2}$$

$$H'-H = \frac{H'}{2} \left(1 - \cos \left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$H'-H = r \frac{H}{b} \left(1 - \cos \left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$M = \int_{\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)r}^{\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)r} -\frac{H'}{2}\cos\frac{l}{r} + \frac{H'}{2} dl - (H'-H)r\varphi$$

$$M = \int_{\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)r}^{\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)r} -r\frac{H}{b}\cos\frac{l}{r} + r\frac{H}{b} dl - r\frac{H}{b}\left(1 - \cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)r\varphi$$

$$M = \left[-r^2\frac{H}{b}\sin\frac{l}{r} + r\frac{H}{b}l\right]_{\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)r}^{\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)r} - r\frac{H}{b}\left(1 - \cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)r\varphi$$

$$M = \left[-r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)+r\frac{H}{b}\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)r\right] - \left[-r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)+r\frac{H}{b}\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)r\right] - r\frac{H}{b}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)r\varphi$$

$$M = -r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right) + r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r\frac{H}{b}r\varphi - r\frac{H}{b}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)r\varphi$$

$$\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right) = -\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$M = r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r\frac{H}{b}r\varphi - r\frac{H}{b}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)r\varphi$$

$$M = 2r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r\frac{H}{b}r\varphi - r\frac{H}{b}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)r\varphi$$

$$M = 2r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r^2\frac{H}{b}\varphi - r^2\frac{H}{b}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\varphi$$

$$M = 2r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r^2\frac{H}{b}\varphi\left(1 - \left(1-\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right)$$

$$M = 2r^2\frac{H}{b}\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) + r^2\frac{H}{b}\varphi\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)$$

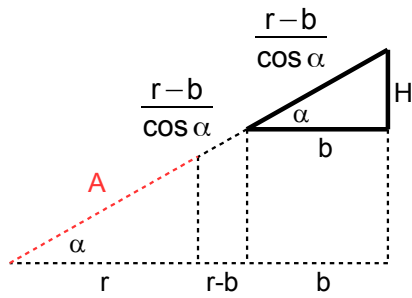
$$\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\frac{\varphi}{2} \quad , \quad \cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right) = -\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$M = 2r^2\frac{H}{b}\sin\frac{\varphi}{2} - r^2\frac{H}{b}\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$M = 2r^2\frac{H}{b}\frac{a}{r} - r^2\frac{H}{b}\varphi\frac{r-b}{r}$$

$$M = 2r\frac{H}{b}a - r\frac{H}{b}\varphi(r-b)$$

$$M = r\frac{H}{b}(2a - (r-b)\varphi)$$



$$A := \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$A - \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{r-b}{\cos \alpha}$$

$$D = 2 \int_{\frac{r-b}{\cos \alpha}}^A \frac{r}{A} \sqrt{A^2 - \bar{x}^2} d\bar{x}$$

$$D = 2 \frac{r}{A} \int_{\frac{r-b}{\cos \alpha}}^A \sqrt{A^2 - \bar{x}^2} d\bar{x}$$

$$D = 2 \frac{r}{A} \left[\frac{-A^2}{2} \arccos \frac{\bar{x}}{A} + \frac{\bar{x}}{2} \sqrt{A^2 - \bar{x}^2} \right] \Big|_{\frac{r-b}{\cos \alpha}}^A \quad (\text{vgl. Anhang (1) - (8), S. 60})$$

$$D = 2 \frac{r}{A} \left(0 - \left[\frac{-A^2}{2} \arccos \frac{r-b}{A \cos \alpha} + \frac{r-b}{2 \cos \alpha} \sqrt{A^2 - \left(\frac{r-b}{\cos \alpha} \right)^2} \right] \right)$$

$$D = 2 \frac{r}{A} \left(0 - \left[\frac{-A^2}{2} \arccos \frac{r-b}{A \cos \alpha} + \frac{A(r-b)}{2A \cos \alpha} \sqrt{A^2 - \left(\frac{A(r-b)}{A \cos \alpha} \right)^2} \right] \right)$$

$$D = 2 \frac{r}{A} \left(0 - \left[\frac{-A^2}{2} \arccos \frac{r-b}{r} + \frac{A(r-b)}{2r} \sqrt{A^2 - \left(\frac{A(r-b)}{r} \right)^2} \right] \right)$$

$$D = 2 \frac{r}{A} \left(\frac{A^2}{2} \arccos \frac{r-b}{r} - \frac{A(r-b)}{2r} \sqrt{A^2 - \left(\frac{A(r-b)}{r} \right)^2} \right)$$

$$D = \frac{r}{A} \left(A^2 \arccos \frac{r-b}{r} - \frac{A(r-b)}{r} \sqrt{A^2 - \left(\frac{A(r-b)}{r} \right)^2} \right)$$

$$D = Ar \arccos \frac{r-b}{r} - (r-b) \sqrt{A^2 - \left(\frac{A(r-b)}{r} \right)^2}$$

Anhang

$$(1) \quad f^{-1}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$(2) \quad f(x) = \cos(x)$$

$$f^{-1}(x) = \arccos(x)$$

$$(3) \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}}$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(4) \quad \arccos'\left(\frac{x}{A}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}} \cdot \frac{1}{A}$$

$$\arccos'\left(\frac{x}{A}\right) = -\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$(5) \quad \boxed{\frac{-A^2}{2} \arccos'\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{A^2}{2\sqrt{A^2-x^2}}}$$

$$(6) \quad (x\sqrt{A^2-x^2})' = \sqrt{A^2-x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{A^2-x^2}}(-2x)$$

$$(x\sqrt{A^2-x^2})' = \sqrt{A^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}\right)' = \frac{\sqrt{A^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{A^2-x^2}}}$$

$$(7) \quad \left(\frac{-A^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}\right)' = \frac{A^2}{2\sqrt{A^2-x^2}} + \frac{\sqrt{A^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$\left(\frac{-A^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}\right)' = \frac{A^2-x^2}{2\sqrt{A^2-x^2}} + \frac{\sqrt{A^2-x^2}}{2}$$

$$\left(\frac{-A^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}\right)' = \frac{A^2-x^2}{2\sqrt{A^2-x^2}} + \frac{\sqrt{A^2-x^2}}{2}$$

$$\left(-\frac{A^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{A^2 - x^2} \right)' = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{2} + \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{2}$$

$$\left(-\frac{A^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{A^2 - x^2} \right)' = \sqrt{A^2 - x^2}$$

(8)

$$\int \sqrt{A^2 - x^2} \, dx = -\frac{A^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + x \sqrt{A^2 - x^2}$$