Die Versiera der Agnesi

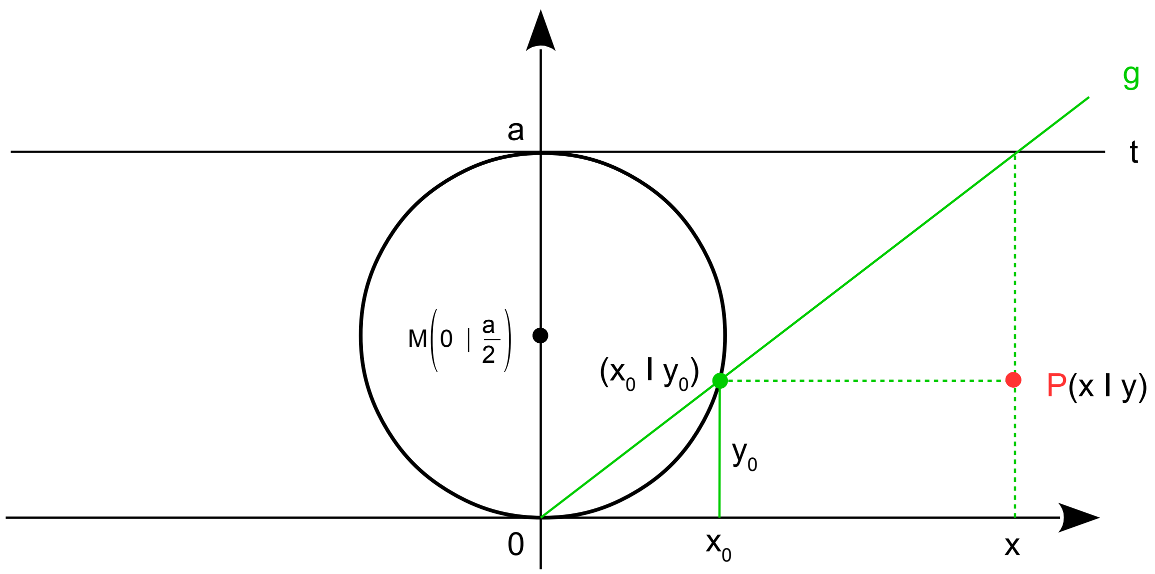
Die **Versiera der Agnesi** ist eine Kurve benannt nach der italienischen Mathematikerin **Maria Gaetana Agnesi (1718 – 1799)**. Die italienische Bezeichnung **la versiera di Agnesi** ist angelehnt an das lateinische Wort „versoria” (=Tau bei Segeln).

Bei der Übersetzung ins Englische wurde im Manuskript **l'avversiera di Agnesi** gelesen, wobei **„avversiera”** so viel wie „Hexe“ bzw. „witch“ , bedeutet, weshalb die Kurve im Englischen **„witch of Agnesi”** , also **„Hexe der Agnesi“** heißt.

https://de.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi

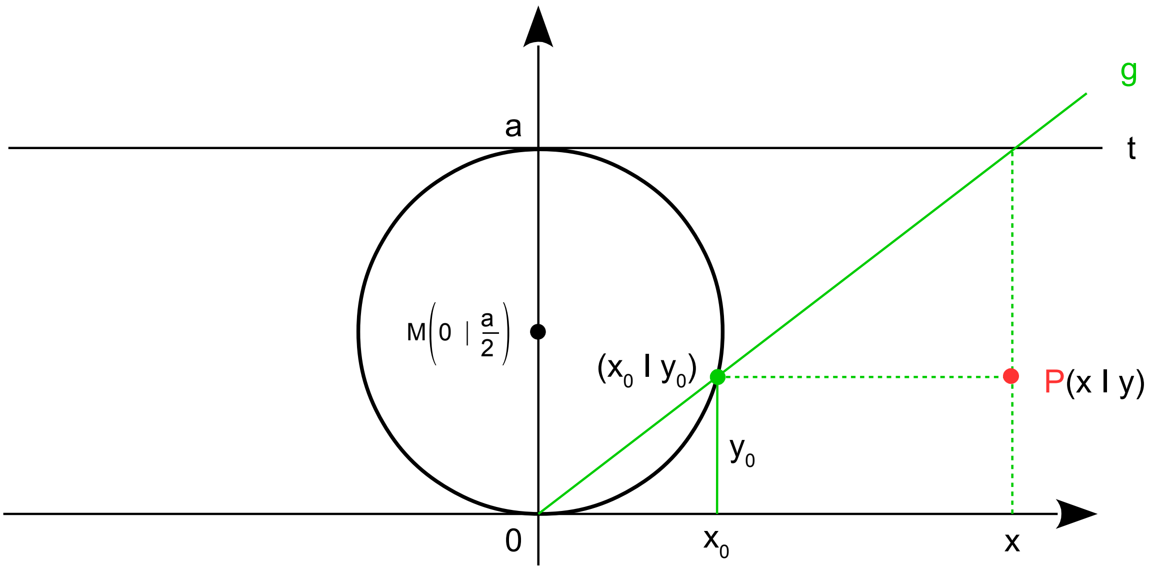
Die Konstruktion der Kurvenpunkte ist wie folgt :

Zu jedem Punkt (x_0 I y_0) auf dem Kreis mit Mittelpunkt $M\left(0 \mid \frac{a}{2}\right)$ und Radius $\frac{a}{2}$ mit der waagrechten Tangente durch den Punkt $(0 \mid a)$ wird gemäß der Abbildung ein Punkt P(x I y) konstruiert.



Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P(x I y) ? Wie lautet die Kurvengleichung ?

Bestimmung der Kurvengleichung :



Kreisgleichung :

$$x_0^2 + \left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\boxed{y = y_0}$$

$$x_0^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x_0^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$x_0^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 + a\,y - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\boxed{x_0^2 = a\,y - y^2}$$

Strahlensatz :

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{x_0}{y} = \frac{x}{a}$$

$$x_0 = \frac{x\,y}{a}$$

$$\boxed{x_0^2 = \frac{x^2 y^2}{a^2}}$$

Gleichsetzen der beiden vorigen gerahmten Gleichungen :

$$a y - y^2 = \frac{x^2 y^2}{a^2}$$

$$a^3 y - a^2 y^2 = x^2 y^2$$

$$a^3 y = x^2 y^2 + a^2 y^2$$

$$a^3 = x^2 y + a^2 y$$

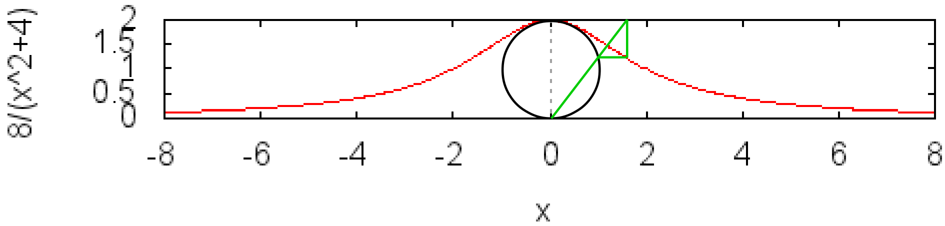
$$a^3 = \left(x^2 + a^2\right) y$$

$$\boxed{y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}}$$

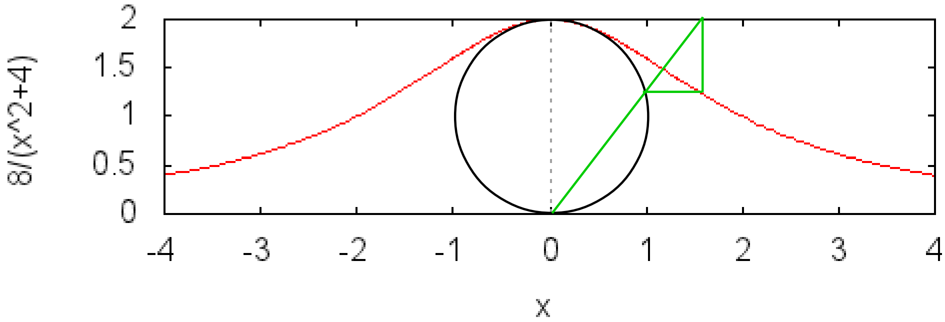
Versiera der Agnesi

Schaubild(er) der Kurve $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ **für** $a = 2$, gezeichnet mit **wxMaxima 13.04.2** :

```
wxplot2d([8/(x^2 + 4) ], [x,-8,8], [y,0,2], [color, red], [gnuplot_preamble, "set size ratio 0.125" ] )$
```




```
wxplot2d([8/(x^2 + 4) ], [x,-4,4], [y,0,2], [color, red], [gnuplot_preamble, "set size ratio 0.25" ] )$
```



Verhalten der Versiera der Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ **für kleine und große x-Werte** :

Wegen $y(-x) = \frac{a^3}{(-x)^2 + a^2} = \frac{a^3}{x^2 + a^2} = y(x)$ ist die Kurve **achsensymmetrisch zur y-Achse**, und es gilt

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} = 0 \quad ,$$

also ist die **x-Achse** eine **waagrechte Asymptote**.

(συμμετρια symmetria = Ebenmaß)
(ασυμπτωτοζ asymptotos = nicht übereinstimmend)

Die Kurve ist auf $\mathbb{R}^+$ **streng monoton fallend** (und wegen der Symmetrie und auf $\mathbb{R}^-$ **streng monoton wachsend**) :

Seien $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}^+$ gegeben , $x_2 = x_1 + h$ mit $h > 0$. Man muss zeigen, dass $y(x_1) > y(x_2)$ folgt :

$$y(x_1) > y(x_2)$$

$$y(x_1) > y(x_1 + h)$$

$$\frac{a^3}{x_1^2 + a^2} > \frac{a^3}{(x_1 + h)^2 + a^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2 + a^2} > \frac{1}{(x_1 + h)^2 + a^2}$$

$$(x_1 + h)^2 + a^2 > x_1^2 + a^2$$

$$x_1^2 + 2x_1h + h^2 + a^2 > x_1^2 + a^2$$

$$2x_1h + h^2 > 0$$

$$(2x_1 + h)h > 0$$

Die letzte Ungleichung ist nach Voraussetzung wahr, und es gilt also $y(x_1) > y(x_2)$.

Kurvendiskussion

$$\boxed{y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}}$$

$$y' = \frac{0\left(x^2 + a^2\right) - a^3(2x)}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{-2a^3x}{\left(x^2 + a^2\right)^2}}$$

$$y'' = \frac{-2a^3\left(x^2 + a^2\right)^2 - \left(-2a^3x\right)2\left(x^2 + a^2\right)2x}{\left(x^2 + a^2\right)^4}$$

$$y'' = \frac{-2a^3\left(x^2 + a^2\right) - \left(-2a^3x\right)2\cdot 2x}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

$$y'' = \frac{-2a^3x^2 - 2a^5 + 8a^3x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

$$y'' = \frac{6a^3x^2 - 2a^5}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

$$\boxed{y'' = \frac{2a^3\left(3x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3}}$$

Wegen $y'(0) = \frac{-2a^3\cdot 0}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = 0$ und des Vorzeichenwechsels von $y'(x)$ an der Stelle $x = 0$, es ist nämlich

$$y'(x) = \frac{-2a^3x}{\left(x^2 + a^2\right)^2} > 0 \quad \text{für} \quad x < 0$$

und

$$y'(x) = \frac{-2a^3x}{\left(x^2 + a^2\right)^2} < 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \quad ,$$

ist $x = 0$ relative Hochstelle und der **Hochpunkt** ist $\boxed{HP(0 \mid a)}$.

$$y'' = \frac{2a^3\left(3x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3} = 0$$

$$2a^3\left(3x^2 - a^2\right) = 0$$

$$3x^2 - a^2 = 0$$

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$x_{1/2} = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$x_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

Wegen der entsprechenden Vorzeichenwechsel der Funktion $y''(x)$ an den Stellen $x_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} a$, liegen Wendestellen vor , und die Wendepunkte sind

$\boxed{WP_1\left(- \frac{\sqrt{3}}{3} a \mid \frac{3}{4} a\right)}$ und $\boxed{WP_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a \mid \frac{3}{4} a\right)}$.

Detaillierte Fragestellung :

Es sei M die Menge der durch die **Agnesische Konstruktion** definierte Punktmenge der Koordinatenebene E .

$M := \{ P(x \mid y) \ : \ P$ entsteht durch die Konstruktion von Agnesi $\}$.

Wir haben gezeigt, dass für alle $P(x \mid y) \in M$ gilt : $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$.

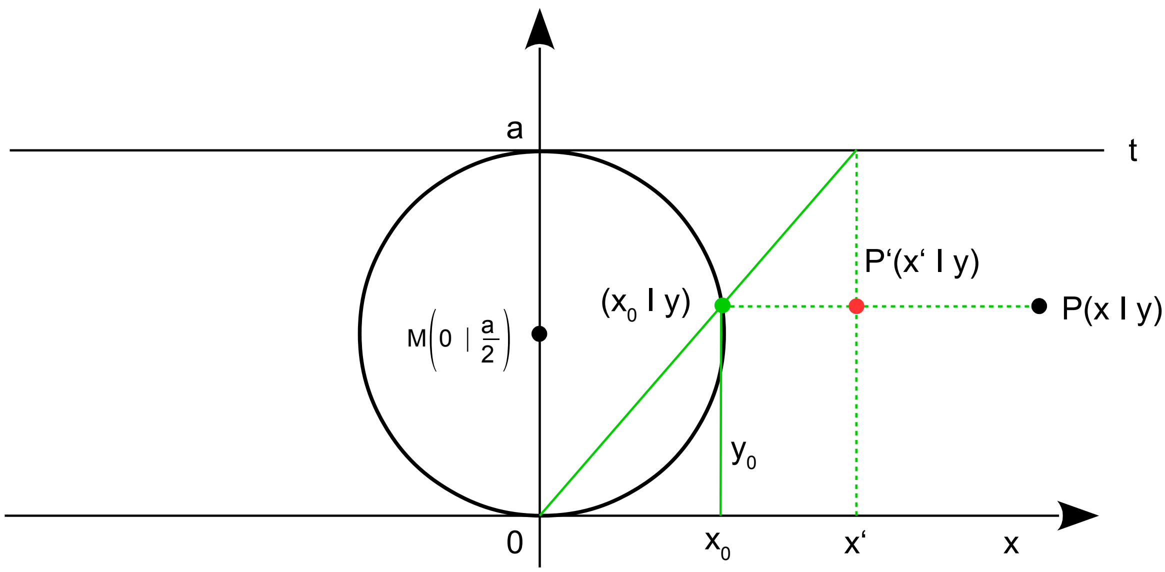
Das heißt , dass alle $P(x \mid y) \in M$ zum Graphen der Funktion $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$

gehören, dass also $P(x \mid y) \in G := \{ P(x \mid y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}$ und $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2} \}$ gilt,

und somit auch $\boxed{M \subset G}$.

Ist auch die umgekehrte Inklusion , $G \subset M$ **, richtig ? Kann man also die Agnesische Kurve als Graph der Funktion** $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ **auffassen ?**

Angenommen, es gäbe einen Punkt $P(x \mid y) \in G$ mit $x > 0$ und $P(x \mid y) \notin M$.



Die Parallele zur x-Achse durch $P(x \mid y)$ schneidet den Kreis im Punkt $P(x_0 \mid y)$. Nach der Konstruktion der **Versiera der Agnesi** gibt es dazu den Punkt $P'(x' \mid y)$ mit $x' > 0$. Es gilt also $y = \dfrac{a^3}{x'^2 + a^2}$. Nach Voraussetzung gilt aber auch $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$, woraus durch Gleichsetzung folgt , dass $x' = x$ ist.

Damit ist $P(x \mid y) = P'(x' \mid y) \in M$, also im Widerspruch zur Voraussetzung $P(x \mid y) \notin M$. Somit ist gezeigt, dass auch die Umkehrung $G \subset M$ richtig, also gilt :

$\boxed{M = G}$.

q.e.d.