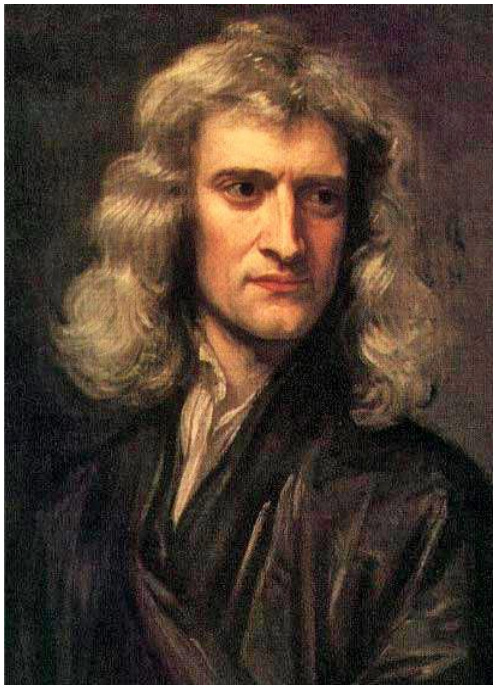
Die Anguinea oder Schlangenkurve von Newton

(lat: anguis = Schlange)

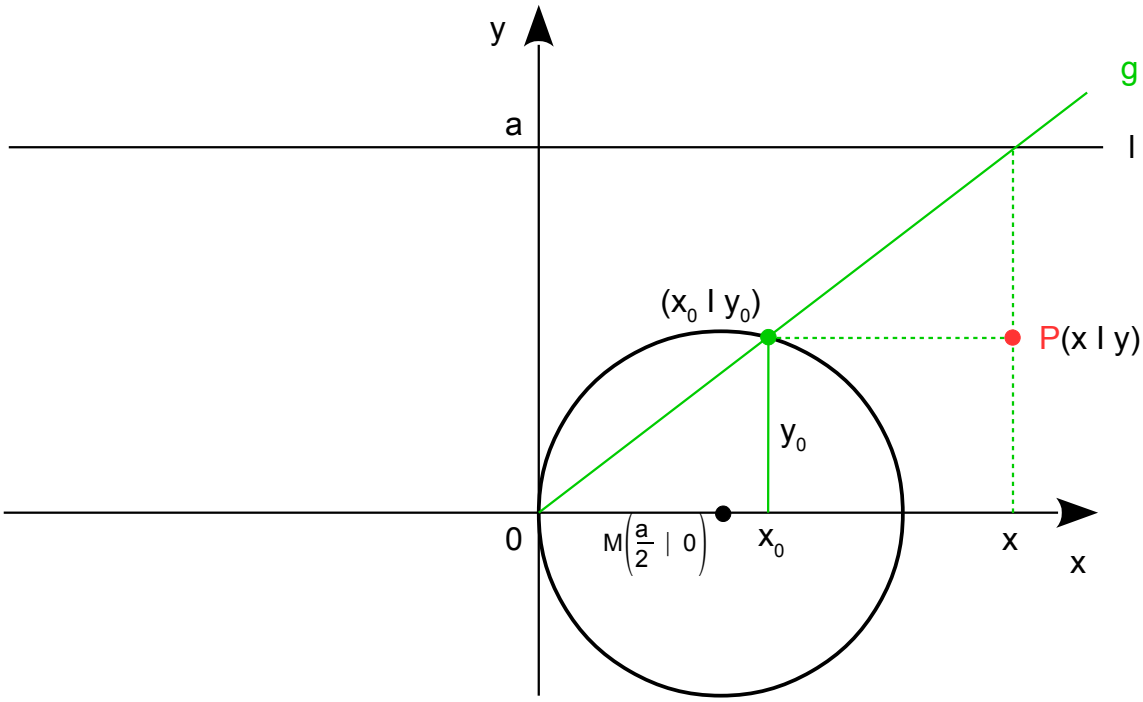


Isaac Newton (1643-1727);
Gemälde von Godfrey Kneller 1689
https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

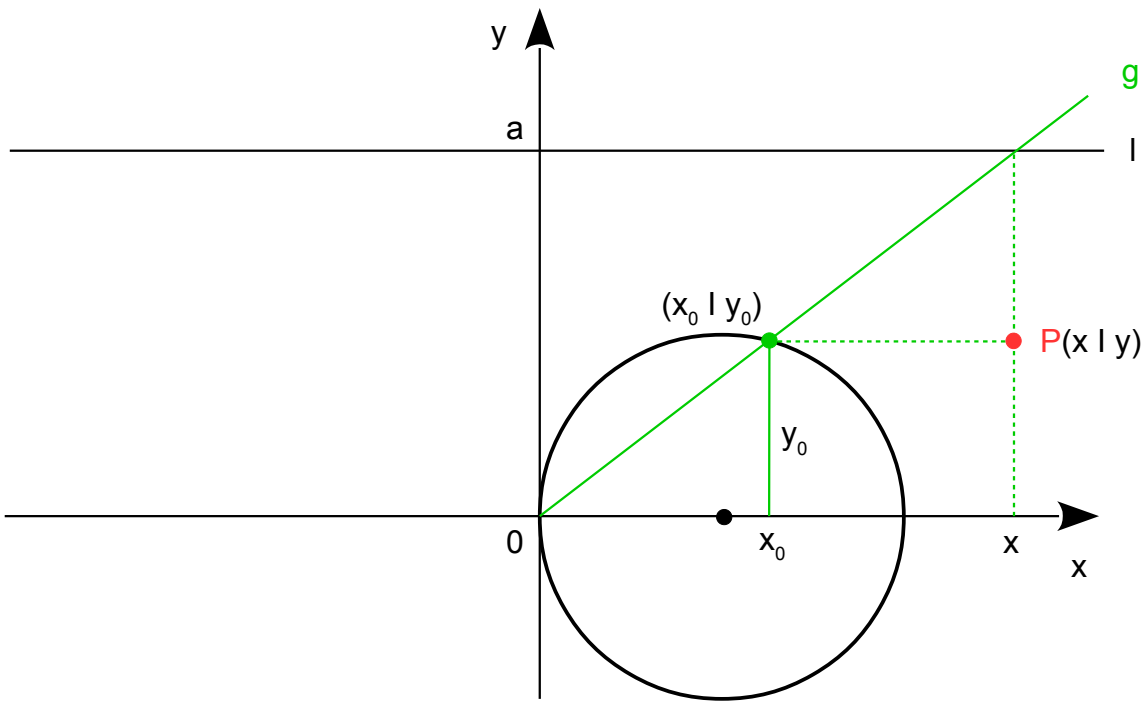
Die Konstruktion der Kurve ist wie folgt :

Zu jedem Punkt $(x_0 \mid y_0)$ auf dem Kreis mit Mittelpunkt $M\left(\frac{a}{2} \mid 0\right)$ und Radius $\frac{a}{2}$ und der Geraden l im Abstand a vom Kreismittelpunkt wird gemäß der Abbildung ein Punkt P(x I y) konstruiert.

Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P(x I y) ?



Bestimmung der Kurvengleichung :



$$\boxed{y = y_0}$$

Kreisgleichung :

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_0^{\,2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\boxed{x_0 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}}$$

Strahlensatz :

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{a}{x}$$

$$\frac{y}{x_0} = \frac{a}{x}$$

$$\boxed{y = \frac{a\,x_0}{x}}$$

Verbinden der beiden vorigen gerahmten Gleichungen

$$\boxed{y = \frac{a\,x_0}{x}} \quad , \quad \boxed{x_0 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}} \quad :$$

$$y = \frac{a\,x_0}{x}$$

$$y = \frac{a\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}\right)}{x}$$

$$y\,x = a\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}\right)$$

$$y\,x = \frac{a^2}{2} \pm a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}$$

$$y\,x - \frac{a^2}{2} = \pm a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}$$

$$\left(y\,x - \frac{a^2}{2}\right)^2 = a^2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2\right)$$

$$y^2x^2 - a^2yx + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4} - a^2y^2$$

$$y^2x^2 - a^2yx = -a^2y^2$$

$$y\,x^2 - a^2x = -a^2y$$

$$y\,x^2 + a^2y = a^2x$$

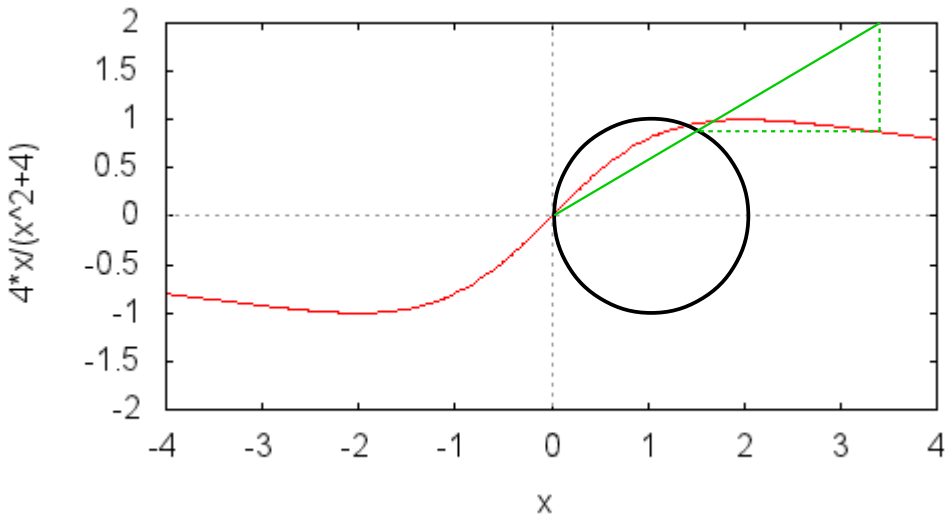
$$y\left(x^2 + a^2\right) = a^2x$$

$$\boxed{y = \frac{a^2x}{x^2 + a^2}}$$

Schlangenkurve von Newton

Schaubild der Kurve $y = \frac{a^2 x}{x^2 + a^2}$ **für** $a = 2$, gezeichnet mit **wxMaxima 13.04.2** :

```
wxplot2d([4*x/(x^2 + 4) ], [x,-4,4], [y,-2,2], [color, red], [gnuplot_preamble, "set size ratio 0.5" ] )$
```



vgl.: Gut, Jutta : http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurven3_2.htm

Wegen $y(-x) = \frac{-a^2 x}{x^2 + a^2} = -\frac{a^2 x}{x^2 + a^2} = -y(x)$ ist die Kurve **punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems**.

Wegen $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{a^2 x}{x^2 + a^2} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{a^2}{x + \frac{a^2}{x}} = 0$ ist die **x-Achse eine waagrechte Assymptote**.

(συμμετρια symmetria = Ebenmaß)
(ασυμπτωτοζ asymptotos = nicht übereinstimmend)

Kurvendiskussion

$$\boxed{y = \frac{a^2 x}{x^2 + a^2}}$$

$$y' = \frac{a^2\left(x^2 + a^2\right) - a^2 x(2x)}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$$

$$y' = \frac{a^2 x^2 + a^4 - 2a^2 x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$$

$$y' = \frac{-a^2 x^2 + a^4}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \quad , \quad \boxed{y' = \frac{-a^2\left(x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^2}}$$

$$y'' = \frac{-2a^2 x\left(x^2 + a^2\right)^2 - \left(-a^2 x^2 + a^4\right)2\left(x^2 + a^2\right)2x}{\left(x^2 + a^2\right)^4}$$

$$y'' = \frac{-2a^2 x\left(x^2 + a^2\right) - \left(-a^2 x^2 + a^4\right)2 \cdot 2x}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

$$y'' = \frac{-2a^2 x^3 - 2a^4 x + 4a^2 x^3 - 4a^4 x}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

$$y'' = \frac{2a^2 x^3 - 6a^4 x}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

$$\boxed{y'' = \frac{2a^2 x\left(x^2 - 3a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3}}$$

$$y' = \frac{-a^2\left(x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = 0$$

$$-a^2\left(x^2 - a^2\right) = 0$$

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 = a^2$$

$x = -a$ oder $x = a$

$y(-a) = -\frac{a}{2}$ $\qquad$ $y(a) = \frac{a}{2}$

Wegen des entsprechenden Vorzeichenwechsels der Funktion $y' = \frac{-a^2(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}$ an den Stellen $-a$, a ergeben sich die **Extrempunkte** zu :

$\boxed{TP\left(-a \mid -\frac{a}{2}\right)}$, $\boxed{HP\left(a \mid \frac{a}{2}\right)}$.

$$y'' = \frac{2a^2x(x^2 - 3a^2)}{(x^2 + a^2)^3} = 0$$

$$x(x^2 - 3a^2) = 0$$

$x = 0$ oder $x^2 - 3a^2 = 0$

$x^2 = 3a^2$

$x = -\sqrt{3}a$ oder $x = \sqrt{3}a$

$y(0) = 0$ $\quad y(-\sqrt{3}a) = -\frac{\sqrt{3}}{4}a$ $\quad y(\sqrt{3}a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

Wegen des entsprechenden Vorzeichenwechsels der Funktion $y'' = \frac{2a^2x(x^2 - 3a^2)}{(x^2 + a^2)^3}$ an den Stellen $-\sqrt{3}a$, 0 , $-\sqrt{3}a$ ergeben sich die **Wendepunkte** zu :

$\boxed{WP_1\left(-\sqrt{3}a \mid -\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)}$, $\boxed{WP_2(0 \mid 0)}$, $\boxed{WP_3\left(\sqrt{3}a \mid \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)}$.