Schnittmengen : Gerade , Kreis, Kugel

Arno Fehringer

Sept. 2015

Schnittmenge : Gerade – Kreis

$$g \quad : \quad y = mx + b$$

$$K_{M;r} \quad : \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Einsetzungsverfahren :

$$(x - x_M)^2 + (mx + b - y_M)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x_M x + x_M{}^2 + m^2x^2 + 2m(b - y_M)x + (b - y_M)^2 = r^2$$

$$(1+m^2)x^2 + 2\big(m(b - y_M) - x_M\big)x + x_M{}^2 + (b - y_M)^2 = r^2$$

$$(1+m^2)x^2 + 2\big(m(b - y_M) - x_M\big)x + x_M{}^2 + (b - y_M)^2 - r^2 = 0$$

$$[\ ] := 2\big(m(b - y_M) - x_M\big) \quad , \quad \{\ \} := x_M{}^2 + (b - y_M)^2 - r^2$$

$$(1+m^2)x^2 + [\ ]x + \{\ \} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-[\ ] \pm\sqrt{[\ ]^2 - 4\big((1+m^2)\big)\{\ \}}}{2(1+m^2)}$$

$$y_{1/2} = m\,x_{1/2}+b$$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \quad , \quad P_2(x_2 \mid y_2)$$

$$\boxed{g \cap K_{M;r} = \{P_1 \ ; \ P_2\}}$$

Schnittmenge : Kreis – Kreis

$$K_{M_1;r_1} \quad : \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^{\,2}$$

$$K_{M_2;r_2} \quad : \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^{\,2}$$

Subtraktionsverfahren :

$$x^2 - 2x_1x + x_1^{\,2} + y^2 - 2y_1y + y_1^{\,2} = r_1^{\,2}$$

$$x^2 - 2x_2x + x_2^{\,2} + y^2 - 2y_2y + y_2^{\,2} = r_2^{\,2}$$

$$-2(x_1-x_2)x + x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - 2(y_1-y_2)y + y_1^{\,2} - y_2^{\,2} = r_1^{\,2} - r_2^{\,2}$$

$$-2(x_1-x_2)x - 2(y_1-y_2)y + x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + y_1^{\,2} - y_2^{\,2} = r_1^{\,2} - r_2^{\,2}$$

$$-2(x_1-x_1)x - 2(y_1-y_2)y = -x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - y_1^{\,2} + y_2^{\,2} + r_1^{\,2} - r_2^{\,2}$$

$$2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y = x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + y_1^{\,2} - y_2^{\,2} - r_1^{\,2} + r_2^{\,2}$$

$$2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y = x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + y_1^{\,2} - y_2^{\,2} - \left(r_1^{\,2} - r_2^{\,2}\right)$$

$$y = -\frac{(x_1-x_2)}{(y_1-y_2)}x + \frac{x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + y_1^{\,2} - y_2^{\,2} - \left(r_1^{\,2} - r_2^{\,2}\right)}{2(y_1-y_2)}$$

$$m := -\frac{(x_1-x_2)}{(y_1-y_2)} \quad , \quad b := \frac{x_1^{\,2}-x_2^{\,2}+y_1^{\,2}-y_2^{\,2} - \left(r_1^{\,2}-r_2^{\,2}\right)}{2(y_1-y_2)}$$

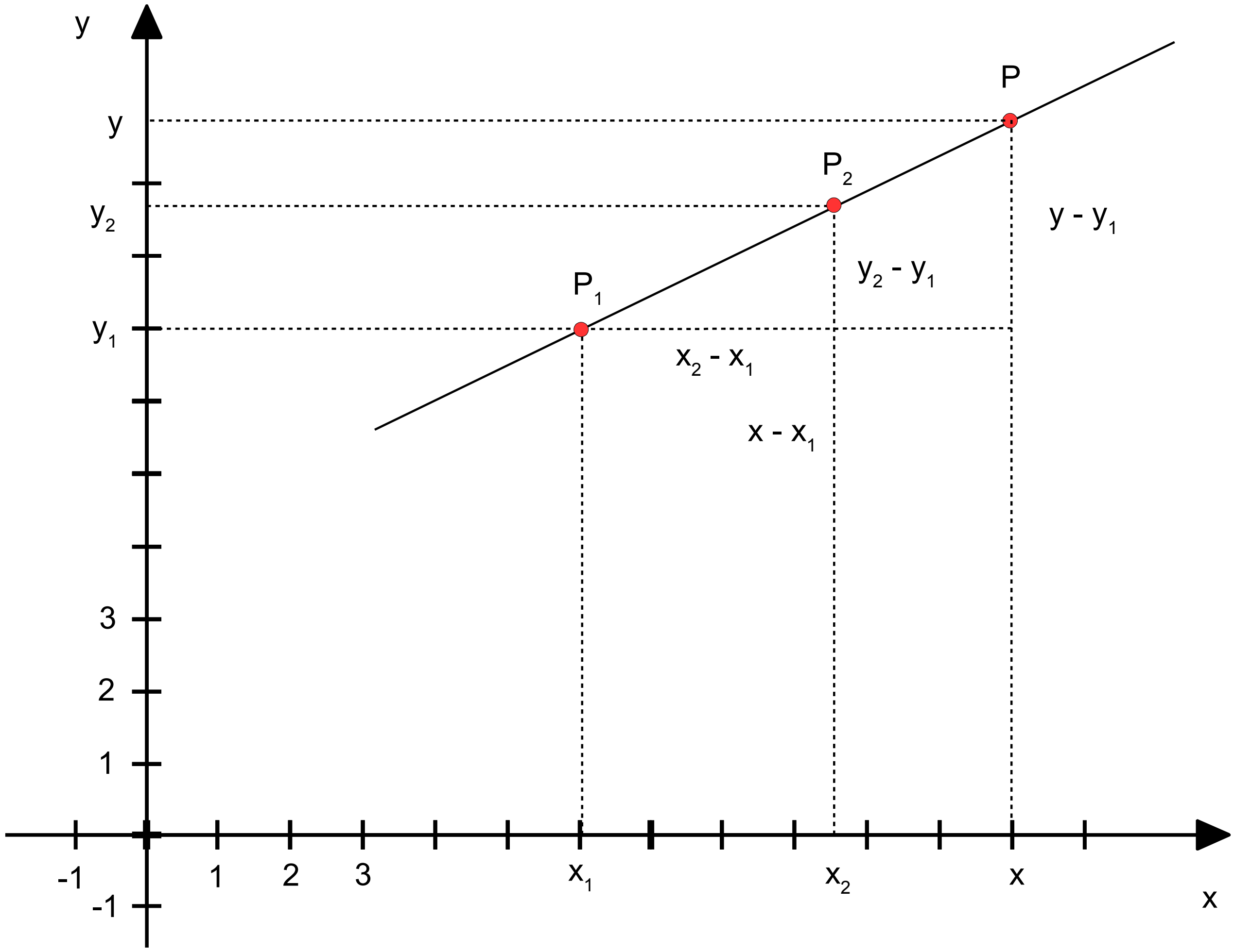
$$y = mx + b$$

$$g \quad : \quad y = mx + b$$

Es ist $K_{M_1;r_1} \cap K_{M_2;r_2} = \{P_1 \ ; \ P_2\} \subset g = P_1P_2$.

Wegen $g \cap K_{M_1;r_1} = \{P_1 \ ; \ P_2\}$ **genügt es,** $g \cap K_{M_1;r_1}$ **zu berechnen.**

Parameterdarstellung einer Geraden (in der Ebene)



Gegeben sei die **Gerade durch die Punkte** P_1 , P_2 : $g = P_1P_2$

Bemerkung :
Ein **Axiom** der Euklidischen Geometrie besagt, dass auf jeder Geraden wenigstens 2 Punkte liegen.
Ein weiteres **Axiom** besagt, dass es zu je zwei Punkten P_1 , P_2 auf einer Geraden wenigstens einen Punkt P_3 gibt, der zwischen P_1 und P_2 liegt und wenigstens einen Punkt P_4 , so dass P_2 zwischen P_1 und P_4 liegt.

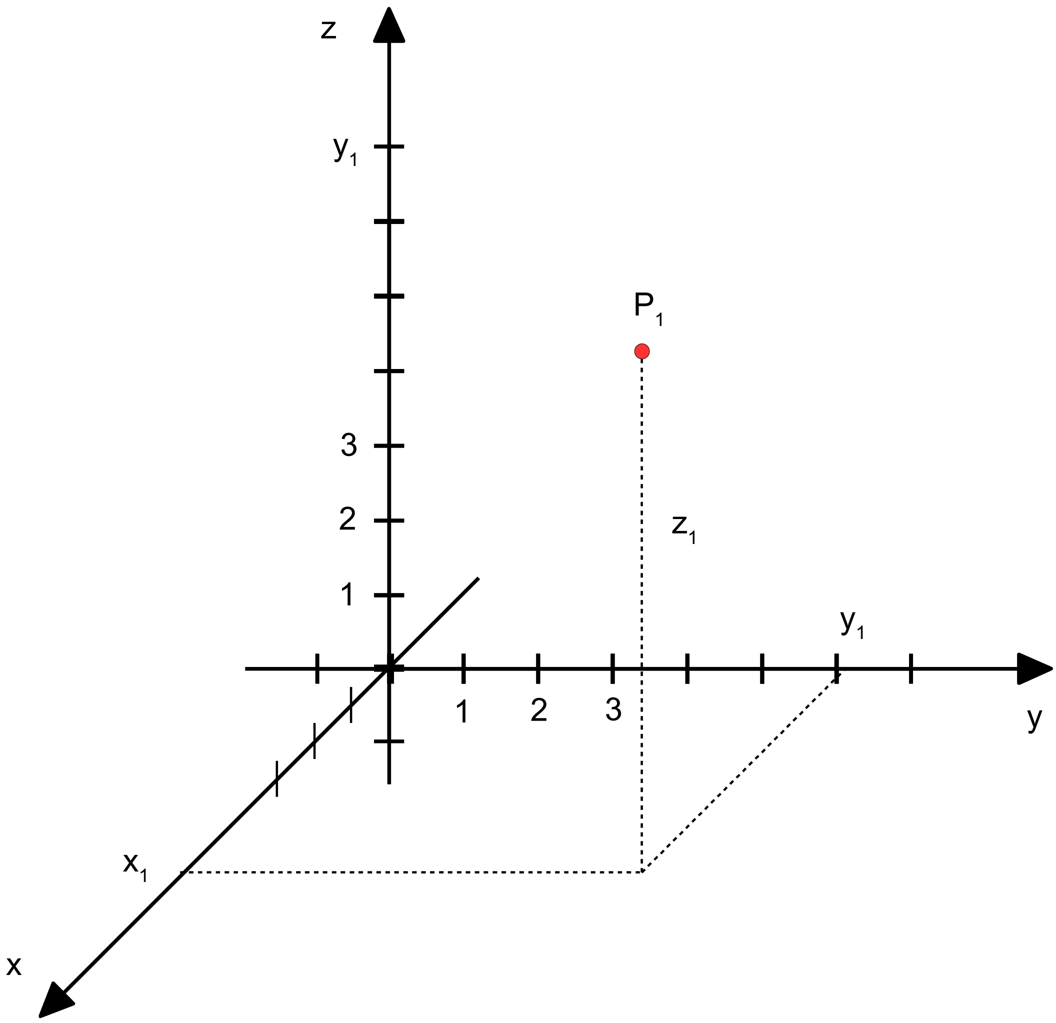
Für alle Punkte P der Geraden g gilt nach dem Strahlensatz :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = s \quad .$$

Daraus erhält man die **Parameterdarstellung der Geraden** g **:**

$$g \; : \quad \begin{aligned} x &= x_1 + s(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + s(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

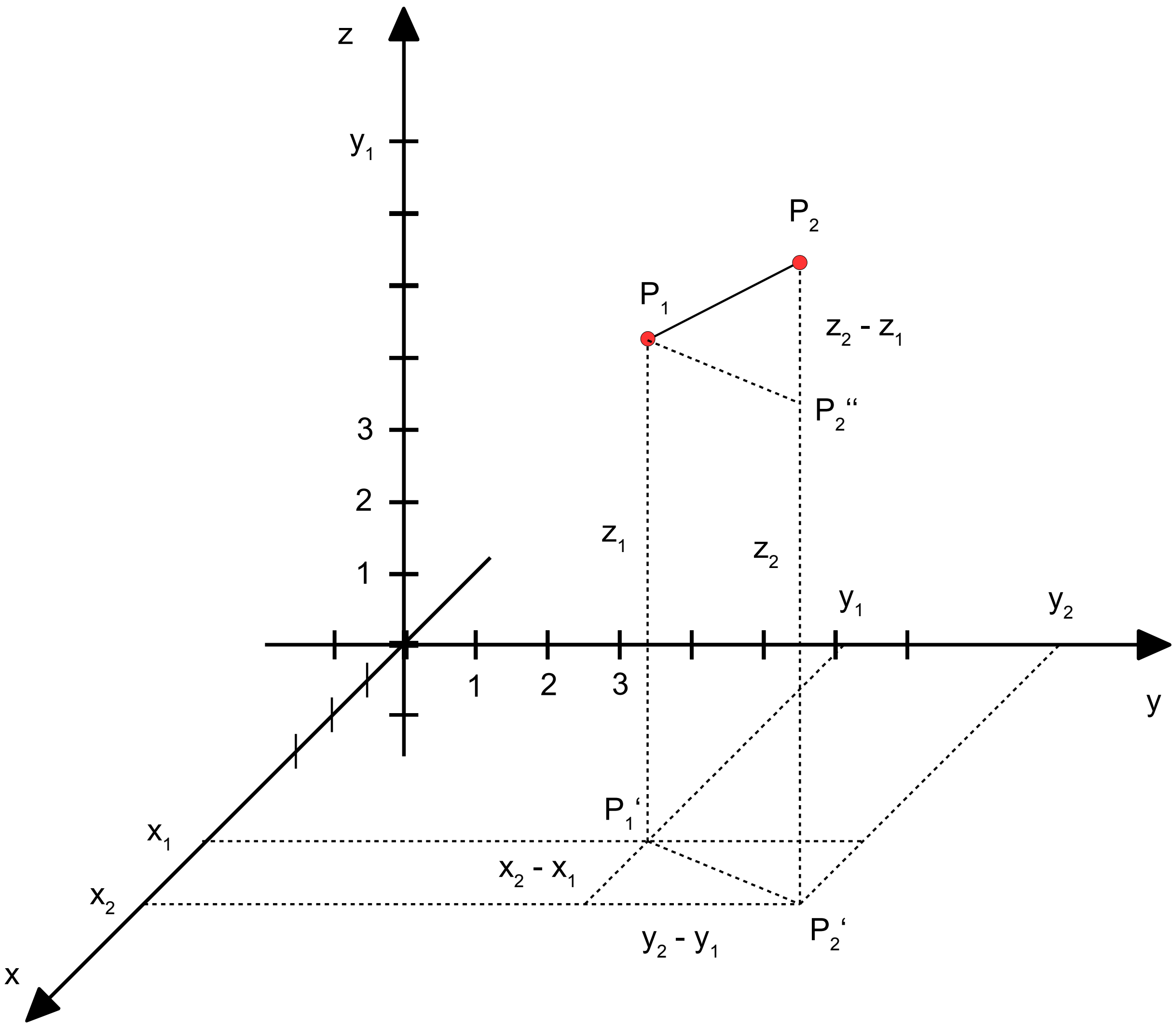
Koordinaten eines Punktes (im Raum)



Schreibweise : $P_1 = P_1(x_1|y_1|z_1)$

x_1 heißt **x-Koordinate**, y_1 heißt **y-Koordinate** , z_1 heißt **z-Koordinate des Punktes** P_1 .

Abstand zweier Punkte (im Raum)



$$|P_1P_2|^2 = |P_1P_2''|^2 + (z_2 - z_1)^2$$

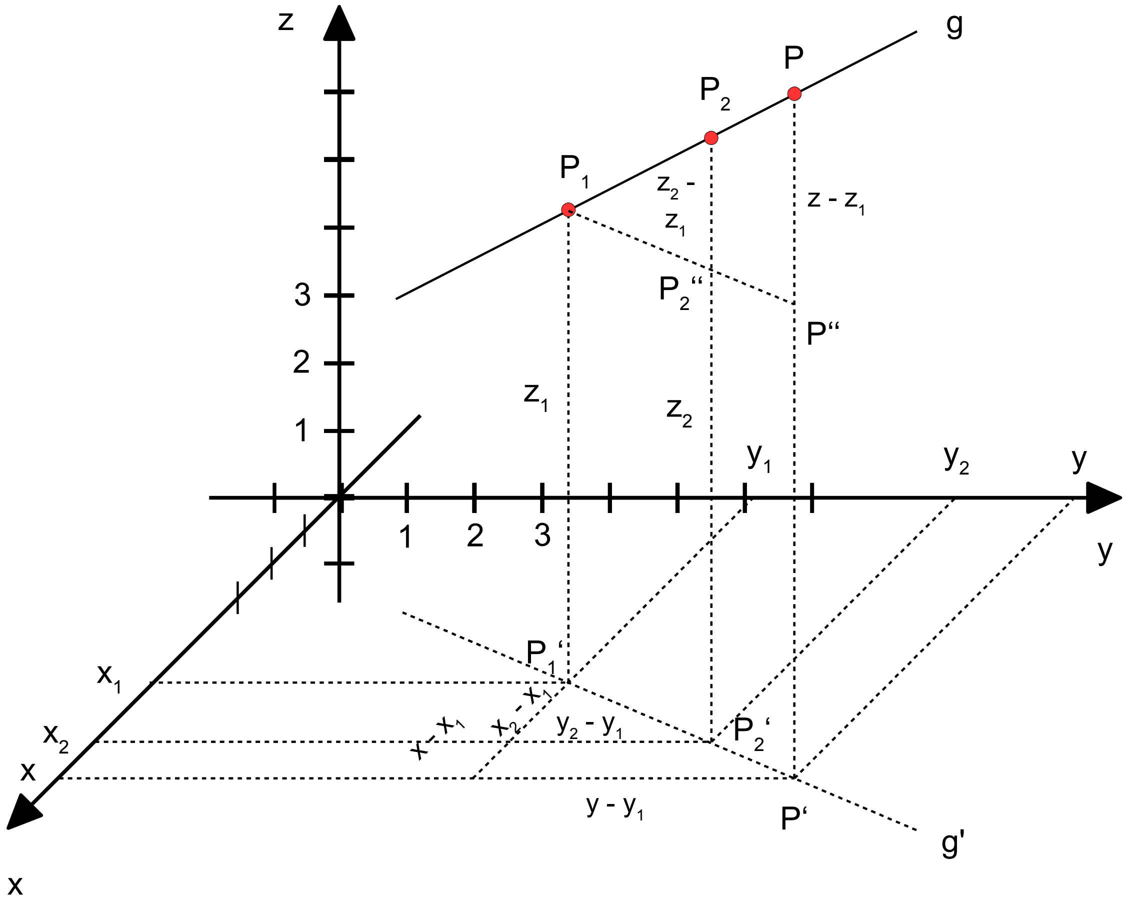
$$|P_1P_2|^2 = |P_1'P_2'|^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Abstand der Punkte P_1 , P_2 :

$$\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Parameterdarstellung einer Geraden im Raum



Gegeben sei die **Gerade durch die Punkte** P_1 , P_2 : $g = P_1P_2$

Man muss entsprechend der **Axiome der Euklidischen Geometrie der Ebene** annehmen, dass auf jeder Geraden wenigstens 4 Punkte liegen. Außerdem muss man annehmen, dass zwei Ebenen entweder parallel sind oder sich in genau einer Geraden schneiden.

Die senkrecht zur xy-Ebene stehende Projektionsebene enthält die Gerade $g = P_1P_2$ und schneidet die xy-Ebene in der Geraden $g' = P_1'P_2'$.

Für alle Punkte P der Geraden g gilt nach dem Strahlensatz :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = s \quad , \quad \frac{P_1'P'}{P_1'P_2'} = s \quad , \quad \frac{P_1P''}{P_1P_2''} = s = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{P_1P}{P_1P_2}$$

Daraus erhält man die **Parameterdarstellung der Geraden** g **:**

$$g \; : \quad \begin{aligned} x &= x_1 + s\left(x_2-x_1\right) \\ y &= y_1 + s\left(y_2-y_1\right) \\ z &= z_1 + s\left(z_2-z_1\right) \end{aligned} \qquad \text{oder in anderer Form} \qquad \begin{aligned} x &= x_F + s\,u_x \\ y &= y_F + s\,u_y \\ z &= z_F + s\,u_z \end{aligned} \quad ,$$

wobei $F\left(x_F|y_F|z_F\right) := P\left(x_1|y_1|z_1\right)$ **Fußpunkt** heißt, und $u_x := \left(x_2-x_1\right)$, $u_y := \left(y_2-y_1\right)$, $u_z := \left(z_2-z_1\right)$ die **Richtung der Geraden** angeben.

Schnittmenge : Gerade – Kugel

$$g \quad : \qquad \begin{aligned} x &= x_F + s u_x \\ y &= y_F + s u_y \\ z &= z_F + s u_z \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$$

$$Ku_{M;r} \quad : \qquad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$$

Einsetzungsverfahren :

$$\begin{aligned} x &= u_x s + x_F \\ y &= u_x s + y_F \\ z &= u_x s + z_F \end{aligned}$$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$$

$$(u_x s + x_F - x_M)^2 + (u_y s + y_F - y_M)^2 + (u_z s + z_F - z_M)^2 = r^2$$

$$u_x^2 s^2 + 2u_x(x_F - x_M)s + (x_F - x_M)^2 + u_y^2 s^2 + 2u_y(y_F - y_M)s + (y_F - y_M)^2 + u_z^2 s^2 + 2u_z(z_F - z_M)s + (z_F - z_M)^2 = r^2$$

$$u_x^2 s^2 + u_y^2 s^2 + u_z^2 s^2 + 2u_x(x_F - x_M)s + 2u_y(y_F - y_M)s + 2u_z(z_F - z_M)s + (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 + (z_F - z_M)^2 = r^2$$

$$(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)s^2 + 2[u_x(x_F - x_M) + u_y(y_F - y_M) + u_z(z_F - z_M)]s + (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 + (z_F - z_M)^2 = r^2$$

$$s^2 + 2[u_x(x_F - x_M) + u_y(y_F - y_M) + u_z(z_F - z_M)]s + (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 + (z_F - z_M)^2 = r^2$$

$$s^2 + 2[u_x(x_F - x_M) + u_y(y_F - y_M) + u_z(z_F - z_M)]s + (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 + (z_F - z_M)^2 - r^2 = 0$$

$$2[\ ] := 2[u_x(x_F - x_M) + u_y(y_F - y_M) + u_z(z_F - z_M)]$$

$$\{\ \} := (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 + (z_F - z_M)^2 - r^2$$

$$s^2 + 2[\ ]s + \{\ \} = 0$$

$$s_{1/2} = -[\ ] \pm \sqrt{[\ ]^2 - \{\ \}}$$

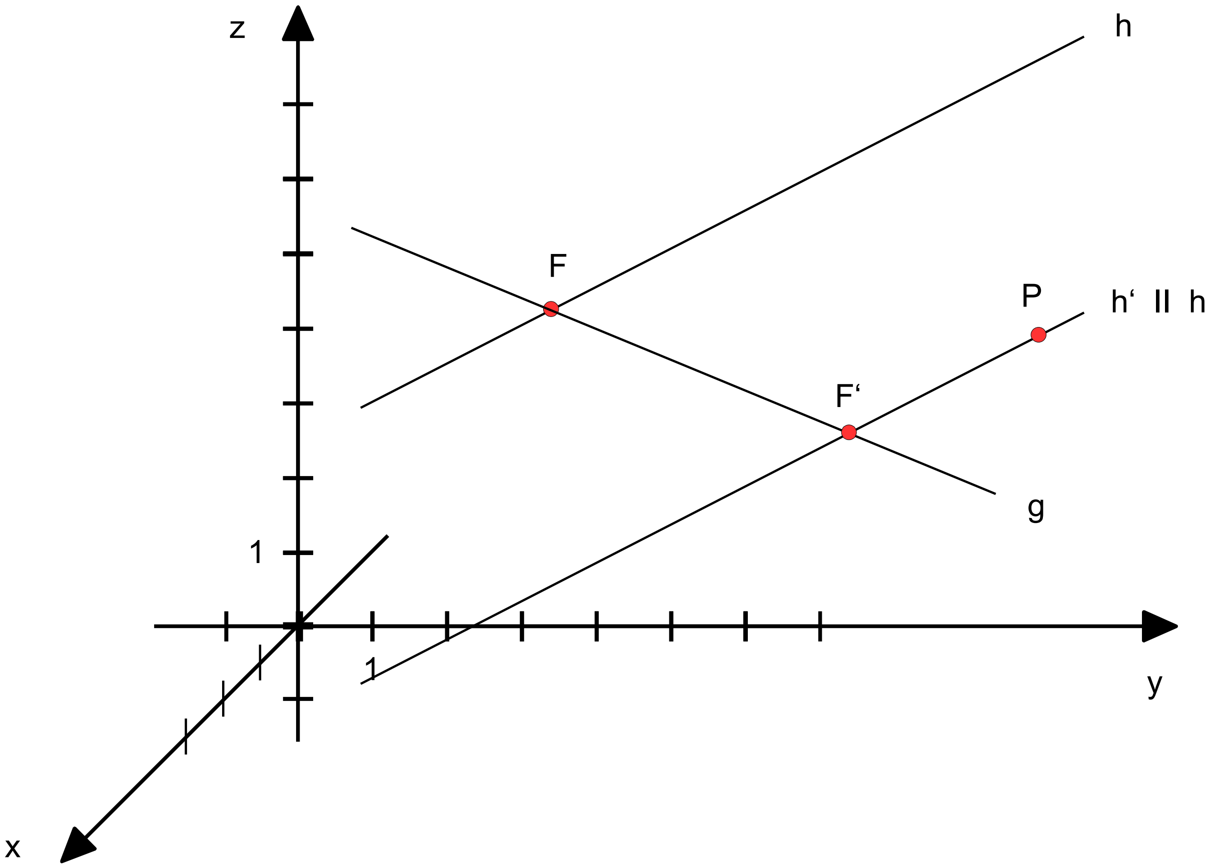
$$P_i(x_i = u_x s_i + x_F \mid y_i = u_y s_i + y_F \mid z_i = u_z s_i + z_F) \quad , \qquad i = 1 , 2$$

$$\boxed{g \cap Ku_{M;r} = \{ P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1) \ ; \ P_2(x_2 \mid y_2 \mid z_2) \}}$$

Parameterdarstellung der Ebene im Raum

Gegeben seien 2 Geraden g , h im Raum, die sich im Punkt F schneiden. Sind die Richtungen u_x , u_y , u_z bzw. v_x , v_y , v_z unterschiedlich, so spannen sie eine Ebene E auf.

Genauer gesagt, wird die Ebene E durch sämtliche Geraden erzeugt, die zu g oder h parallel sind.



Für alle Punkte P der Ebene E gilt :

$$x = x_{F'} + t v_x$$
$$y = y_{F'} + t v_y$$
$$z = z_{F'} + t v_z$$

$$x = x_F + s u_x + t v_x$$
$$y = y_F + s u_y + t v_y$$
$$z = z_F + s u_z + t v_z$$

Die **Parameterdarstellung der Ebene** E **lautet also :**

$$E : \begin{array}{l} x = x_F + s u_x + t v_x \\ y = y_F + s u_y + t v_y \\ z = z_F + s u_z + t v_z \end{array}$$

Koordinatendarstellung der Ebene im Raum

$$\begin{aligned} x &= x_F + s u_x + t v_x \\ y &= y_F + s u_y + t v_y \\ z &= z_F + s u_z + t v_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x s + v_x t &= x - x_F \\ u_y s + v_y t &= y - y_F \end{aligned} \qquad \left.\begin{array}{l} \mid \cdot\, v_y \\ \mid \cdot\, v_x \end{array}\right] - \qquad \left.\begin{array}{l} \mid \cdot\, u_y \\ \mid \cdot\, u_x \end{array}\right] -$$

$$\left(u_x v_y - u_y v_x\right)s = \left(x - x_F\right)v_y - \left(y - y_F\right)v_x$$

$$\left(v_x u_y - v_y u_x\right)t = \left(x - x_F\right)u_y - \left(y - y_F\right)u_x$$

$$\left(u_x v_y - u_y v_x\right)t = u_x\left(y - y_F\right) - u_y\left(x - x_F\right)$$

$$s = \frac{\left(x - x_F\right)v_y - \left(y - y_F\right)v_x}{\left(u_x v_y - u_y v_x\right)}$$

$$t = \frac{u_x\left(y - y_F\right) - u_y\left(x - x_F\right)}{\left(u_x v_y - u_y v_x\right)}$$

$$z = z_F + s u_z + t v_z$$

$$- s u_z - t v_z + z - z_F = 0$$

$$- \frac{\left(\left(x - x_F\right)v_y - \left(y - y_F\right)v_x\right)u_z}{\left(u_x v_y - u_y v_x\right)} - \frac{\left(u_x\left(y - y_F\right) - u_y\left(x - x_F\right)\right)v_z}{\left(u_x v_y - u_y v_x\right)} + z - z_F = 0$$

$$- \left(\left(x-x_F\right)v_y - \left(y-y_F\right)v_x\right)u_z - \left(u_x\left(y-y_F\right) - u_y\left(x-x_F\right)\right)v_z + \left(z-z_F\right)\left(u_x v_y - u_y v_x\right) = 0$$

$$\left(x-x_F\right)\left(u_y v_z - u_z v_y\right) - \left(y-y_F\right)\left(u_x v_z - u_z v_y\right) + \left(z-z_F\right)\left(u_x v_y - u_y v_x\right) = 0$$

$$\left(x-x_F\right)\left(u_y v_z-u_z v_y\right) - \left(y-y_F\right)\left(u_x v_z-u_z v_y\right) + \left(z-z_F\right)\left(u_x v_y-u_y v_x\right) = 0$$

$$x\left(u_y v_z-u_z v_y\right)-y\left(u_x v_z-u_z v_y\right)+z\left(u_x v_y-u_y v_x\right)-x_F\left(u_y v_z-u_z v_y\right)+y_F\left(u_x v_z-u_z v_y\right)-z_F\left(u_x v_y-u_y v_x\right) = 0$$

$$a := \left(u_y v_z-u_z v_y\right) \qquad b := -\left(u_x v_z-u_z v_y\right) \qquad c := \left(u_x v_y-u_y v_x\right)$$

$$d := -x_F\left(u_y v_z-u_z v_y\right)+y_F\left(u_x v_z-u_z v_y\right)-z_F\left(u_x v_y-u_y v_x\right)$$

Die **Koordinatendarstellung der Ebene** E **im Raum** lautet also :

$$E \;:\; ax + by + cz + d = 0$$

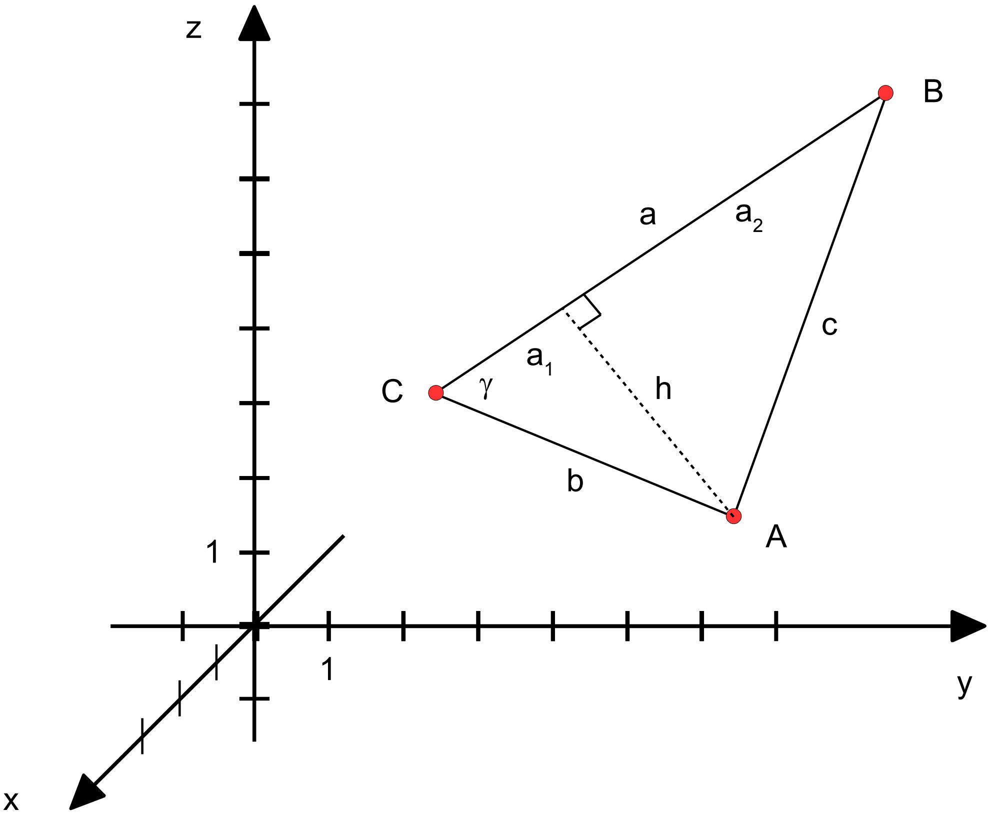
Richtungen

Gegeben seien die Punkte $C(x_C|y_C|z_C)$, $A(x_A|y_A|z_A)$.
Der Ausdruck

$$\overrightarrow{CA} := \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \\ z_A - z_C \end{pmatrix}$$

heißt **Richtung von** C **nach** A **.** Die Zahlen $x_A - x_C$, $y_A - y_C$, $z_A - z_C$ heißen **Koordinaten der Richtung.**

Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit den Seiten a , b und dem Winkel γ .
Gesucht ist die Länge der Seite c .



$$c^2 = h^2 + a_2^2$$

$$= h^2 + (a-a_1)^2$$

$$= (b\sin\gamma)^2 + (a-b\cos\gamma)^2$$

$$= b^2\sin^2\alpha + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma$$

$$= a^2 + b^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$$

$$= a^2 + b^2\underbrace{(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)}_{1} + c^2 - 2ab\cos\gamma$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$|AB|^2 = |CB|^2 + |CA|^2 - 2|CB||CA|\cos\gamma$$

Für die Koordinaten der Richtungen $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ gilt :

$$\begin{aligned} x_B - x_C &= x_B - x_A + x_A - x_C \\ y_B - y_C &= y_B - y_A + y_A - y_C \\ z_B - z_C &= z_B - z_A + z_A - z_C \quad , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (x_B - x_A) &= (x_B - x_C) - (x_A - x_C) \\ (y_B - y_A) &= (y_B - y_C) - (y_A - y_C) \\ (z_B - z_A) &= (z_B - z_C) - (z_A - z_C) \end{aligned}$$

und

$$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

$$|AB|^2 = \big((x_B - x_C) - (x_A - x_C)\big)^2 + \big((y_B - y_C) - (y_A - y_C)\big)^2 + \big((z_B - z_C) - (z_A - z_C)\big)^2$$

$$\begin{aligned} |AB|^2 = \; & (x_B - x_C)^2 - 2(x_B - x_C)(x_A - x_C) + (x_A - x_C)^2 \\ & + (y_B - y_C)^2 - 2(y_B - y_C)(y_A - y_C) + (y_A - y_C)^2 \\ & + (z_B - z_C)^2 - 2(z_B - z_C)(z_A - z_C) + (z_A - z_C)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AB|^2 = \; & (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 + (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 \\ & - 2\big[(x_B - x_C)(x_A - x_C) + (y_B - y_C)(y_A - y_C) + (z_B - z_C)(z_A - z_C)\big] \end{aligned}$$

$$|AB|^2 = |CB|^2 + |CA|^2 - 2\big[(x_B - x_C)(x_A - x_C) + (y_B - y_C)(y_A - y_C) + (z_B - z_C)(z_A - z_C)\big]$$

Der Vergleich mit dem Kosinussatz liefert :

$$(x_B - x_C)(x_A - x_C) + (y_B - y_C)(y_A - y_C) + (z_B - z_C)(z_A - z_C) = |CB||CA| \cos\gamma$$

Die linke Seite bezeichnet man auch als **Skalarprodukt der Richtungen** $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} := (x_B - x_C)(x_A - x_C) + (y_B - y_C)(y_A - y_C) + (z_B - z_C)(z_A - z_C) = |CB||CA| \cos\gamma$$

Satz

Zwei Richtungen $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ stehen senkrecht aufeinander, genau dann wenn das Skalarprodukt gleich Null ist :

$$\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Schnittmenge : Ebene – Kugel

$E \quad : \quad ax + by + cz + d = 0$

$Ku_{M;r} \quad : \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$

Wählt man einen Punkt $F(x_F|y_F|z_F)$ der Ebene , so folgt mit der Ebenengleichung

$ax_F + by_F + cz_F + d = 0$

$ax + by + cz + d = 0$

$a(x-x_F) + b(y-y_F) + c(z-z_F) = 0$

$E \quad : \quad a(x-x_F) + b(y-y_F) + c(z-z_F) = 0$

Interpretation als **Skalarprodukt-Gleichung** für Richtungen $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x-x_F \\ y-y_F \\ z-z_F \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_F \\ y-y_F \\ z-z_F \end{pmatrix} = 0$$

Das heißt, dass alle Richtungen $\begin{pmatrix} x-x_F \\ y-y_F \\ z-z_F \end{pmatrix}$ der Ebene senkrecht auf der Richtung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ stehen.

Ohne der Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass für die Richtung senkrecht zur Ebene $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$ gelte.

Jetzt legt man die **Lotgerade** l **zur Ebene** E **durch den Mittelpunkt** M **der Kugel :**

$$l \quad : \quad \begin{aligned} x &= x_M + sa \\ y &= y_M + sb \\ z &= z_M + sc \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad a^2+b^2+c^2 = 1$$

Schnittmenge Lotgerade mit der Ebene :

$$a(x-x_F) + b(y-y_F) + c(z-z_F) = 0$$

$$a(x_M + sa-x_F) + b(y_M + sb-y_F) + c(z_M + sc-z_F) = 0$$

$$a(x_M-x_F) + a^2s + b(y_M-y_F) + b^2s + c(z_M-z_F) + c^2s = 0$$

$$(a^2+b^2+c^2)s + a(x_M-x_F) + b(y_M-y_F) + c(z_M-z_F) = 0$$

$$(a^2+b^2+c^2)s = -a(x_M-x_F) - b(y_M-y_F) - c(z_M-z_F)$$

$$(a^2+b^2+c^2)s = a(x_F-x_M) + b(y_F-y_M) + c(z_F-z_M)$$

$$s = a(x_F-x_M) + b(y_F-y_M) + c(z_F-z_M)$$

$$s = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_F-x_M \\ y_F-y_M \\ z_F-z_M \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene :

$$C(x_C|y_C|z_C) = C(x_M+sa \mid y_M+sb \mid z_M+sc)$$

Abstand $|MC|$ **:**

$$|MC|^2 = (x_C-x_M)^2 + (y_C-y_M)^2 + (z_C-z_M)^2$$

$$|MC|^2 = (sa)^2 + (sb)^2 + (sc)^2$$

$$|MC|^2 = s^2a^2 + s^2b^2 + s^2c^2$$

$$|MC|^2 = s^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$|MC|^2 = s^2$$

$$|MC| = |s|$$

Wir nehmen an, dass $E \cap Ku_{M;r} \neq \{\ \}$ und irgend ein Punkt $S \in E \cap Ku_{M;r}$ gegeben sei . Dann ist das Dreieck ΔMCS rechtwinklig und es gilt :

$$|MS|^2 = |SC|^2 + |CM|^2$$

$$r^2 = |SC|^2 + s^2$$

$$|SC|^2 = r^2 - s^2 =: R^2$$

Alle Punkte $S \in E \cap Ku_{M;r}$ liegen auf dem Kreis $K_{C;R} \subset E$, das heißt

$$E \cap Ku_{M;r} \subset K_{C;R} \subset E \quad .$$

Auch die Umkehrung $K_{C;R} \subset E \cap Ku_{M;r}$ ist richtig. Denn ist $S \in K_{C;R} \subset E$, so folgt

$$|MS|^2 = |SC|^2 + |CM|^2$$

$$|MS|^2 = R^2 + s^2$$

$$|MS|^2 = r^2 - s^2 + s^2$$

$$|MS|^2 = r^2$$

$$S \in E \cap K_{M;r} \quad .$$

Die **Schnittmenge Ebene - Kugel** ist gegeben durch $\boxed{E \cap Ku_{M;r} = K_{C;R} \subset E}$.

Schnittmenge : Kugel – Kugel

$$Ku_{M_1;r_1} \quad : \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^{\,2} \quad , \qquad M_1(x_1|y_1|z_1)$$

$$Ku_{M_2;r_2} \quad : \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^{\,2} \quad , \qquad M_2(x_2|y_2|z_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x_1x + x_1^{\,2} + y^2 - y_1y + y_1^{\,2} + z^2 - 2z_1z + z_1^{\,2} - r_1^{\,2} = 0 \\ x^2 - 2x_2x + x_2^{\,2} + y^2 - y_2y + y_2^{\,2} + z^2 - 2z_2z + z_2^{\,2} - r_2^{\,2} = 0 \end{array}\right] -$$

$$-2(x_2-x_1)x - 2(y_2-y_1)y - 2(z_2-z_1)z + x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}-x_2^{\,2}-y_2^{\,2}-z_2^{\,2}+r_2^{\,2}-r_1^{\,2} = 0$$

$$\frac{-2(x_2-x_1)x - 2(y_2-y_1)y - 2(z_2-z_1)z + x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}-x_2^{\,2}-y_2^{\,2}-z_2^{\,2}+r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}{\sqrt{(-2(x_2-x_1))^2+(-2(y_2-y_1))^2+(-2(z_2-z_1))^2}} = 0$$

$$\frac{-(x_2-x_1)x - (y_2-y_1)y - (z_2-z_1)z}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} + \frac{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}-x_2^{\,2}-y_2^{\,2}-z_2^{\,2}+r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}{2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} = 0$$

$$\frac{-(x_2-x_1)x - (y_2-y_1)y - (z_2-z_1)z}{|M_1M_2|} + \frac{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}-x_2^{\,2}-y_2^{\,2}-z_2^{\,2}+r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}{2|M_1M_2|} = 0$$

$$\frac{-(x_2-x_1)}{|M_1M_2|}x + \frac{-(y_2-y_1)}{|M_1M_2|}y + \frac{-(z_2-z_1)}{|M_1M_2|}z + \frac{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}-x_2^{\,2}-y_2^{\,2}-z_2^{\,2}+r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}{2|M_1M_2|} = 0$$

$$a := \frac{-(x_2-x_1)}{|M_1M_2|} \qquad b := \frac{-(y_2-y_1)}{|M_1M_2|} \qquad c := \frac{-(z_2-z_1)}{|M_1M_2|}$$

$$d := \frac{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}-x_2^{\,2}-y_2^{\,2}-z_2^{\,2}+r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}{2|M_1M_2|}$$

$$E \quad : \quad ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{mit} \qquad \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Es gilt also $Ku_{M_1;r_1} \cap Ku_{M_2;r_2} \subset E$ **.**

Nun betrachte man wieder die **Lotgerade** l **zu** E **durch den Mittelpunkt** M_1 **der Kugel** $Ku_{M_1;r_1}$

$$l \quad : \quad \begin{matrix} x = x_1 + sa \\ y = y_1 + sb \\ z = z_1 + sc \end{matrix} \qquad \text{mit} \qquad \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Der **Mittelpunkt** M_2 **der Kugel** $Ku_{M_2;r_2}$ **liegt nun auch auf der Lotgeraden** l **:**

Setzt man die Koordinaten von $M_2\left(x_2|y_2|z_2\right)$ und $s = -|M_1M_2|$, so werden die folgenden Gleichungen erfüllt :

$$x = x_1 + s\,\frac{-\left(x_2-x_1\right)}{|M_1M_2|} \quad , \qquad y = y_1 + s\,\frac{-\left(y_2-y_1\right)}{|M_1M_2|} \qquad z = z_1 + s\,\frac{-\left(z_2-z_1\right)}{|M_1M_2|}$$

Die **Lotgeraden zu** E **durch** M_1 **und zu** E **durch** M_2 **sind also identisch.**

Wie bereits beim Problem „**Schnitt: Ebene - Kugel**" gezeigt, schneidet die Lotgerade l zu E durch M_1 im Punkt $C\left(x_C|y_C|z_C\right)$ und es gilt

$$C\left(x_C|y_C|z_C\right) = C\left(x_1+sa \mid y_1+sb \mid z_1+sc\right) \ ,$$

$$s = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_F-x_1 \\ y_F-y_1 \\ z_F-z_1 \end{pmatrix} \quad , \quad F\left(x_F|y_F|z_F\right) \ \text{irgend ein Fußpunkt der Ebene ,}$$

$$|M_1C| = |s| \ ,$$

$$E \cap Ku_{M_1;r_1} = K_{C;R} \subset E \quad , \quad R^2 = r_1^{\,2} - s^2 \ .$$

Ebenso gelten auch die entsprechenden Gleichungen :

$$C\left(x_C|y_C|z_C\right) = C\left(x_2+ta \mid y_2+tb \mid z_2+tc\right) \ ,$$

$$t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_F-x_2 \\ y_F-y_2 \\ z_F-z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad F\left(x_F|y_F|z_F\right) \ \text{irgend ein Fußpunkt der Ebene ,}$$

$$|M_2C| = |t| \ ,$$

$$E \cap Ku_{M_2;r_2} = K_{C;R} \subset E \quad , \quad R^2 = r_2^{\,2} - t^2 \ .$$

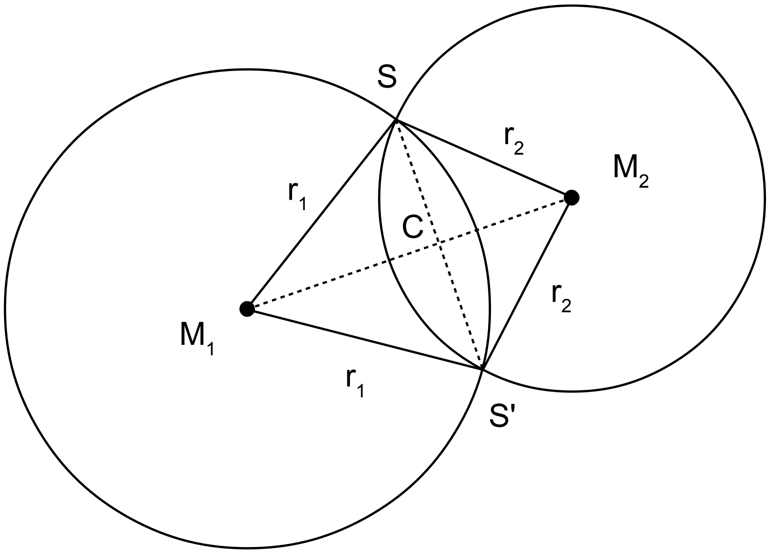
Wegen $Ku_{M_1;r_1} \cap Ku_{M_2;r_2} \subset E$, $E \cap Ku_{M_1;r_1} = K_{C;R} \subset E$, $E \cap Ku_{M_2;r_2} = K_{C;R} \subset E$ folgt :

$$Ku_{M_1;r_1} \cap Ku_{M_2;r_2} = \left(E \cap Ku_{M_1;r_1}\right) \cap \left(E \cap Ku_{M_2;r_2}\right) = K_{C;R} \cap K_{C;R} = K_{C;R} \ .$$

Es genügt also $Ku_{M_1;r_1} \cap E$ **zu bestimmen .**

Schnittmenge : Kugel – Kugel (elementar)

Man legt eine Axialschnittebene durch $M_1 M_1$.

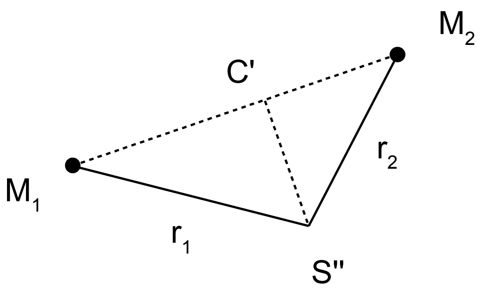


Die Dreiecke $\Delta M_1 M_2 S$ und $\Delta M_1 M_2 S'$ sind nach dem **Kongruenzsatz sss** kongruent $\Delta M_1 M_2 S \simeq \Delta M_1 M_2 S'$, stimmen also auch in den Winkeln überein.

Die Verbindungslinie SS' ist orthogonal zu $M_1 M_1$:

Die Dreiecke $\Delta M_2 CS$, $\Delta M_2 CS'$ sind nach dem **Kongruenzsatz sws** kongruent, also ist $< M_2 CS = < M_2 CS' = 90°$

Nun betrachtet man in irgend einer anderen Axialschnittebene durch $M_1 M_1$ das Dreieck $\Delta M_1 M_2 S''$ und fällt die Höhe $C'S''$.



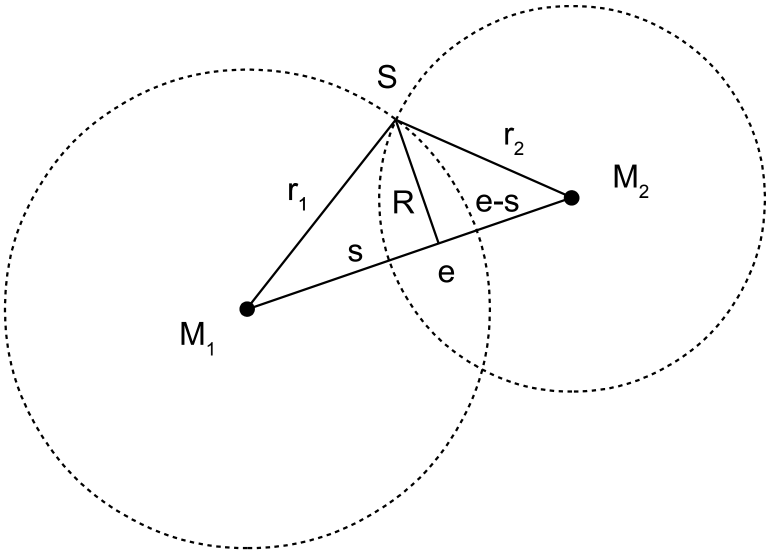
Nach dem **Kongruenzsatz wsw** gilt $\Delta M_2 S''C \simeq \Delta M_2 S'C$ und somit $|M_2 C'| = |M_2 C|$, $C' = C$.

Dies zeigt : Für alle Punkte $S \in Ku_{M_1;r_1} \cap Ku_{M_2;r_2}$ sind die Abstände $|SC| =: R$ konstant, und für die Winkel gilt $< M_2 CS = 90°$.

Genauer gesagt liegen alle Punkte $S \in Ku_{M_1;r_1} \cap Ku_{M_2;r_2}$ auf einem Kreis $K_{C;R}$ in der Ebene durch C senkrecht zu $M_1 M_2$:

$$\boxed{Ku_{M_1;r_1} \cap Ku_{M_2;r_2} = K_{C;R} \subset E \quad , \quad E \perp M_1 M_2 \quad , \quad C \in E} \quad .$$

Berechnungen



$$s^2 + R^2 = r_1^2$$

$$(e-s)^2 + R^2 = r_2^2$$
$$e^2 - 2es + s^2 + R^2 = r_2^2 \quad -$$

$$-e^2 + 2es = r_1^2 - r_2^2$$

$$\boxed{s = \frac{r_1^2 + e^2 - r_2^2}{2e}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e-s = \frac{r_2^2 + e^2 - r_1^2}{2e}}$$

$$R^2 = r_1^2 - s^2$$

$$R^2 = r_1^2 - \frac{\left(r_1^2 + e^2 - r_2^2\right)^2}{4e^2}$$

$$R^2 = r_1^2 - \frac{r_1^4 + e^4 + r_2^4 + 2r_1^2e^2 - 2r_1^2r_2^2 - 2e^2r_2^2}{4e^2}$$

$$R^2 = \frac{4r_1^2e^2 - \left(r_1^4 + e^4 + r_2^4 + 2r_1^2e^2 - 2r_1^2r_2^2 - 2e^2r_2^2\right)}{4e^2}$$

$$R^2 = \frac{2r_1^2r_2^2 + 2r_1^2e^2 + 2r_2^2e^2 - r_1^4 - r_2^4 - e^4}{4e^2}$$

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{2r_1^2r_2^2 + 2r_1^2e^2 + 2r_2^2e^2 - r_1^4 - r_2^4 - e^4}}{2e}}$$