Stochastik

Arno Fehringer
Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik
April 2015

Quelle :

Bosch, Karl : Elementare Einführung in die Wahscheinlichkeitsrechnung, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1995 6. Aufl.

Kombinatorik

Zeichenketten

Zeichen	Anzahl der Zeichen	Anzahl der Zeichenketten	
A_1	1	1	1
$A_1 \; A_2$	2	2	$1 \cdot 2$
$A_1 \; A_2 \; A_3$	3	6	$1 \cdot 2 \cdot 3$
$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$	4	24	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4 \; A_5$	5	120	$1 \cdot \ldots \cdot 5$
$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4 \; A_5 \; A_6$	6	720	$1 \cdot \ldots \cdot 6$
$A_1 \; \ldots \; A_n$			$1 \cdot \ldots \cdot n$

Zu n **Zeichen gibt es genau** $\boxed{n! := 1 \cdot \ldots \cdot n}$ **Zeichenketten.**

<u>Sprechweise:</u> „ n Fakultät “

A_1 1

$A_1 \; A_2$
$A_1 \; A_2$ 2

$A_1 \; A_2 \; A_3$
$A_1 \; A_2 \; A_3$
$A_2 \; A_1 \; A_3$ 6
$A_2 \; A_3 \; A_1$
$A_3 \; A_1 \; A_2$
$A_3 \; A_2 \; A_1$

$A_4 \; A_1 \; A_2 \; A_3$	$A_1 \; A_4 \; A_2 \; A_3$	$A_1 \; A_2 \; A_4 \; A_3$	$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$
$A_4 \; A_1 \; A_2 \; A_3$	$A_1 \; A_4 \; A_2 \; A_3$	$A_1 \; A_2 \; A_4 \; A_3$	$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$
$A_4 \; A_2 \; A_1 \; A_3$	$A_2 \; A_4 \; A_1 \; A_3$	$A_2 \; A_1 \; A_4 \; A_3$	$A_2 \; A_1 \; A_3 \; A_4$
$A_4 \; A_2 \; A_3 \; A_1$	$A_2 \; A_4 \; A_3 \; A_1$	$A_2 \; A_3 \; A_4 \; A_1$	$A_2 \; A_3 \; A_1 \; A_4$
$A_4 \; A_3 \; A_1 \; A_2$	$A_3 \; A_4 \; A_1 \; A_2$	$A_3 \; A_1 \; A_4 \; A_2$	$A_3 \; A_1 \; A_2 \; A_4$
$A_4 \; A_3 \; A_2 \; A_1$	$A_3 \; A_4 \; A_2 \; A_1$	$A_3 \; A_2 \; A_4 \; A_1$	$A_3 \; A_2 \; A_1 \; A_4$

$6 \cdot 4 = 24$

Zeichenketten mit Wiederholungen

$A_1 \quad A_2 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$
$A_2 \quad A_1 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$
$B_1 \quad A_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad B_3$
$B_1 \quad A_2 \quad A_1 \quad B_2 \quad B_3$
.
.
.
$B_3 \quad B_2 \quad B_1 \quad A_1 \quad A_2$
$B_3 \quad B_2 \quad B_1 \quad A_2 \quad A_1$

$5!$

Aufheben der Nummerierung bei A

$A_1 \quad A_2 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$
~~$A_2 \quad A_1 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$~~
$B_1 \quad A_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad B_3$
~~$B_1 \quad A_2 \quad A_1 \quad B_2 \quad B_3$~~
.
.
.
$B_3 \quad B_2 \quad B_1 \quad A_1 \quad A_2$
~~$B_3 \quad B_2 \quad B_1 \quad A_2 \quad A_1$~~

$\frac{5!}{2!}$

Aufheben der Nummerierung bei B

$A \quad A \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$
~~$A \quad A \quad B_1 \quad B_3 \quad B_2$~~
~~$A \quad A \quad B_2 \quad B_1 \quad B_3$~~
~~$A \quad A \quad B_2 \quad B_3 \quad B_1$~~
~~$A \quad A \quad B_3 \quad B_1 \quad B_2$~~
~~$A \quad A \quad B_3 \quad B_2 \quad B_1$~~
.
.
.

$\frac{5!}{2! \cdot 3!}$

Zeichenketten mit Wiederholungen

$$\overbrace{\underbrace{A \ldots A}_{k} \quad \underbrace{B \ldots B}_{n-k}}^{n}$$

Zu k Zeichen A und n-k Zeichen B gibt es genau $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ **Zeichenketten der Länge n .**

<u>Definition, Schreibweise und Sprechweise:</u> $\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$ „ n über k “

$$\boxed{\binom{n}{0} := 1} \Rightarrow \boxed{0! := 1}$$

Beispiel:
Eine Münze mit Zahl (Z) und Wappen (W) wird 8 mal geworfen.
Wie viele Ausgänge sind möglich?

$$2^8 = 256$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es, für 3 mal Z und 5 mal W ?

$$\frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim 1. Wurf und beim 8. Wurf Z zu werfen ?

$$Z \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}\ Z$$

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

$$= \frac{6!}{0! \cdot 6!} + \frac{6!}{1! \cdot 5!} + \frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{6!}{4! \cdot 2!} + \frac{6!}{5! \cdot 1!} + \frac{6!}{6! \cdot 0!}$$

$$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

Andere Betrachtung:
Für die 6 Würfe, vom 2. Wurf bis zum 7. Wurf, gibt es $2^6 = 64$ Möglichkeiten

Allgemeine Binomische Formel

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$(a+b)^5 = \begin{array}{ccccccccccc} aaaaa & + & aaaab & + & aaabb & + & aabbb & + & abbbb & + & bbbbb \\ & & aaaba & & . & & . & & & & \\ & & aabaa & & . & & . & & & & \\ & & abaaa & & . & & . & & & & \\ & & baaaa & & . & & . & & & & \end{array}$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{5}a^4b^0 + \binom{5}{4}a^4b^1 + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}a^1b^4 + \binom{5}{0}a^0b^5$$

Allgemein:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^nb^0 + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \ . \ . \ . \ + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{0}a^0b^n$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}}$$

gesprochen: „ Summe $\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ k von 0 bis n „

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten** .

Ziehungen aus Urnen

In einer Urne seien n Kugeln $B_1, \ldots, B_n$. Es werden nacheinander k Kugeln gezogen. Dabei kann zurückgelegt werden oder nicht und die Reihenfolge beachtet werden oder nicht. Wie viele Ausgänge sind jeweils möglich für die Fälle:

I Reihenfolge, Zurücklegen
II Reihenfolge, ohne Zurücklegen
III ohne Reihenfolge, Zurücklegen
IV ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen ?

	Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Reihenfolge	**I** $\boxed{n^k}$	**II** $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$ $= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{(n-k)!}$ $= \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$
ohne Reihenfolge	**III** $\boxed{\binom{n-1+k}{k}}$	**IV** $\frac{n!}{(n-k)!} : k!$ $= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ $= \boxed{\binom{n}{k}}$

Der „schwierigste" Fall ist der Fall **III**:
Jeder Ausgang kann in eine Tabelle eingetragen werden. Das x gibt an, dass die entsprechende Kugel gezogen wurde.

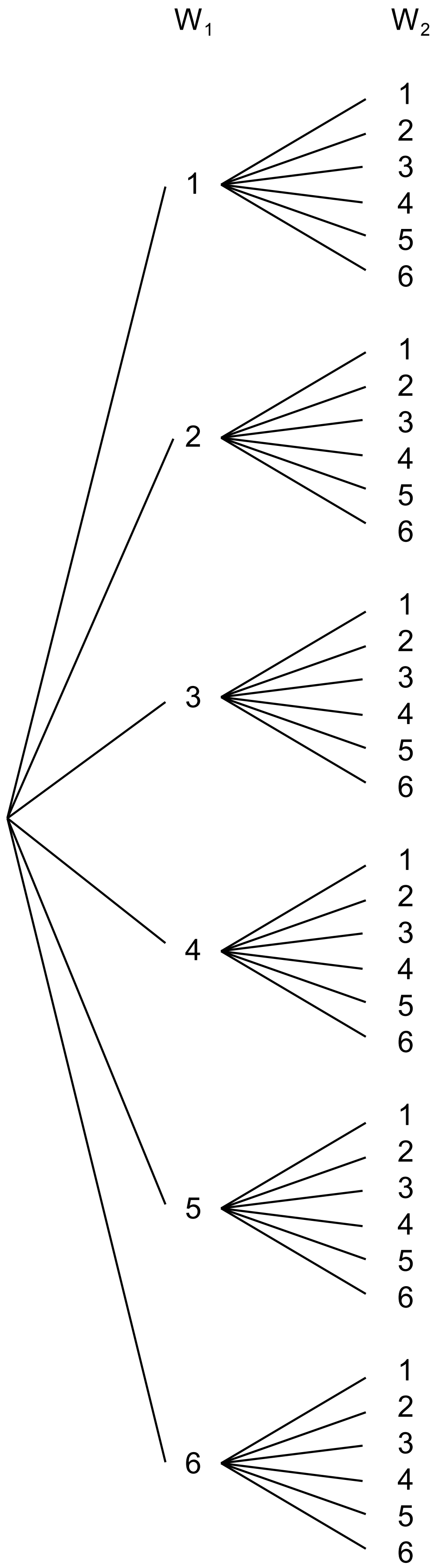
$$\begin{array}{ccccccccccc} B_1 & & B_2 & & B_3 & & \ldots & & B_{n-1} & & B_n \\ x & | & & | & x & | & \ldots & | & & | & x \end{array}$$

Jeder Ausgang kann man eindeutig als Zeichenkette bestehend aus den n-1 Zeichen $|$ und k Zeichen x darstellen, und es gibt genau $\binom{n-1+k}{k}$ solche Zeichenketten.

Bemerkung: Beim Lottospiel „ 6 aus 49" ergeben sich $\binom{49}{6} = 13983816$ Möglichkeiten.

Würfelexperiment

2 Spielwürfel W_1 , W_2 werden geworfen.
Wie viele Ausgänge (Ereignisse) sind möglich?



$$6 \cdot 6 = 6^2 = 36$$

Berechnung der Häufigkeiten der Augensummen $W_1 + W_2$

W_2

W_1

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$h\left(W_1+W_2=2\right) =$

$h\left(W_1+W_2=3\right) =$

$h\left(W_1+W_2=4\right) =$

$h\left(W_1+W_2=5\right) =$

$h\left(W_1+W_2=6\right) =$

$h\left(W_1+W_2=7\right) =$

$h\left(W_1+W_2=8\right) =$

$h\left(W_1+W_2=9\right) =$

$h\left(W_1+W_2=10\right) =$

$h\left(W_1+W_2=11\right) =$

$h\left(W_1+W_2=12\right) =$

Berechnung der Häufigkeiten der Augensummen $W_1 + W_2$

		W_2				
	11	12	13	14	15	16
	21	22	23	24	25	26
	31	32	33	34	35	36
W_1	41	42	43	44	45	46
	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66

$$\left.\begin{array}{l} h\left(W_1+W_2=2\right) = 1 \\ h\left(W_1+W_2=3\right) = 2 \\ h\left(W_1+W_2=4\right) = 3 \\ h\left(W_1+W_2=5\right) = 4 \\ h\left(W_1+W_2=6\right) = 5 \\ h\left(W_1+W_2=7\right) = 6 \end{array}\right\} \quad h\left(W_1+W_2=x\right) = x - 1 \quad \text{für} \quad x \in \{2,\dots,7\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h\left(W_1+W_2=8\right) = 5 \\ h\left(W_1+W_2=9\right) = 4 \\ h\left(W_1+W_2=10\right) = 3 \\ h\left(W_1+W_2=11\right) = 2 \\ h\left(W_1+W_2=12\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} h\left(W_1+W_2=x\right) = -x + 13 \quad \text{für} \quad x \in \{8,\dots,12\} \\ x = 8 + t \;,\; y = 5 - t \quad \Rightarrow \quad y = -x + 13 \end{array}$$

Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace (1749 - 1827)

Beim Würfelexperiment mit 2 Würfeln W_1 , W_2 betrachtet man die Augensumme $W_1 + W_2$ mit insgesamt $H = 6^2 = 36$ Ausgängen (Ereignissen) $A_i \mathrel{\hat{=}} W_1+W_2=i$, $i \in \{2,\ldots,12\}$.

Die **Wahrscheinlichkeit** für das Ereignis A_i ist definiert durch:

$$\boxed{p(A_i) = \frac{h(A_i)}{H}} \; .$$

Man sagt auch die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_i ist gleich dem Quotient der Zahl der günstigen Ereignisse und der Gesamtzahl der Ereignisse.

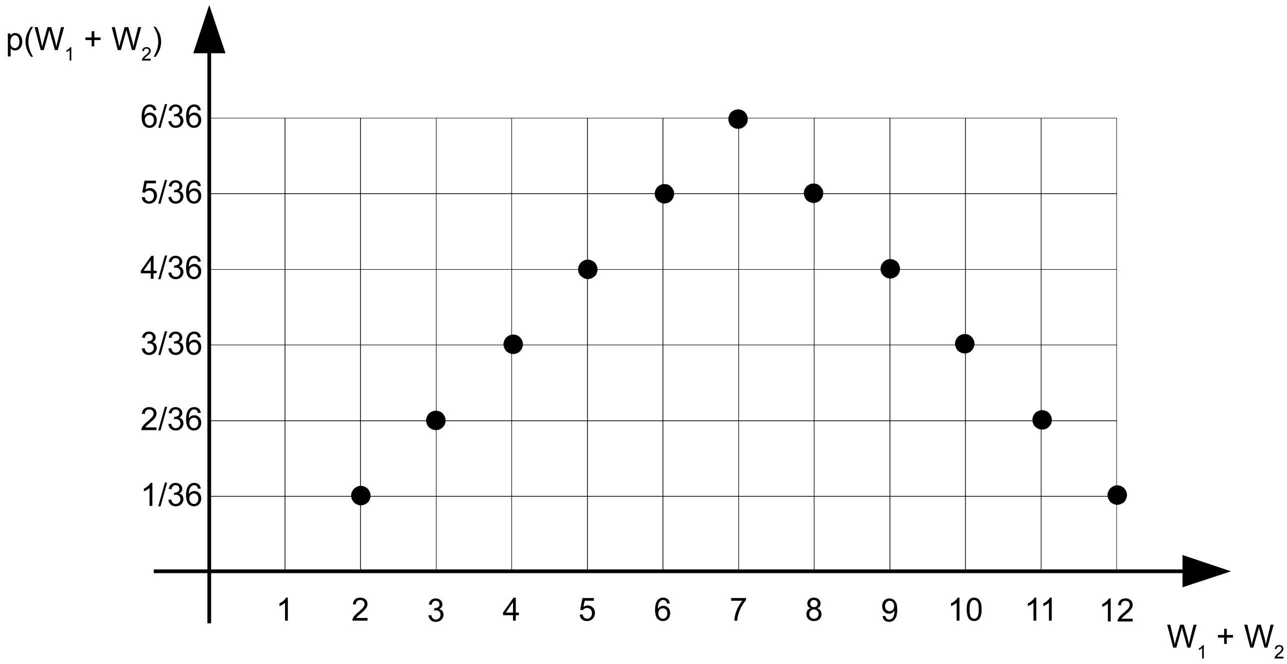
Konsequenz für die „Elementarereignisse“: $p(ij) = \frac{1}{H}$ für alle i , $j \in \{1,\ldots,6\}$

$$p(A_i) = \frac{h(A_i)}{H} = \frac{i-1}{36} \quad \text{für} \quad i \in \{2,\ldots,7\}$$

$$p(A_i) = \frac{h(A_i)}{H} = \frac{-i+13}{36} \quad \text{für} \quad i \in \{8,\ldots,12\}$$

$$p(A_2) = \frac{1}{36}$$
$$p(A_3) = \frac{2}{36}$$
$$p(A_4) = \frac{3}{36}$$
$$p(A_5) = \frac{4}{36}$$
$$p(A_6) = \frac{5}{36}$$
$$p(A_7) = \frac{6}{36}$$
$$p(A_8) = \frac{5}{36}$$
$$p(A_9) = \frac{4}{36}$$
$$p(A_{10}) = \frac{3}{36}$$
$$p(A_{11}) = \frac{2}{36}$$
$$p(A_{12}) = \frac{1}{36}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensummen $W_1 + W_2$



Berechnung der Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten der Augenprodukte $W_1 \cdot W_2$

W_2

W_1

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 1\right) = 1/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 2\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 3\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 4\right) = 3/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 5\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 6\right) = 4/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 8\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 9\right) = 1/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 10\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 12\right) = 4/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 15\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 16\right) = 1/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 18\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 20\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 24\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 25\right) = 1/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 30\right) = 2/36$

$p\left(W_1 \cdot W_2 = 36\right) = 1/36$

Allgemeiner Additionssatz

Werfen von 2 Spielwürfeln W_1 , W_2 .

W_2

B

W_1

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

A

$A \mathrel{\hat{=}} W_1+W_2=5 \qquad h(A) = 4 \qquad p(A) = \frac{4}{36}$

$B \mathrel{\hat{=}} W_1<W_2 \qquad h(B) = 15 \qquad p(B) = \frac{15}{36}$

$A\cap B \mathrel{\hat{=}} \{23 \ , \ 14\} \qquad h(A\cap B) = 2 \qquad p(A\cap B) = \frac{2}{36}$

$$p(A\cup B) = \frac{h(A\cup B)}{H}$$

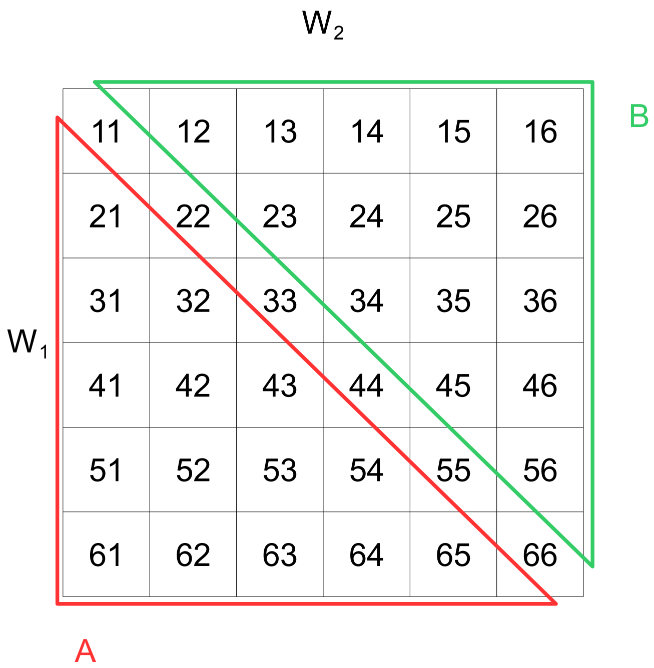
$$p(A\cup B) = \frac{h(A) + h(A) - h(A\cap B)}{H}$$

$$p(A\cup B) = \frac{h(A)}{H} + \frac{h(B)}{H} - \frac{h(A\cap B)}{H}$$

$$\boxed{p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)}$$

Additionssatz für disjunkte Ereignisse

Werfen von 2 Spielwürfeln W_1 , W_2 .



$A \mathrel{\hat{=}} W_1 > W_2$

$B \mathrel{\hat{=}} W_1 < W_2$

Da A und B disjunkt sind, $A \cap B = \{\ \}$, folgt der Additionssatz :

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Werfen von 2 Spielwürfeln W_1 , W_2 .

W_2

B

W_1 \ W_2						
	11	12	13	14	15	16
	21	22	23	24	25	26
	31	32	33	34	35	36
W_1	41	42	43	44	45	46
A	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66

$A \mathrel{\hat{=}} W_1+W_2=5$ $\qquad h(A) = 4$ $\qquad p(A) = \frac{4}{36}$

$B \mathrel{\hat{=}} W_1<W_2$ $\qquad h(B) = 15$ $\qquad p(B) = \frac{15}{36}$

$A \cap B = \{23 \ , \ 14\}$ $\qquad h(A \cap B) = 2$ $\qquad p(A \cap B) = \frac{2}{36}$

Man wüsste, dass bei einem Wurf das Ereignis A aufgetreten ist, und man fragt nach der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B ?

Diese Wahrscheinlichkeit heißt die **durch** A **bedingte Wahrscheinlichkeit für** B und wird bezeichnet mit $p_A(B)$.

$$\boxed{p_A(B) = \frac{h(A \cap B)}{h(A)}} \qquad p_A(B) = \frac{2}{4}$$

Entsprechend erhält man die **durch** B **bedingte Wahrscheinlichkeit für** A , $p_B(A)$.

$$\boxed{p_B(A) = \frac{h(A \cap B)}{h(B)}} \qquad p_B(A) = \frac{2}{15}$$

Es folgt:

$$p_A(B) = \frac{h(A\cap B)}{h(A)}$$

$$p_A(B) = \frac{\frac{h(A\cap B)}{H}}{\frac{h(A)}{H}}$$

$$p_A(B) = \frac{\frac{h(A\cap B)}{H}}{\frac{h(A)}{H}}$$

$$\boxed{p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}} \quad , \quad \text{analog} \quad \boxed{p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}}$$

Die Ereignisse A und B heißen **unabhängig** voneinander, falls gilt:

$p_A(B) = p(B)$ oder $p_B(A) = p(A)$.

Es gelte etwa $p_A(B) = p(B)$. Dann folgt :

$$p(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

$$p(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = p_B(A)$$

und daraus der

Produktsatz für unabhängige Ereignisse

$$\boxed{p(A\cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

Beispiel zum Produktsatz

Werfen von 2 Spielwürfeln W_1 , W_2 .

W_2

	11	12	13	14	15	16	A
	21	22	23	24	25	26	
	31	32	33	34	35	36	
W_1	41	42	43	44	45	46	
	51	52	53	54	55	56	
	61	62	63	64	65	66	

B

A $\hat{=}$ $W_1=1$

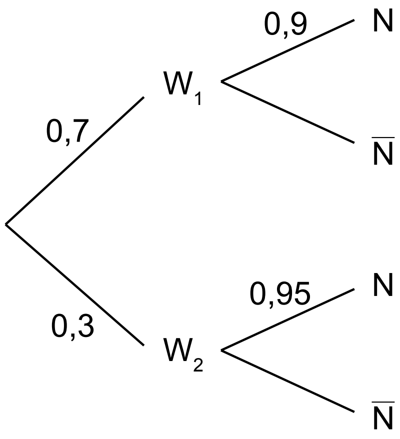
B $\hat{=}$ W_2 gerade

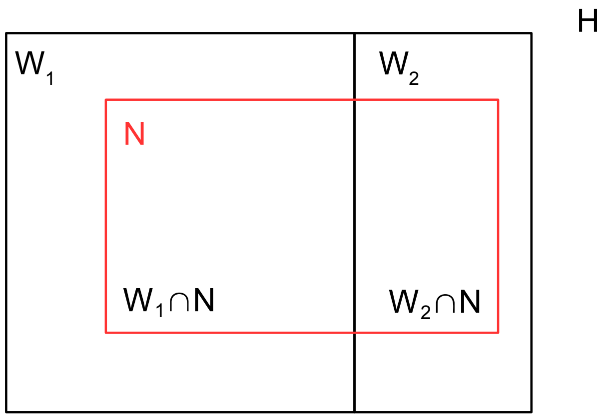
$$p_B(A) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \qquad p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$p_A(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Totale Wahrscheinlichkeit

Zwei Zweigwerke W_1, W_2 produzieren 70% bzw. 30% einer Ware. Die Gesamtproduktion habe den Umfang H. Die Ware aus W_1 ist zu 90% normgerecht und die aus W_2 zu 95%.





$$N = W_1 \cap N \cup W_2 \cap N \quad , \quad W_1 \cap W_2 = \{ \}$$

$$h(N) = h(W_1 \cap N) + h(W_2 \cap N)$$

$$h(N) = h(W_1) \cdot p_{W_1}(N) + h(W_2) \cdot p_{W_2}(N) \quad | \quad :H$$

$$\boxed{p(N) = p(W_1) \cdot p_{W_1}(N) + p(W_2) \cdot p_{W_2}(N)}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$p(N) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}95$$

$$p(N) = 0{,}915$$

Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit (Verallgemeinerung)

Der Ereignisraum habe eine disjunkte Zerlegung in die Teilmengen A_1 , … , A_n mit den Wahrscheinlichkeiten $p(A_1)$, … , $p(A_n)$. Falls für ein Ereignis B die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p_{A_1}(B)$, … , $p_{A_n}(B)$ gegeben sind, gilt:

$$\boxed{p(B) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(B) + \ldots + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B)}$$

Beispiel

Die Schüler einer Schule sind in die 3 Stufen Primarstufe P , Sekundarstufe SI und Sekundarstufe SII eingeteilt. Die entsprechende Verteilung ist :

$$p(P) = 0{,}45 \quad , \quad p(SI) = 0{,}30 \quad , \quad p(SII) = 0{,}25 \quad .$$

$F \;\hat{=}\;$ „Kommt mit dem Fahrrad zur Schule“ .

$$p_P(F) = 0{,}32 \quad , \quad p_{SI}(F) = 0{,}28 \quad , \quad p_{SII}(F) = 0{,}05 \quad .$$

Es folgt:

$$p(F) = p(P) \cdot p_P(F) + p(SI) \cdot p_{SI}(F) + p(SII) \cdot p_{SII}(F)$$

$$p(F) = 0{,}45 \cdot 0{,}32 + 0{,}30 \cdot 0{,}28 + 0{,}25 \cdot 0{,}05$$

$$p(F) = 0{,}253$$

Satz von Bayes (1701 - 1761)

Falls die Wahrscheinlichkeiten $p(A) \neq 0$ und $p(B) \neq 0$ und $p_A(B)$ gegeben sind, folgt :

$$\boxed{p_B(A) = \frac{p(A)}{p(B)} \cdot p_A(B)} \quad .$$

Beweis:

$$p(B \cap A) = p(A \cap B)$$

$$p(B) \cdot p_B(A) = p(A) \cdot p_A(B)$$

$$p_B(A) = \frac{p(A)}{P(B)} \cdot p_A(B)$$

q.e.d.

Beispiel

In einem Sportverein sind 30% der Aktiven Frauen : $p(F) = 0{,}30$.

25% aller Aktiven betreiben Leichtathletik : $p(L) = 0{,}25$.

60% der Leichtathletik Betreibenden sind Frauen : $p_L(F) = 0{,}60$.

Wie viel Prozent der Frauen betreiben Leichtathletik ?

$$p_F(L) = \frac{p(L)}{P(F)} \cdot p_L(F)$$

$$p_F(L) = \frac{0{,}25}{0{,}30} \cdot 0{,}60$$

$$p_F(L) = 0{,}50$$

$$p_F(L) = 50\%$$

Bernoulli-Experimente (Jacob I. Bernoulli 1655–1705)

Ein Zufallsexperiment bei dem nur die Ausgänge A , $\bar{A}$ und die Wahrscheinlichkeiten $p(A) = p$, $p(\bar{A}) = 1-p$ betrachtet werden heißt **Bernoulli-Erxperiment** . Das Experiment werde 5-mal durchgeführt.
Die Ausgänge A , $\bar{A}$ sind bei Wiederholungen jeweils unabhängig, so dass die Wahrscheinlichkeit für jedes der 2^5 Ereignisse nach dem Produktsatz bestimmt werden kann.
Zum Beispiel ist $p(A\,A\,\bar{A}\,A\,\bar{A}) = p\cdot p\cdot(1-p)\cdot p\cdot(1-p) = p^3\cdot(1-p)^2 = p^3\cdot(1-p)^{5-3}$.

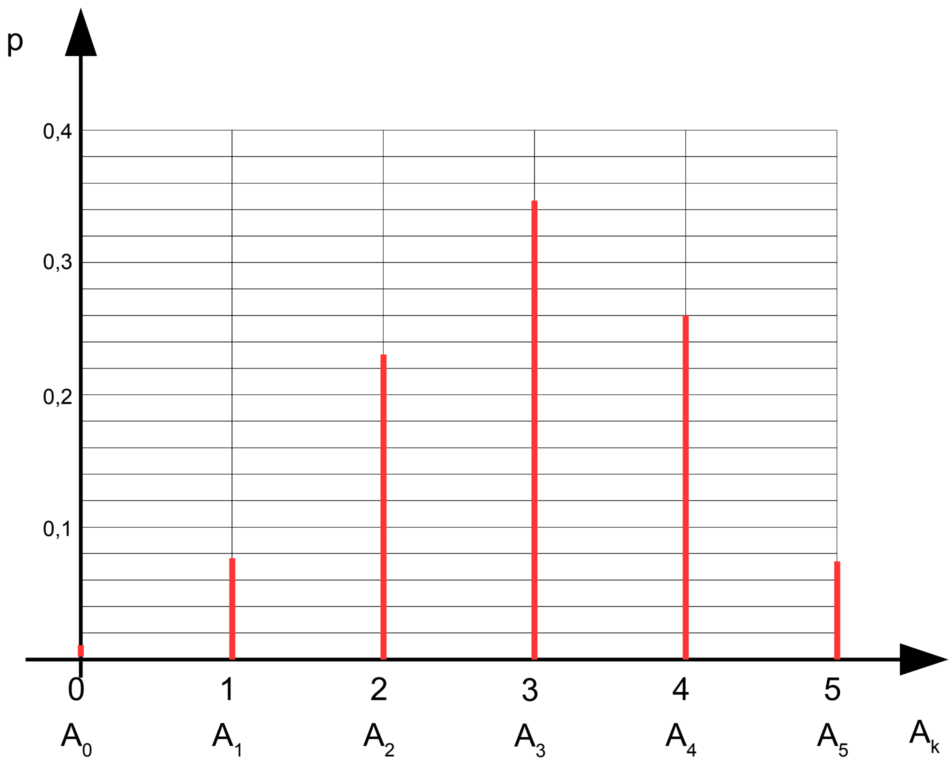
Betrachtet man nun für jedes $k \in \{0,...,5\}$ die Ereignisse
$A_k \mathrel{\hat{=}}$ „Der Ausgang A kommt genau k-mal vor“ , so folgen nach dem Additionssatz die Wahrscheinlichkeiten $\boxed{p(A_k) = \binom{5}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{5-k}}$. Man schreibt auch gerne nur

$p(k) = \binom{5}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{5-k}$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung** $B_{5\,;\,p}(k)$ (gesprochen: „B 5 p von k“), wegen des Vorkommens der **Binomialkoeffizienten** $\binom{5}{k}$.

Für $p = 0{,}6$, $1-p = 0{,}4$ ergibt sich :

$p(A_0) = 0{,}1024$
$p(A_1) = 0{,}07680$
$p(A_2) = 0{,}2304$
$p(A_3) = 0{,}3456$
$p(A_4) = 0{,}25920$
$p(A_5) = 0{,}07776$



Bei n Wiederholungen des Zufallsexperiments mit den Ausgängen A , $\bar{A}$ und den Wahrscheinlichkeiten $p(A) = p$, $p(\bar{A}) = 1-p$ erhält man **Binomialverteilung**

$B_{n\,;\,p}(k)$ mit $\boxed{p(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}$ für $k \in \{0,...,n\}$.

Gesetz der großen Zahlen (Jacob I. Bernoulli 1713)

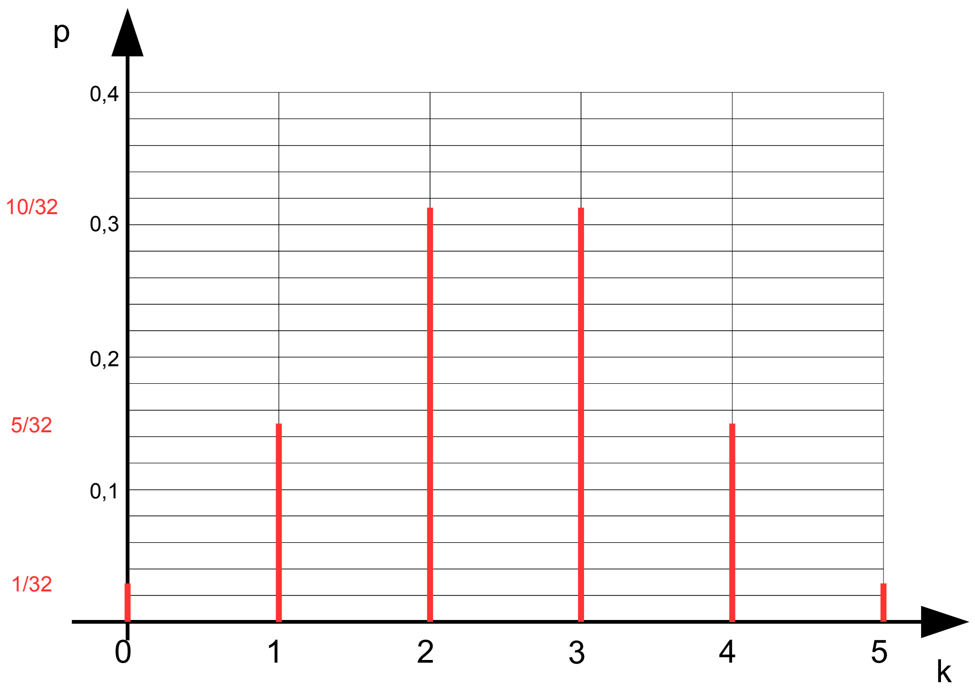
Beim Werfen eine Münze interessiere das Ergebnis „Zahl“ , Z. Das 5-malige Werfen einer Münze liefert wegen $p = 1-p = \frac{1}{2}$ die Binomialverteilung $B_{5\,;\,\frac{1}{2}}(k)$ mit

$$p(k) = \binom{5}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} \quad , \text{ also } \quad p(k) = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \text{für} \quad k \in \{0,\ldots,5\} \quad .$$

$$p(0) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}03125 \quad ,$$

$$p(1) = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} = 0{,}15625 \quad ,$$

$$p(2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = 0{,}31250 \quad \text{, usw. .}$$



Bemerkung: Anstatt eine Münze 5-mal zu werfen, kann man sich auch vorstellen, dass 5 Münzen gleichzeitig geworfen werden. Man erhält in beiden Fällen die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beim Werfen von 5 Münzen würde man nun Folgendes erwarten: Ein Ereignis mit höherer Wahrscheinlichkeit müsste **bei sehr vielen Durchführungen** mit einer größeren relativen Häufigkeit auftreten, als ein anderes mit geringerer Wahrscheinlichkeit.

$$p(k) > p(k') \quad \rightarrow \quad r_n(k) \approx> r_n(k') \qquad \text{für} \quad n \gg 1 \quad .$$

Entsprechendes würde man erwarten bei Ereignissen mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

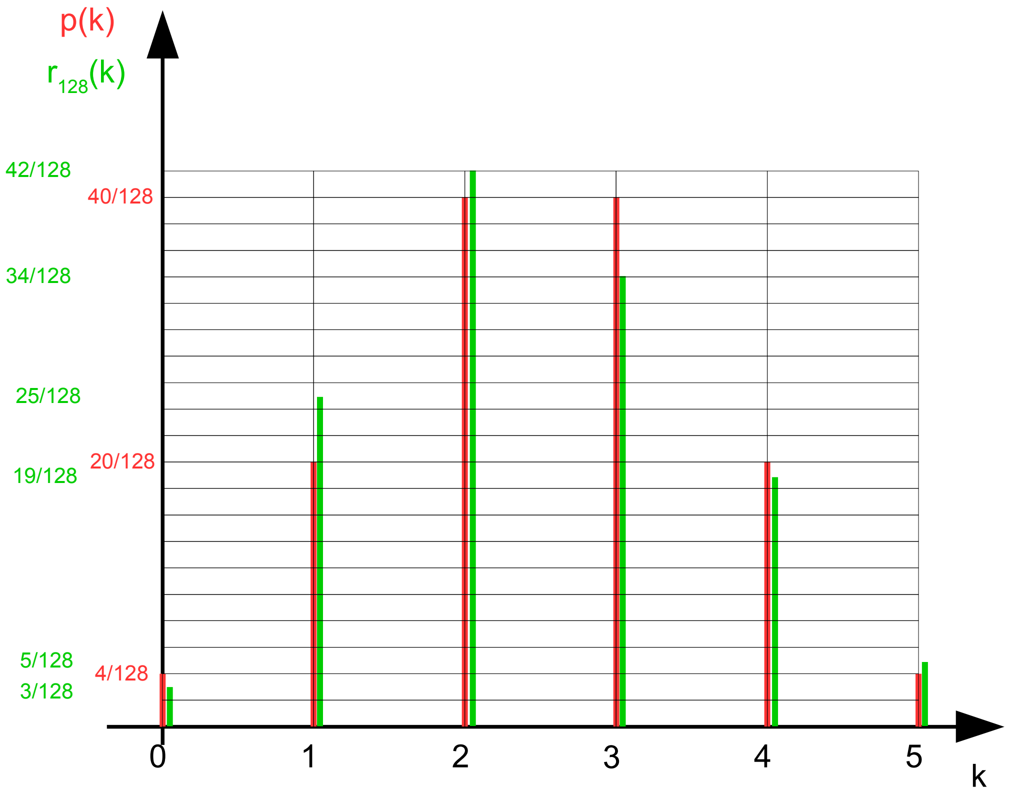
$$p(k) = p(k') \quad \rightarrow \quad r_n(k) \approx r_n(k') \qquad \text{Für} \quad n \gg 1 \quad .$$

Mehr noch, **die Wahrscheinlichkeitsverteilung müsste sich bei sehr vielen Durchführungen annähernd in der Verteilung der relativen Häufigkeiten spiegeln**.

$r_n(k) \approx p(k) \qquad$ Für $\quad n \gg 1 \quad .$

Dazu werfen wir zum Beispiel die 5 Münzen $n=128$- mal, und geben jeweils die relative Häufigkeit $r_n(k)$, $k \in \{0,...,5\}$ an.

k	0	1	2	3	4	5
p(k)	$\frac{4}{128}$	$\frac{20}{128}$	$\frac{40}{128}$	$\frac{40}{128}$	$\frac{20}{128}$	$\frac{4}{128}$
$r_{128}(k)$	$\frac{3}{128}$	$\frac{25}{128}$	$\frac{42}{128}$	$\frac{34}{128}$	$\frac{19}{128}$	$\frac{5}{128}$



Die absolute bzw. relative Häufigkeitsverteilung $h_{128}(k)$, $r_{128}(k)$ und können in einer anderen Versuchsreihe im Umfang von $n=128$ selbstverständlich andere Werte liefern, sie sind also Größen, die dem Zufall unterliegen. Ebenso ergeben sich auch für diese Häufigkeitsverteilungen $h_n(k)$, $r_n(k)$ Werte in Abhängigkeit von von n .

Wir setzen allgemein ein **Bernoulli-Experiment** mit den Ausgängen A, $\bar{A}$ und den Wahrscheinlichkeiten $p(A) = p$, $p(\bar{A}) = 1-p$ voraus, welches bei n Durchgängen die **Binomialverteilung** $B_{n\,;\,p}(k)$ liefert mit $p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k \in \{0,\dots,n\}$.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass $h_n(A)$ den Wert k annimmt, gegeben durch

$$p(h_n(A)=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad .$$

Wegen $r_n(A) = \dfrac{h_n(A)}{n}$ folgt

$$p\left(r_n(A)=\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad .$$

Wenn andererseits bei n Durchführungen das Ergebnis A genau k mal vorkäme, $h_n(A)=k$, erhielte man die relative Häufigkeit $r_n(A) = \dfrac{h_n(A)}{n}$, die jedoch nicht mit dem theoretischen Wert $p(A) = p$ übereinstimmen muss, sondern von diesem mehr oder weniger abweicht.

Darum betrachten wir nun Wahrscheinlichkeit dafür , dass $r_n(A)$ von p um mehr als ϵ abweicht: $p(|r_n(A)-p| > \epsilon)$.

$$p(|r_n(A)-p| > \epsilon) = p(r_n(A)-p<-\epsilon \quad \text{oder} \quad r_n(A)-p>\epsilon)$$

$$p(|r_n(A)-p| > \epsilon) = p(r_n(A)<p-\epsilon \quad \text{oder} \quad r_n(A)>p+\epsilon)$$

$$p(|r_n(A)-p| > \epsilon) = p\left(\frac{h_n(A)}{n}<p-\epsilon \quad \text{oder} \quad \frac{h_n(A)}{n}>p+\epsilon\right)$$

$$p(|r_n(A)-p| > \epsilon) = p(h_n(A)<n(p-\epsilon) \quad \text{oder} \quad h_n(A)>n(p+\epsilon))$$

$$p(|r_n(A)-p| > \epsilon) = p(h_n(A)<n(p-\epsilon)) + p(h_n(A)>n(p+\epsilon))$$

$$p(|r_n(A)-p| > \epsilon) = \sum_{k<n(p-\epsilon)} p(h_n(A)=k) + \sum_{k>n(p+\epsilon)} p(h_n(A)=k)$$

Es gilt nun Folgendes:

$$k<n(p-\epsilon) \quad \Rightarrow \quad np-k>n\epsilon \quad \Rightarrow \quad (np-k)^2>n^2\epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad (k-np)^2>n^2\epsilon^2$$

$$k>n(p+\epsilon) \quad \Rightarrow \quad k-np>n\epsilon \quad \Rightarrow \quad (k-np)^2>n^2\epsilon^2$$

Für alle Werte k, über die summiert wird, gilt also $\dfrac{(k-np)^2}{n^2\epsilon^2}>1$.

Die Gleichung

$$p\left(|r_n(A)-p| > \epsilon\right) = \sum_{k<n(p-\epsilon)} p(h_n(A)=k) + \sum_{k>n(p+\epsilon)} p(h_n(A)=k)$$

kann man deshalb in folgend Ungleichung überführen, wenn man die rechte Seite mit $\frac{(k-np)^2}{n^2\epsilon^2}>1$ multipliziert, also vergrößert:

$$p\left(|r_n(A)-p| > \epsilon\right) < \sum_{k<n(p-\epsilon)} \frac{(k-np)^2}{n^2\epsilon^2} p(h_n(A)=k) + \sum_{k>n(p+\epsilon)} \frac{(k-np)^2}{n^2\epsilon^2} p(h_n(A)=k)$$

$$n^2\epsilon^2 p\left(|r_n(A)-p| > \epsilon\right) < \sum_{k<n(p-\epsilon)} (k-np)^2 p(h_n(A)=k) + \sum_{k>n(p+\epsilon)} (k-np)^2 p(h_n(A)=k)$$

$$n^2\epsilon^2 p\left(|r_n(A)-p| > \epsilon\right) < \sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 p(h_n(A)=k)$$

$$n^2\epsilon^2 p\left(|r_n(A)-p| > \epsilon\right) < \sum_{k=0}^{n} \left(k^2-2npk+n^2p^2\right) p(h_n(A)=k)$$

$$n^2\epsilon^2 p\left(|r_n(A)-p| > \epsilon\right) < \sum_{k=0}^{n} k^2 p(h_n(A)=k) - 2np\sum_{k=0}^{n} k\, p(h_n(A)=k) + n^2p^2\sum_{k=0}^{n} p(h_n(A)=k)$$

Wegen $p\left(h_n(A)=k\right) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ folgt :

$$n^2\epsilon^2 p\left(|r_n(A)-p|>\epsilon\right)<\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{S_2}-2np\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{S_1}+n^2p^2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{S_0}$$

Weil für $k \geq 1$

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...1} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(k-1)...1} = n\frac{(n-1)...(n-k+1)}{(k-1)...1} = n\binom{n-1}{k-1}$$

und $k \geq 2$

$$k^2\binom{n}{k} = (k+k(k-1))\binom{n}{k} = k\binom{n}{k} + k(k-1)\binom{n}{k} = k\binom{n}{k} + n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \quad \text{gilt,}$$

folgt für S_2 , S_1 , S_0 :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{Setze } m=k-1 \Leftrightarrow k=m+1$$

$$S_1 = \sum_{m=0}^{n-1} n\binom{n-1}{m}p^{m+1}(1-p)^{n-m-1}$$

$$S_1 = \sum_{m=0}^{n-1} np\binom{n-1}{m}p^{m}(1-p)^{n-1-m}$$

$$S_1 = np\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m}p^{m}(1-p)^{n-1-m}$$

$$S_1 = np\left(p+(1-p)\right)^{n-1}$$

$$\underline{S_1 = np}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$S_2 = np(1-p)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$S_2 = np(1-p)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \left(k\binom{n}{k} + n(n-1)\binom{n-2}{k-2}\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$S_2 = np(1-p)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\text{Setze } m=k-2 \Leftrightarrow k=m+2$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + n(n-1)\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}\binom{n}{k}p^{m+2}(1-p)^{n-(m+2)}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + n(n-1)\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}\binom{n}{k}p^{m}p^2(1-p)^{n-2-m}$$

$$S_2 \;=\; \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{S_1 \;=\; np} \;+\; n(n-1)p^2\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}\binom{n}{k}p^m(1-p)^{n-2-m}$$

$$S_2 \;=\; np \;+\; n(n-1)p^2\big(p+(1-p)\big)^{n-2}$$

$$S_2 \;=\; np \;+\; n(n-1)p^2$$

$$S_2 \;=\; np \;+\; n^2p^2-np^2$$

$$\underline{S_2 \;=\; n^2p^2+np(1-p)}$$

$$S_0 \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \;=\; \big(1+(1-p)\big)^n$$

$$\underline{S_0 \;=\; 1}$$

Jetzt folgt für die Abschätzung:

$$n^2\epsilon^2 p\big(|r_n(A)-p|>\epsilon\big)<\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{\underline{S_2 \;=\; n^2p^2+np(1-p)}}-2np\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{S_1 \;=\; np}+n^2p^2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{\underline{S_0 \;=\; 1}}$$

$$n^2\epsilon^2 p\big(|r_n(A)-p|>\epsilon\big) \;<\; n^2p^2 \;+\; np(1-p) \;-\; 2n^2p^2 \;+\; n^2p^2$$

$$n^2\epsilon^2 p\big(|r_n(A)-p|>\epsilon\big) \;<\; np(1-p)$$

$$p\big(|r_n(A)-p|>\epsilon\big) \;<\; \frac{np(1-p)}{n^2\epsilon^2}$$

$$p\big(|r_n(A)-p|>\epsilon\big) \;<\; \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Nun ist der Wert $p(1-p)$ am größten für $p = (1-p) = \frac{1}{2}$, also $p(1-p) = \frac{1}{4}$ und

$$\boxed{p\left(|r_n(A)-p|>\epsilon\right) < \frac{1}{4n\epsilon^2}} \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit des Ereignisses A von der Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses A um mehr als ϵ abweicht, wird beliebig klein, wenn der Umfang n des Bernoulli-Experiments genügend groß wird.

Es folgt

$$p\left(|r_n(A)-p|\le\epsilon\right) = 1 - p\left(|r_n(A)-p|>\epsilon\right)$$

$$\boxed{p\left(|r_n(A)-p|\le\epsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2}} \quad .$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz (Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen)

Für jedes Bernoulli-Experiment mit den Ausgängen A , $\bar{A}$ und den Wahrscheinlichkeiten $p(A)=p$ und $p(\bar{A})=1-p$ vom Umfang n gilt für die relative Häufigkeit $r_n(A)$:

Für jedes $\epsilon > 0$ ist

$$p\left(|r_n(A)-p|\le\epsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2} \quad , \text{ das heißt } \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} p\left(|r_n(A)-p|\le\epsilon\right) = 1} \quad .$$