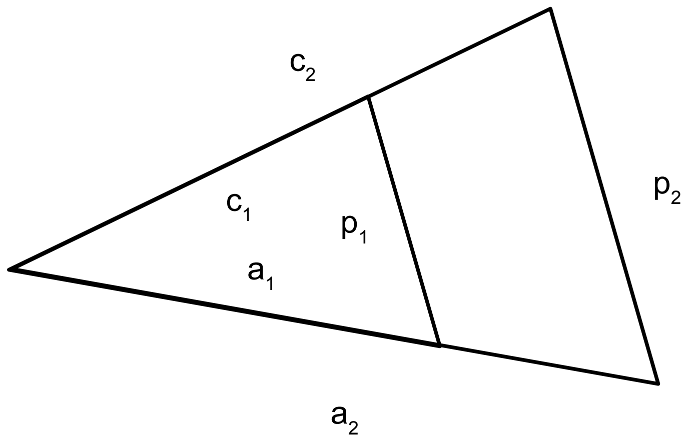
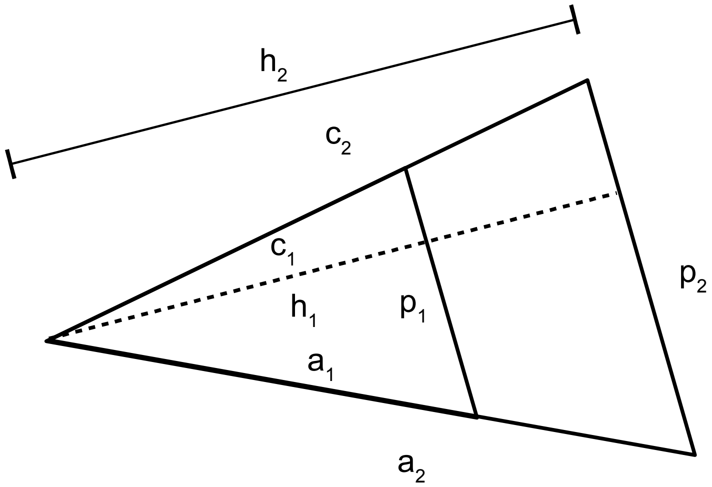
Strahlensätze

Gegeben seien die „**ineinandergeschobenen**“ Dreiecke , $\Delta a_1 p_1 c_1$ $\Delta a_2 p_2 c_2$ mit $p_2 \parallel p_1$.



Flächenbetrachtung :



$$\frac{1}{2}p_1 h_1 + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}p_2 h_2$$

$$p_1 h_1 + (p_1 + p_2)(h_2 - h_1) = p_2 h_2$$

$$p_1 h_1 + (p_1 + p_2)(h_2 - h_1) = p_2 h_2$$

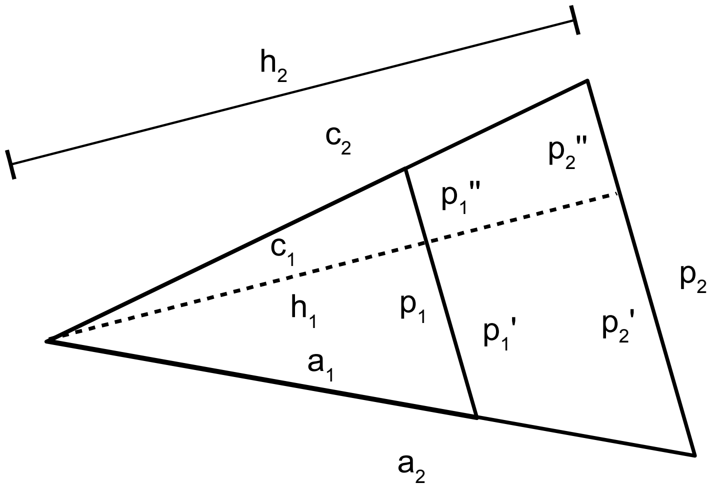
$$p_1 h_1 + p_1 h_2 - p_1 h_1 + p_2 h_2 - p_2 h_1 = p_2 h_2$$

$$p_1 h_2 - p_2 h_1 = 0$$

$$p_1 h_2 = p_2 h_1$$

$$v := \frac{h_2}{h_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_2 = v h_1} \quad , \quad \boxed{p_2 = v p_1}$$

Für die Dreiecke $\Delta a_1 p_1' h_1$, $\Delta a_2 p_2' h_2$ und die Dreiecke $\Delta h_1 p_1'' c_1$, $\Delta h_2 p_2'' c_2$ folgt eine analoge Betrachtungsweise :



$$v := \frac{h_2}{h_1} = \frac{p_2'}{p_1'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_2 = v h_1} \ , \quad \boxed{p_2' = v p_1'}$$

$$v := \frac{h_2}{h_1} = \frac{p_2''}{p_1''} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_2 = v h_1} \ , \quad \boxed{p_2'' = v p_1''}$$

Satz des Pythagoras :

$$a_2 = \sqrt{h_2^2 + p_2'^{\,2}}$$

$$a_2 = \sqrt{v^2 h_1^2 + v^2 p_1'^{\,2}}$$

$$a_2 = v\sqrt{h_1^2 + p_1'^{\,2}}$$

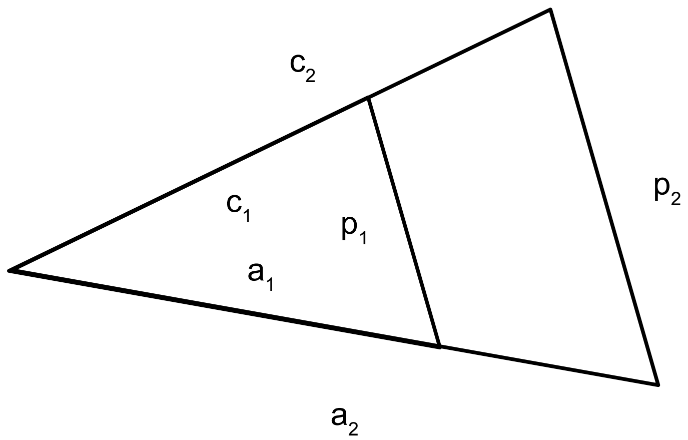
$\boxed{a_2 = v a_1}$. Analog folgt : $\boxed{c_2 = v c_1}$.

Die Umschreibung als Verhältnisgleichungen

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = v} \quad , \quad \boxed{\frac{p_2}{p_1} = v} \quad , \quad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = v}$$

liefert die **Strahlensätze** :

Für die folgende Figur mit mit $p_2 \parallel p_1$ gilt:



1. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

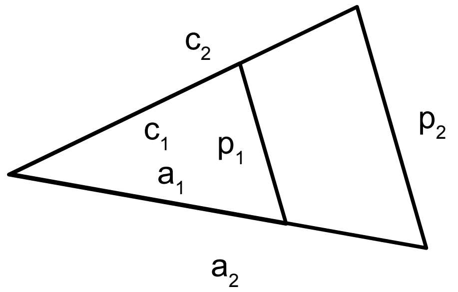
2. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1}} \quad , \quad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{p_1}}$$

Bemerkungen

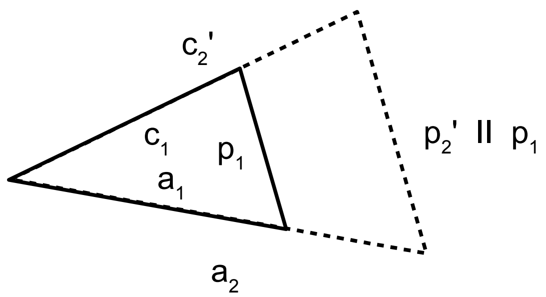
(1) Aus dem **2. Strahlensatz** folgt unmittelbar der **1. Strahlensatz** .

(2) **Umkehrung des 1. Strahlensatzes** :



$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1} \quad \Rightarrow \quad p_2 \parallel p_1$$

Beweis:



1. Strahlensatz: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2'}{c_1}$

Voraussetzung: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}$

Also $\frac{c_2'}{c_1} = \frac{c_2}{c_1}$ und $c_2' = c_2$.

Nach dem **Kongruenzaxiom sws** folgt $p_2' = p_2$ und damit $p_2 \parallel p_1$.

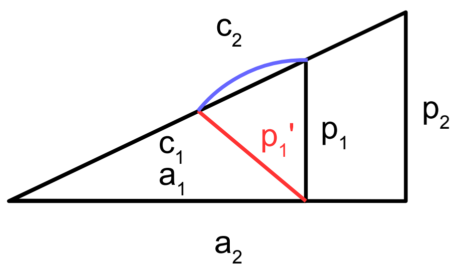
(3) **Umkehrung des 2. Strahlensatzes** :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1} \;,\; \frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad p_2 \parallel p_1$$

Beweis:

Nach (1) folgt $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}$, und nach (2) folgt $p_2 \parallel p_1$.

(4) Für (3) braucht man beide Gleichungen als Voraussetzung, wie folgende Figur zeigt:



$\frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1'}$, aber $p_2 \nparallel p_1'$.

Ähnliche Dreiecke

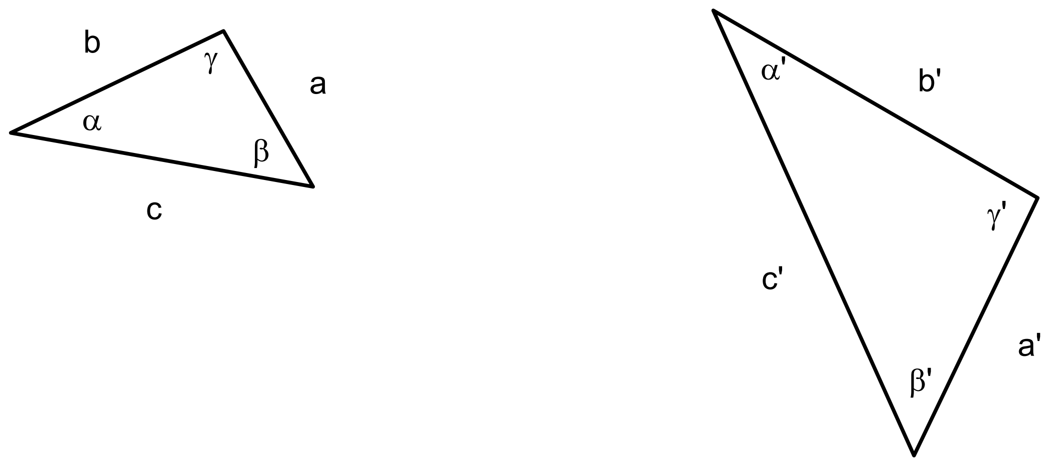
Die Dreiecke Δabc , $\Delta a'b'c'$ heißen **ähnlich**, $\Delta abc \sim \Delta a'b'c'$, falls $a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$.

Behauptung :
Gegeben seien die **ähnlichen Dreiecke** Δabc , $\Delta a'b'c'$ mit

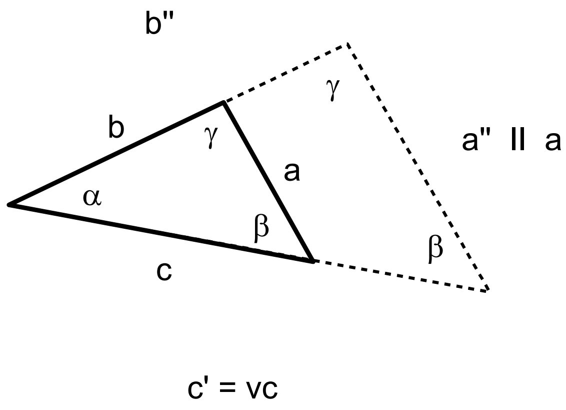
$a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$.

Dann stimmen die Dreiecke in allen drei Winkeln überein :

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.



Beweis:



Nach den **Strahlensätzen** gilt : $a'' = va = a'$, $b'' = vb = b'$.

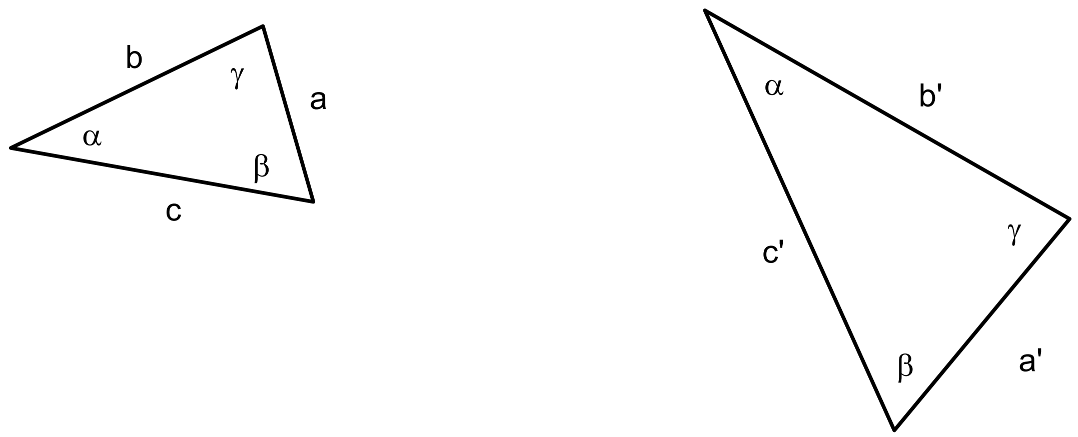
Also sind die Dreiecke $\Delta a''b''c'$, $\Delta a'b'c'$ nach dem **Kongruenzsatz sss** kongruent und stimmen in allen drei Winkeln überein :

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

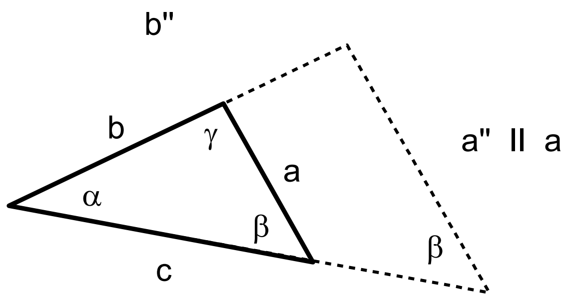
q.e.d.

Behauptung :
Stimmen die Dreiecke Δabc , $\Delta a'b'c'$ in drei Winkeln überein, so sind sie ähnlich :

$a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$.



Beweis:



c' = vc

Die Dreiecke $\Delta a'b'c'$, $\Delta a''b''c'$ sind nach dem **Kongruenzsatz wsw** kongruent,
also ist $a' = a''$, $b' = b''$.

Nach den **Strahlensätzen** gilt :

$a'' = va$, $b'' = vb$,

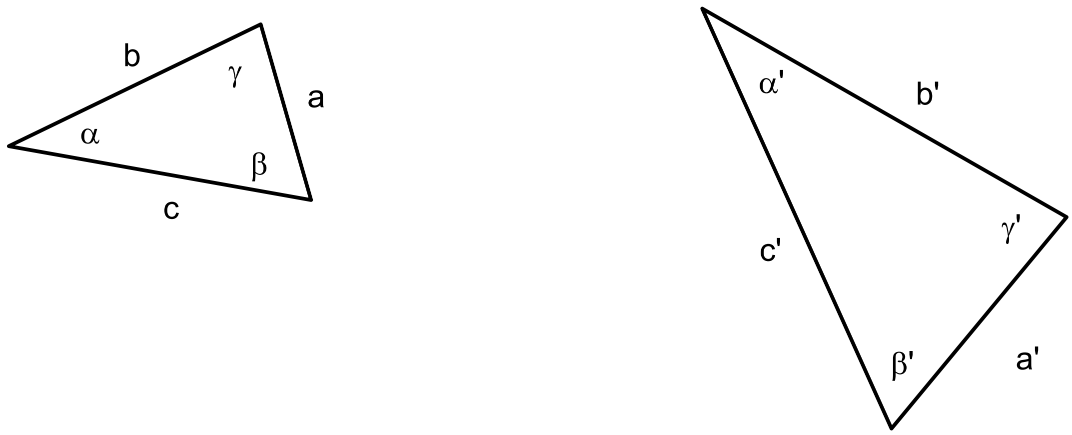
also folgt : $a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$.

q.e.d.

Behauptung :
Gegeben seien die **ähnlichen Dreiecke** Δabc , $\Delta a'b'c'$ mit

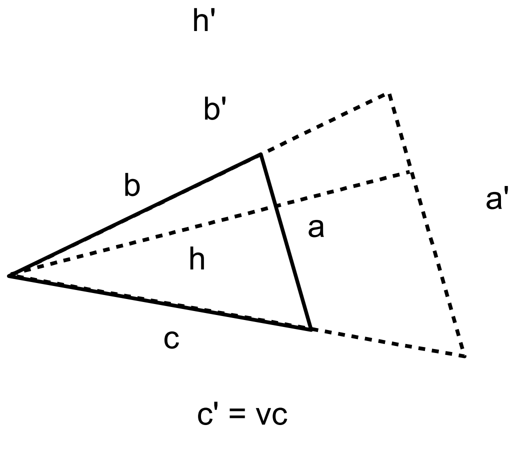
$$a' = va \quad , \quad b' = vb \quad , \quad c' = vc \quad .$$

Dann gilt für die Flächeninhalte $\boxed{A' = v^2 A}$.



Beweis:

Wegen der Winkelgleichheit $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ erhält man nach den vorigen Sätzen diese Figur :



Mit $c' = vc$ gilt nach den **Strahlensätzen** :

$$a' = va = a' \quad , \quad b' = vb \quad , \quad h' = vh \quad ,$$

und weiter

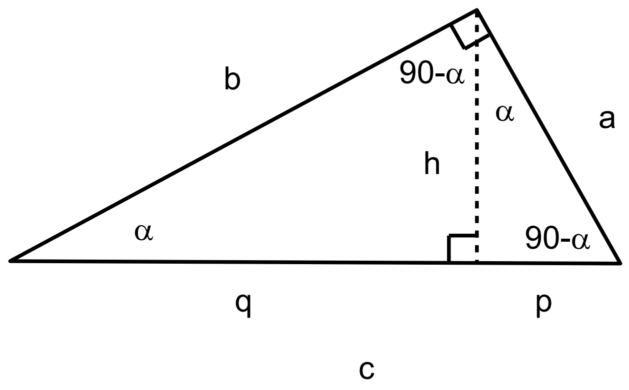
$$A' = \frac{a'h'}{2} = \frac{va\,vh}{2} = v^2 \frac{ah}{2} = v^2 A \quad , \text{ also } \quad A' = v^2 A \quad .$$

q.e.d.

Äquivalenz des Satzes von Pythagoras und der Strahlensätze

(I) Wir haben gesehen, die die **Strahlensätze** mit Hilfe des **Satzes von Pythagoras** folgen.

(II) Wir zeigen, dass der **Satzes von Pythagoras** aus den **Strahlensätzen** folgt .



Die Dreiecke Δabc , Δpha , Δhqb sind ähnlich :

$$\Delta abc \sim \Delta pha \sim \Delta hqb$$

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$$

$$\boxed{h^2 = pq}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$$

$$\boxed{a^2 = pc}$$

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\boxed{b^2 = qc}$$

Es folgt :

$$a^2 + b^2 = pc + qc$$

$$a^2 + b^2 = (p + q)c$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

q.e.d.