# Stetige Fortsetzung der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{R}$

Arno Fehringer Jan. 2016

## Eine nützliche konvergente Folge

Für $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**Beweis:**

**1. Fall:** $a > 1$

Man muss zeigen:

Zu jedem $\epsilon > o$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle $n > n_0$ gilt : $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \epsilon$ .

Sei also irgend ein $\epsilon > o$ gegeben. Um ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu finden, macht man zunächst folgende Umformungen:

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \epsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$$

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon$$

$$a < (1 + \epsilon)^n$$

Nach dem **Allgemeinen Binomischen Lehrsatz** bzw. der **Bernoullischen Ungleichung** gilt :

$$(1 + \epsilon)^n = 1^n + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} \epsilon^1 + \binom{n}{n-2} 1^{n-2} \epsilon^2 + \ldots$$

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2} \epsilon^2 + \ldots$$

$$\boxed{(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon}$$

Die rechte Seite der **Bernoullischen Ungleichung** wächst in Abhängigkeit von $n$ unbegrenzt, das heißt, ab einem gewissen $n$ wird es $a$ übertreffen:

$$1 + n\epsilon > a$$

$$n\epsilon > a - 1$$

Wählt man nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{a - 1}{\epsilon}$ , so gilt für alle $n > n_0$ nacheinander :

$$n > \frac{a - 1}{\epsilon}$$

$$1 + n\epsilon > a$$

$$(1 + \epsilon)^n > a$$

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{a}$$

$$\epsilon > \sqrt[n]{a} - 1$$

$$\epsilon > \left|\sqrt[n]{a} - 1\right|$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \epsilon \ .$$

Im Fall, dass $a > 1$ ist, gilt also : $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**2. Fall:** $0 < a < 1$ , das heißt $a = \frac{1}{a'}$ mit $a' > 0$

Zuerst betrachte man folgende Umformungen:

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \left|\sqrt[n]{\frac{1}{a'}} - 1\right|$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a'}} - 1\right|$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \left|\frac{1 - \sqrt[n]{a'}}{\sqrt[n]{a'}}\right|$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \frac{\left|1 - \sqrt[n]{a'}\right|}{\sqrt[n]{a'}}$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \left|1 - \sqrt[n]{a'}\right|$$

Zur Abschätzung der rechten Seite sei also irgend ein $\epsilon > o$ gegeben.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a'} = 1$ gibt es zu $\frac{\epsilon}{2} > 0$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_1$ gilt: $\left|\sqrt[n]{a'} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2}$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a'} = 1$ gibt es zu $\frac{1}{2} > 0$ gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_2$ gilt: $\left|\sqrt[n]{a'} - 1\right| < \frac{1}{2}$ .

Wählt man nun $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$, so gelten für alle $n > n_0$ die beiden Ungleichungen:

$$\left|\sqrt[n]{a'} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\left|\sqrt[n]{a'} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

Speziell würde aus der zweiten Ungleichung folgen :

$$\left|\sqrt[n]{a'} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \sqrt[n]{a'} - 1 < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + 1 < \sqrt[n]{a'} < \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} < \sqrt[n]{a'} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a'}} < 2$$

Damit ergibt sich bezüglich der Grenzwertfrage folgende Abschätzung für alle $n > n_0$ :

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \left|1 - \sqrt[n]{a'}\right|$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < 2\,\frac{\epsilon}{2}$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \epsilon$$

Im Fall, dass $0 < a < 1$ ist, gilt also : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

q.e.d.

## Strenge Monotonie der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{Q}$

> Für $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ ist die Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{Q}$ ist streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$ , falls $\begin{Bmatrix} a > 1 \\ 0 < a < 1 \end{Bmatrix}$ .

**Beweis :**

**1. Fall :** $a > 1$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x_1 < x_2$ , etwa $x_1 = \dfrac{p_1}{q}$ , $x_2 = \dfrac{p_2}{q}$ , $p_1 < p_2$ .

Man zeigt nun, dass $a^{x_1} < a^{x_2}$ folgt :

$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$a^{\frac{p_1}{q}} < a^{\frac{p_2}{q}}$$

$$\sqrt[q]{a^{p_1}} < \sqrt[q]{a^{p_2}}$$

$$a^{p_1} < a^{p_2}$$

$$1 < a^{p_2 - p_1}$$

Wegen $p_2 - p_1 > 0$ ist die letzte Ungleichung wahr, und es folgt die Behauptung .

**2. Fall :** $0 < a < 1$ , $a = \dfrac{1}{a'}$ , $a' > 1$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x_1 < x_2$ , etwa $x_1 = \dfrac{p_1}{q}$ , $x_2 = \dfrac{p_2}{q}$ , $p_1 < p_2$ .

Man zeigt nun, dass $a^{x_1} > a^{x_2}$ folgt :

$$a'^{\,x_1} < a'^{\,x_2}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$$

$$\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$$

$$a^{x_1} > a^{x_2}$$

Damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

# Stetigkeit der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{Q}$

Für $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ ist die Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{Q}$
stetig, das heißt :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad x_n \to x \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a^{x_n} \to a^x$$

**Beweis :**

Wegen $a^{x_n} = a^{x_n - x + x} = a^{x_n - x} \cdot a^x$ und $x_n - x \to 0$ muss man nur zeigen, dass $a^{r_n} \to 1$ für $r_n \to 0$ .

Sei also irgend ein $\epsilon > o$ gegeben.

Wegen $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \to 1$ für $m \to \infty$ gibt es ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit

$\left|a^{\frac{1}{m}} - 1\right| < \epsilon$ für alle $m > m_1$ , das heißt $1 - \epsilon < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ .

Wegen $a^{-\frac{1}{m}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \to 1$ für $m \to \infty$ gibt es ein $m_2 \in \mathbb{N}$ mit

$\left|a^{-\frac{1}{m}} - 1\right| < \epsilon$ für alle $m > m_2$ , das heißt $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ .

Wählt man nun $m_0 \geq \max\{m_{1,} m_2\}$ , so gelten für alle $m > m_0$ die Ungleichungen :

$$1 - \epsilon < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$$

$$1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$$

Es gilt also $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{m}}$ , $a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ .

Wegen $r_n \rightarrow 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}$ für alle $n > n_0$ .

Wegen der Monotonie von $y = a^x$ gilt :

$a^{-\frac{1}{m}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{m}}$ für $a > 1$

$a^{-\frac{1}{m}} > a^{r_n} > a^{\frac{1}{m}}$ für $0 < a < 1$

In beiden Fällen gilt also für alle $n > n_0$ :

$1 - \epsilon < a^{r_n} < 1 + \epsilon$

$-\epsilon < a^{r_n} - 1 < \epsilon$

$\left|a^{r_n} - 1\right| < \epsilon$

Damit ist gezeigt, das $a^{r_n} \rightarrow 1$ für $r_n \rightarrow 0$ gilt.

q.e.d.

# Stetige Fortsetzung der Exponentialfunktionen von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$

Für $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ lässt sich die Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{Q}$ stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

**Beweis :**

Sei $\rho \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es eine **Intervallschachtelung** $[r_n, s_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ .

Die Folgen $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind monoton und beschränkt und streben gegen $\rho \in \mathbb{R}$ :

$r_n \leq r_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$r_n \leq s_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$r_n \to \rho$

$s_n \geq s_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$s_n \geq r_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$s_n \to \rho$

$$\lim_{n \to \infty} |s_n - r_n| = 0$$

Wegen der Monotonie der Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{Q}$ sind die Folgen $a^{r_n}$ , $a^{s_n}$ monoton und ist beschränkt :

Falls $a \geq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^{r_n} \leq a^{r_n+1} \leq a^{s_1}$$
$$a^{r_1} \leq a^{s_n+1} \leq a^{s_n}$$

Falls $a < 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^{s_1} \leq a^{r_n+1} \leq a^{s_n}$$
$$a^{s_n} \leq a^{s_n+1} \leq a^{r_1}$$

Nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** ist jede monotone und beschränkte Folge auch konvergent. Der Grenzwert von $a^{r_n}$ sei

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a^{r_n} =: z}$$

Wegen $s_n \rightarrow \rho$ , $s_n \rightarrow \rho$ , $s_n - r_n \rightarrow 0$ gilt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n - r_n + r_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n - r_n} \cdot a^{r_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n - r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = z}$$

Betrachtet man nun die Folge der Intervalle $\left[a^{r_n}, a^{s_n}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ für $a > 0$ bzw. $\left[a^{s_n}, a^{r_n}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ für $0 < a < 1$ , so folgt für die Intervalllängen :

$$\lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - a^{s_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - z + z - a^{s_n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - a^{s_n}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - z\right| + \left|z - a^{s_n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - a^{s_n}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - z\right| + \lim_{n\to\infty} \left|z - a^{s_n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - a^{s_n}\right| \leq 0 + 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - a^{s_n}\right| \leq 0 \quad , \quad \texttt{also}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|a^{r_n} - a^{s_n}\right| = 0}$$

Die Bilder der Intervallschachtelung $\left[r_n, s_n\right]_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ mit dem Zentrum $\rho \in \mathbb{R}$ unter der Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{Q}$ sind also ebenfalls Intervallschachtelungen

$\left[a^{r_n}, a^{s_n}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ für $a > 0$ mit einem Zentrum $z \in \mathbb{R}$

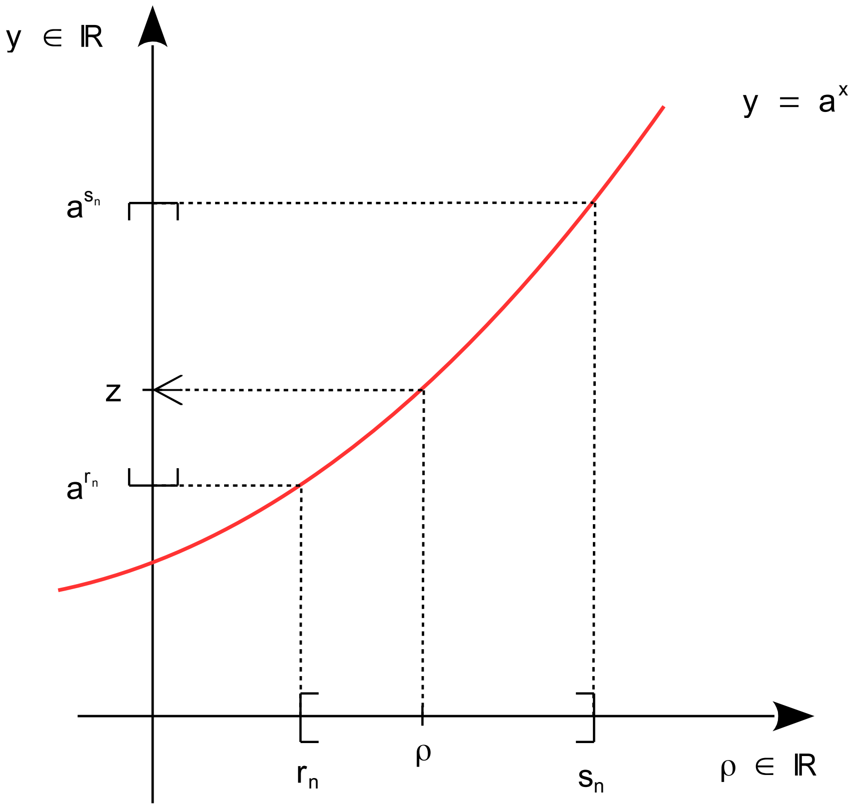
$\left[a^{s_n}, a^{r_n}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ für $0 < a < 1$ mit einem Zentrum $z \in \mathbb{R}$

Man definiert nun für die Zentren $\rho \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$

$$a^{\rho} := \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = z \quad ,$$

und erhält damit die **Fortsetzung der Funktion** $y = a^x \;,\; x \in \mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ :

$$y = a^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$



# Strenge Monotonie der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{R}$

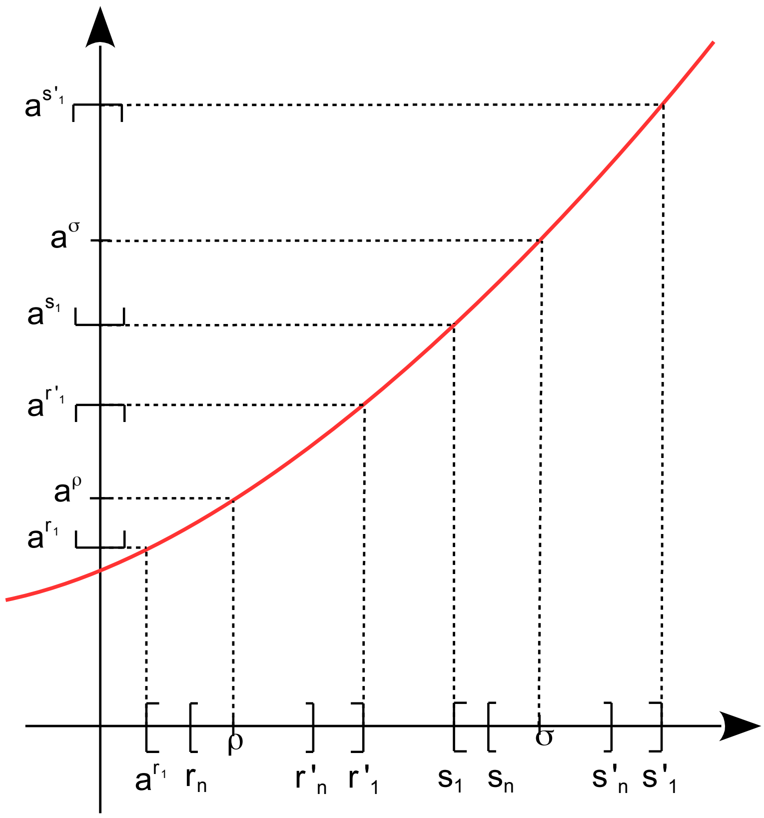
Für $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ ist die Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{R}$ ist streng monoton $\left\{\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}\right\}$ , falls $\left\{\begin{matrix} a > 1 \\ 0 < a < 1 \end{matrix}\right\}$ .

**Beweis :**

**1. Fall :** $a > 1$

Seien $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\rho < \sigma$ mit entsprechenden Intervallschachtelungen $[r_n, r'_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ , $[s_n, s'_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ .

Wegen der Monotonie der Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{Q}$ ergibt sich folgendes Bild bzw. folgende Abschätzung:




$$a^{\rho} < a^{r'_1} < a^{s_1} < a^{\sigma}$$

Also ist die Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{R}$ **streng monoton wachsend.**

**2. Fall :** $0 < a < 1$

Analog zeigt man, dass die Funktion $y = a^x$ , $x \in \mathbb{R}$ **streng monoton fallend** ist.

q.e.d.

## Gültigkeit der Potenzgesetze für reelle Exponenten

Für $a\ ,\ b \in \mathbb{R}\ ,\ \ a\ ,\ b > 0\ \ ,\ \ \rho\ ,\ \sigma \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^{\rho} \cdot a^{\sigma} = a^{\rho + \sigma}$$

$$\frac{a^{\rho}}{a^{\sigma}} = a^{\rho - \sigma}$$

$$a^{\rho} \cdot b^{\rho} = (a \cdot b)^{\rho}$$

$$\frac{a^{\rho}}{b^{\rho}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\rho}$$

**Bemerkung :** Das Potenzgesetz $(a^{\rho})^{\sigma} = a^{\rho \cdot \sigma}$ wird erst später bewiesen werden können, nachdem die Stetigkeit der Funktion $y = a^{x}\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$ gezeigt ist.

**Beweis :**

Seien $\rho , \sigma \in \mathbb{R}$ mit entsprechenden **Intervallschachtelungen** $[r_n , r'_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ , $[s_n , s'_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ .

Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} r_n + s_n = \rho + \sigma \quad , \quad \lim_{n \to \infty} r_n - s_n = \rho - \sigma \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = a^{\rho} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} a^{s_n} = a^{\sigma} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} a^{r_n + s_n} = a^{\rho + \sigma} \quad ,$$

und es folgt :

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} \cdot a^{s_n} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n + s_n}$$

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \to \infty} a^{s_n} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n + s_n}$$

$$\boxed{a^{\rho} \cdot a^{\sigma} = a^{\rho + \sigma}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n}$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n}} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n}$$

$$\boxed{\frac{a^{\rho}}{a^{\sigma}} = a^{\rho - \sigma}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a \cdot b)^{r_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a \cdot b)^{r_n}$$

$$\boxed{a^{\rho} \cdot b^{\rho} = (a \cdot b)^{\rho}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_n}$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_n}$$

$$\boxed{\frac{a^{\rho}}{b^{\rho}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\rho}}$$

## Stetigkeit der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{R}$

Für $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ ist die Funktion $y = a^x$ , $x \in R$ stetig, das heißt :

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad r_n \rightarrow \rho \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a^{r_n} \rightarrow a^{\rho}$$

**Beweis :**

Wegen $a^{r_n} = a^{r_n - \rho + \rho} = a^{r_n - \rho} \cdot a^{\rho}$ und $r_n - \rho \rightarrow 0$ muss man nur zeigen, dass $a^{r_n} \rightarrow 1$ für $r_n \rightarrow 0$ .

Sei also irgend ein $\epsilon > o$ gegeben.

Wegen $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \rightarrow 1$ für $m \rightarrow \infty$ gibt es ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit

$\left|a^{\frac{1}{m}} - 1\right| < \epsilon$ für alle $m > m_1$ , das heißt $1 - \epsilon < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ .

Wegen $a^{-\frac{1}{m}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$ für $m \rightarrow \infty$ gibt es ein $m_2 \in \mathbb{N}$ mit

$\left|a^{-\frac{1}{m}} - 1\right| < \epsilon$ für alle $m > m_2$ , das heißt $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ .

Wählt man nun $m_0 \geq \max\{m_1, m_2\}$ , so gelten für alle $m > m_0$ die Ungleichungen :

$$1 - \epsilon < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$$

$$1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$$

Es gilt also $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{m}} , a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ .

Wegen $r_n \to 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}$ für alle $n > n_0$ .

Wegen der Monotonie von $y = a^x$ auf $\mathbb{R}$ gilt :

$a^{-\frac{1}{m}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{m}}$ für $a > 1$

$a^{-\frac{1}{m}} > a^{r_n} > a^{\frac{1}{m}}$ für $0 < a < 1$

In beiden Fällen gilt also für alle $n > n_0$ :

$1 - \epsilon < a^{r_n} < 1 + \epsilon$

$-\epsilon < a^{r_n} - 1 < \epsilon$

$\left|a^{r_n} - 1\right| < \epsilon$

Damit ist gezeigt, dass $a^{r_n} \to 1$ für $r_n \in \mathbb{R}$ und $r_n \to 0$ gilt.

q.e.d.

## <u>Das Potenzgesetz für reelle Exponenten</u> $\left(a^{\rho}\right)^{\sigma} = a^{\rho \cdot \sigma}$

**Vorbemerkungen :**

Für $p \in \mathbb{Z}$ ist die Funktion $y = x^p$ , $x \in \mathbb{R}$ **stetig**, was direkt aus den Grenzwertsätzen folgt.

Das heißt : $x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad {x_n}^p \rightarrow x^p$

Für $q \in \mathbb{N}-\{0\}$ ist die Funktion $y = x^{\frac{1}{q}}$ , $x \in \mathbb{R}^+$ als Umkehrfunktion der stetigen Funktion $x = y^q$ **ebenfalls stetig**.

Das heißt : $x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad {x_n}^{\frac{1}{q}} \rightarrow x^{\frac{1}{q}}$

Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist die Funktion $y = x^{\frac{p}{q}}$ , $x \in \mathbb{R}^+$ **stetig**, denn es gilt :

$$x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad {x_n}^{\frac{p}{q}} = \left({x_n}^{\frac{1}{q}}\right)^p \rightarrow \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = x^{\frac{p}{q}}$$

Nun kann man das Potenzgesetz $\left(a^{\rho}\right)^{\sigma} = a^{\rho \cdot \sigma}$ für reelle Exponenten beweisen :

Seien $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ , $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit entsprechenden **Intervallschachtelungen** $[r_n, r'_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ , $[s_n, s'_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ .

$$\lim_{n \to \infty} \left(a^{r_n}\right)^{s_m} = \left(a^{\rho}\right)^{s_m}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(a^{r_n}\right)^{s_m} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n \cdot s_m} = a^{\rho \cdot s_m} \quad \text{, also}$$

$$\left(a^{\rho}\right)^{s_m} = a^{\rho \cdot s_m}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(a^{\rho}\right)^{s_m} = \lim_{m \to \infty} a^{\rho \cdot s_m}$$

$$\boxed{\left(a^{\rho}\right)^{\sigma} = a^{\rho \cdot \sigma}}$$

q.e.d.