Gammafunktion

Arno Fehringer , Juni 2016

Quellen:

Blatter, Ch. : Analysis I, II

Fehringer, A. : Stetige Fortsetzung der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{R}$, Jan. 2016

Fehringer, A. : Der Satz von Bolzano/Weierstraß und das Cauchy-Kriterium für Folgen in $\mathbb{R}$, Juni 2016

Uneigentliche Integrale

Gegeben sei die Funktion $f \; : \; (0;\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Es existiere für alle $a < b \in \mathbb{R}^+$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Wenn die Grenzwerte $\lim_{a\to 0} \int_0^c f(x)\,dx$ und $\lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$ für ein $m \in \mathbb{R}^+$ mit $a < m < b$ existieren, schreibt man

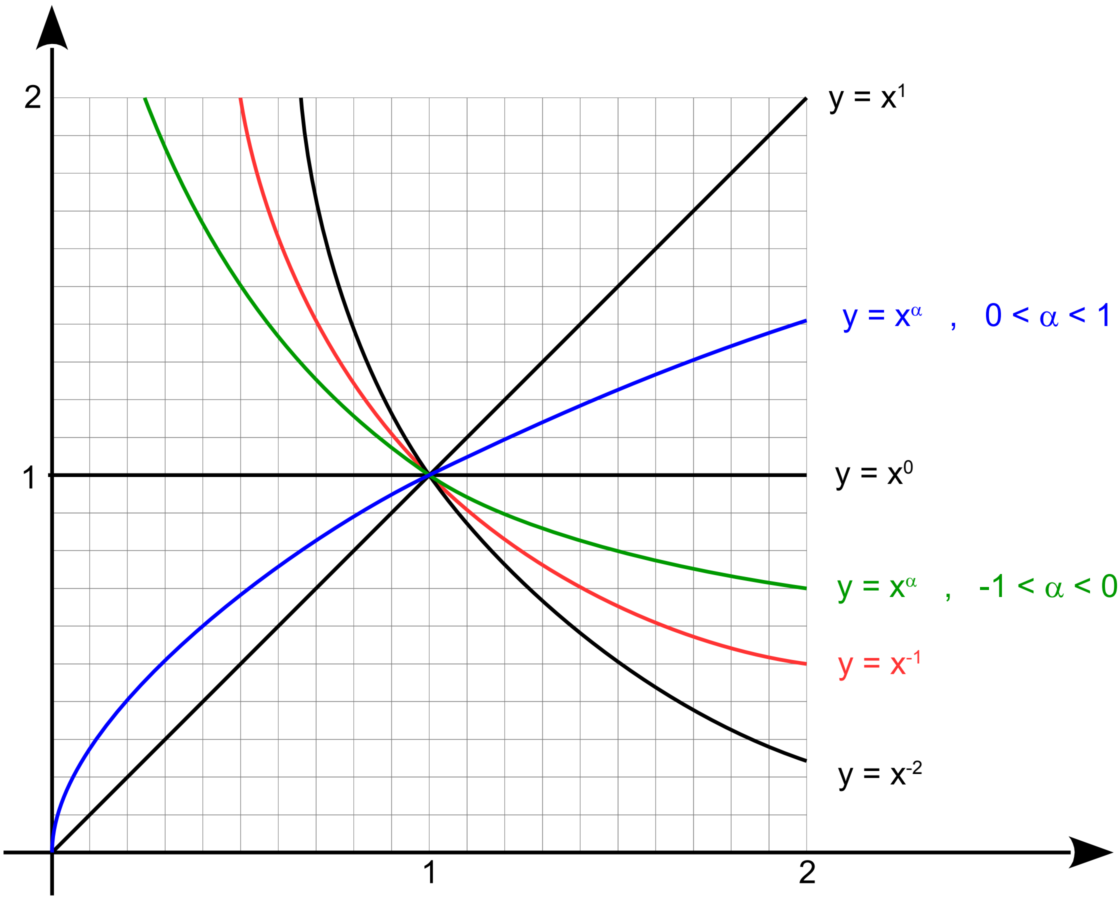
$$\boxed{\int_0^m f(x)\,dx := \lim_{a\to 0} \int_0^m f(x)\,dx} \quad ,$$

$$\boxed{\int_m^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_m^b f(x)\,dx} \quad ,$$

$$\boxed{\int_0^\infty f(x)\,dx := \int_0^m f(x)\,dx + \int_m^\infty f(x)\,dx} \quad .$$

Die so definierten Integrale heißen **uneigentliche Integrale**.

Spezielle uneigentliche Integrale



Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $y = x^{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^{+}$ definiert und ableitbar nach der Potenzregel $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Die Aufleitung funktioniert entsprechend umgekehrt.

Für $\alpha = -1$ ist die Aufleitung der Funktion $y = x^{-1}$ durch den Logarithmus $y = \ln(x)$ gegeben.

In [Fehringer 2016] wurde gezeigt, dass Potenzen mit reellen Exponenten definiert werden können und dass die Potenzgesetze gelten. Damit folgt :

$$y = x^{\alpha} = e^{\ln(x^{\alpha})} = e^{\alpha \ln(x)}$$

$$y' = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{\alpha} \cdot \alpha \frac{1}{x}$$

$$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad .$$

$\boxed{\alpha = -1}$

$$\int_0^1 x^{-1}\, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^{-1}\, dx = \lim_{a\to 0} \ln(1) - \ln(a) = 0 - -\infty = \infty$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-1}\, dx = \infty}$$

$\boxed{\alpha < -1} \quad \Rightarrow \quad \alpha + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad -(\alpha + 1) > 0$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} \Big|_a^1 \right)$$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(x^{\alpha+1} \Big|_a^1 \right)$$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(1 - a^{\alpha+1} \right)$$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{a^{-(\alpha+1)}} \right)$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \infty}$$

$\boxed{\alpha > -1} \quad \Rightarrow \quad \alpha + 1 > 0$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} \Big|_a^1 \right)$$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(x^{\alpha+1} \Big|_a^1 \right)$$

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(1 - a^{\alpha+1} \right)$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha+1}}$$

Also :

$$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \left\{ \begin{array}{lll} \infty & \text{für} & \alpha \le -1 \\ \dfrac{1}{\alpha+1} & \text{für} & -1 < \alpha \end{array} \right\}}$$

$$\boxed{\alpha = -1}$$

$$\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - \ln(1) = \infty - 0 = \infty$$

$$\boxed{\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \infty}$$

$$\boxed{\alpha < -1} \quad \Rightarrow \quad \alpha + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad -(\alpha + 1) > 0$$

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(x^{\alpha+1} \Big|_1^b \right)$$

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(b^{\alpha+1} - 1 \right)$$

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(\frac{1}{b^{-(\alpha+1)}} - 1 \right)$$

$$\boxed{\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \frac{1}{-(\alpha+1)}}$$

$$\boxed{\alpha > -1} \quad \Rightarrow \quad \alpha + 1 > 0$$

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(x^{\alpha+1} \Big|_1^b \right)$$

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(b^{\alpha+1} - 1 \right)$$

$$\boxed{\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \infty}$$

Also :

$$\boxed{\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{-(\alpha+1)} & \text{für} & \alpha < -1 \\ \infty & \text{für} & -1 \le \alpha \end{array} \right\}}$$

Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

Cauchy-Kriterium

(1) Das uneigentliche Integral $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_a^c f(x)\ dx = \int\limits_0^c f(x)\ dx$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $a, A \in (o; \delta)$ gilt:

$$\left| \int\limits_a^c f(x)\ dx - \int\limits_A^c f(x)\ dx \right| < \epsilon \ .$$

(2) Das uneigentliche Integral $\lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_c^b f(x)\ dx = \int\limits_c^\infty f(x)\ dx$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $b, B \in (\delta; \infty)$ gilt:

$$\left| \int\limits_c^b f(x)\ dx - \int\limits_c^B f(x)\ dx \right| < \epsilon \ .$$

Beweis (2) :

[Bemerkung: der Beweis für (1) wird entsprechend ausgeführt]

Es existiere das uneigentliche Integral $\lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_c^b f(x)\ dx = \int\limits_c^\infty f(x)\ dx$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $b \in (\delta; \infty)$ gilt :

$$\left| \int\limits_c^b f(x)\ dx - \int\limits_c^\infty f(x)\ dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Für alle $b, B \in (\delta; \infty)$ folgt dann:

$$\left| \int\limits_c^b f(x) dx - \int\limits_c^B f(x) dx \right| = \left| \int\limits_c^b f(x) dx - \int\limits_c^\infty f(x)\ dx + \int\limits_c^\infty f(x) dx - \int\limits_c^B f(x) dx \right|$$

$$\left| \int\limits_c^b f(x) dx - \int\limits_c^B f(x) dx \right| \le \left| \int\limits_c^b f(x) dx - \int\limits_c^\infty f(x) dx \right| + \left| \int\limits_c^\infty f(x) dx - \int\limits_c^B f(x) dx \right|$$

$$\left| \int_c^b f(x)dx - \int_c^B f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\left| \int_c^b f(x)dx - \int_c^B f(x)dx \right| < \epsilon \quad .$$

Sei nun umgekehrt das Kriterium erfüllt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gebe es ein $\delta > 0$, so dass für alle $b, B \in (\delta;\infty)$ gilt: $\left| \int_c^b f(x)\ dx - \int_c^B f(x)\ dx \right| < \epsilon$.

Seien nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irgend zwei über alle Grenzen hinaus wachsenden Folgen reeller Zahlen, für die also $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ gelte.

Dann gilt für die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_{0,}\ c_{0,}\ b_1\ c_1\ b_2\ c_2\ ...)$ ebenfalls $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Es gibt also zu $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $z_n > \delta$.

Für alle $n,\ m \geq n_0$ gilt dann $\left| \int_c^{z_n} f(x)\ dx - \int_c^{z_m} f(x)\ dx \right| < \epsilon$.

Die Folge $\left(\int_c^{z_n} f(x)\ dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt das Cauchy-Kriterium für Folgen und ist somit konvergent gegen den Grenzwert $g \in \mathbb{R}$.

Die Teilfolgen $\left(\int_c^{b_n} f(x)\ dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\int_c^{c_n} f(x)\ dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\left(\int_c^{z_n} f(x)\ dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ streben ebenfalls gegen den Grenzwert g . Dieser ist also unabhängig von der Wahl der Folgen.

Nach dem Übertragungsprinzip folgt nun also $\lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\ dx = g$ und somit

$$\lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\ dx = \int_c^\infty f(x)\ dx \quad .$$

q.e.d.

VergleichsKriterium

(1) Ist $\left| f(x) \right| \leq g(x)$ und existiert das uneigentliche Integral

$$\lim_{a\to 0} \int_a^c g(x)\,dx = \int_0^c g(x)\,dx \quad ,$$

so existiert auch das uneigentliche Integral

$$\lim_{a\to 0} \int_a^c f(x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx \quad .$$

(2) Ist $\left| f(x) \right| \leq g(x)$ und existiert das uneigentliche Integral

$$\lim_{b\to \infty} \int_c^b g(x)\,dx = \int_c^\infty g(x)\,dx \quad ,$$

so existiert auch das uneigentliche Integral

$$\lim_{b\to \infty} \int_c^b f(x)\,dx = \int_c^\infty f(x)\,dx \quad .$$

Beweis (2) :

[Bemerkung: der Beweis für (1) wird entsprechend ausgeführt]

Nach Voraussetzung existiert das uneigentliche Integral $\int_c^\infty g(x)\,dx$. Also gilt das Cauchy-Kriterium :

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $b, B \in (\delta ; \infty)$ gilt:

$$\left| \int_c^b g(x)\,dx - \int_c^B g(x)\,dx \right| < \epsilon \quad .$$

Es folgt dann:

$$\left| \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^B f(x)\,dx \right| = \left| \int_b^B f(x)\,dx \right|$$

$$\left| \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^B f(x)\,dx \right| \leq \int_b^B \left| f(x) \right| dx$$

$$\left| \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^B f(x)\,dx \right| \leq \int_b^B g(x)\,dx$$

$$\left| \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^B f(x)\,dx \right| \leq \int_c^b g(x)\,dx - \int_c^B g(x)\,dx$$

$$\left| \int_c^b f(x)\ dx - \int_c^B f(x)\ dx \right| \leq \left| \int_c^b g(x)\ dx - \int_c^B g(x)\ dx \right|$$

$$\left| \int_c^b f(x)\ dx - \int_c^B f(x)\ dx \right| < \epsilon$$

Die Funktion $\int_c^b f(x)\ dx$ genügt also dem Cauchy-Kriterium, und deshalb existiert das uneigentliche Integral $\lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\ dx = \int_c^\infty f(x)\ dx$.

q.e.d.

Weitere uneigentliche Integrale

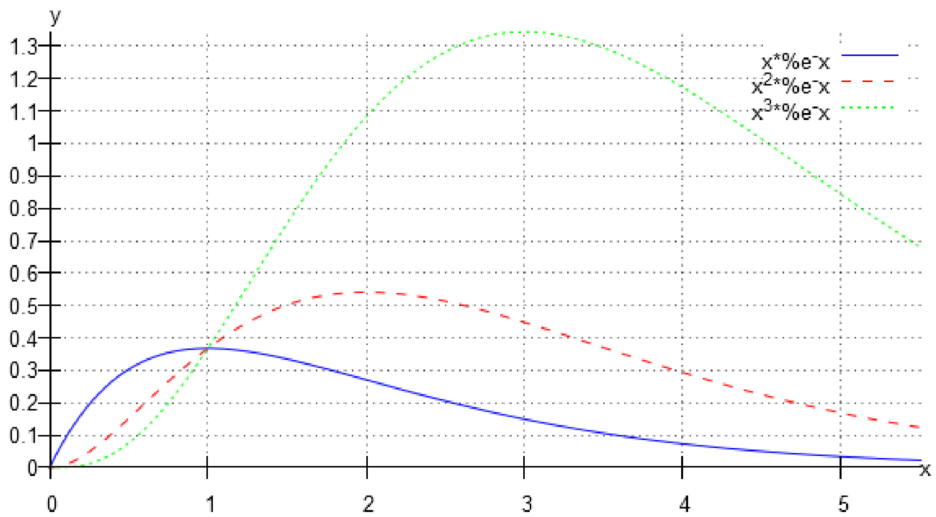
(1) Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = x^n \cdot e^{-x} = \frac{x^n}{e^x}$$

wxMaxima 15.04.0 [x exp(-x) (AF).wxmx]

```
wxplot2d ( [x^1*exp(-x),x^2*exp(-x), x^3*exp(-x)] ,  [x, 0, 5.5], [box, false], grid2d,
    [yx_ratio, 0.5], [axes, solid], [xtics, -1, 1, 10],
    [ytics, 0, 0.1, 2.5], [label, ["x", 5.5, 0], ["y", 0, 1.4],
    ["", 3.5, 0.5],["", 2.5, 0.3]] )$
```



Die Funktionen $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x}$ streben für große x asymptotisch gegen die x-Achse.

Es ist nämlich

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}{x^n} > \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!} \text{ , also } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ .}$$

Entsprechendes gilt auch für Funktionen $f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, denn für

$n-1 \le \alpha < n$, $n \le \alpha+1 < n+1$, $1 < n+1-\alpha$ folgt die Abschätzung

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}{x^\alpha} > \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x^\alpha} = \frac{x^{n+1-\alpha}}{(n+1)!} > \frac{x^1}{(n+1)!} \text{ , also } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \text{ , } \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \text{ .}$$

Entsprechend zeigt man, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{kx}} = 0$ für $k > 0$.

(2) Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Integrale der Funktionen $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x} = x^n \cdot e^{-x}$

von 0 bis $b \in \mathbb{R}_0^+$:

$\boxed{n = 0}$

$$\int_0^b x^0 \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} - -e^{-0} = -e^{-b} + 1$$

$$\int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + 1$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x}\,dx = 1}$$

$\boxed{n = 1}$

$$\int_0^b x^1 \cdot e^{-x}\,dx = -x^1 \cdot e^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b -1x^0 \cdot e^{-x}\,dx \quad \text{Produktintegration}$$

$$\int_0^b x^1 \cdot e^{-x}\,dx = -x^1 \cdot e^{-x}\Big|_0^b + 1 \cdot \int_0^b x^0 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^b x^1 \cdot e^{-x}\,dx = -b^1 \cdot e^{-b} + 1 \cdot \int_0^b x^0 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^1 \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -b^1 \cdot e^{-b} + 1 \cdot \int_0^b x^0 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^1 \cdot e^{-x}\,dx = 1 \cdot \int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^1 \cdot e^{-x}\,dx = 1}$$

$\boxed{n = 2}$

$$\int_0^b x^2 \cdot e^{-x}\,dx = -x^2 \cdot e^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b -2x^1 \cdot e^{-x}\,dx \quad \text{Produktintegration}$$

$$\int_0^b x^2 \cdot e^{-x}\,dx = -x^2 \cdot e^{-x}\Big|_0^b + 2 \cdot \int_0^b x^1 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^b x^2 \cdot e^{-x}\,dx = -b^2 \cdot e^{-b} + 2 \cdot \int_0^b x^1 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -b^2 \cdot e^{-b} + 2 \cdot \int_0^b x^1 \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} \; dx = 2 \cdot \int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x} \; dx$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} \; dx = 2 \cdot 1}$$

$$\boxed{n = 3}$$

$$\int_0^b x^3 \cdot e^{-x} \; dx = -x^3 \cdot e^{-x} \Big|_0^b - \int_0^b -3x^2 \cdot e^{-x} \; dx \quad \text{Produktintegration}$$

$$\int_0^b x^3 \cdot e^{-x} \; dx = -x^3 \cdot e^{-x} \Big|_0^b + 3 \cdot \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} \; dx$$

$$\int_0^b x^3 \cdot e^{-x} \; dx = -b^3 \cdot e^{-b} + 3 \cdot \int_0^b x^1 \cdot e^{-x} \; dx$$

$$\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} \; dx = \lim_{b \to \infty} -b^3 \cdot e^{-b} + 3 \cdot \int_0^b x^1 \cdot e^{-x} \; dx$$

$$\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} \; dx = 3 \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} \; dx$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} \; dx = 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

.

.

.

usw.

Vermutung :

Für alle $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x} \; dx = n!}$

Beweis :

Die Aussage $\int\limits_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\ dx = n!$ sei wahr für irgend ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgt, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist :

$$\int\limits_0^b x^3 \cdot e^{-x}\ dx = -x^3 \cdot e^{-x}\ \Big|_0^b - \int\limits_0^b -3x^2 \cdot e^{-x}\ dx \quad \text{Produktintegration}$$

$$\int\limits_0^b x^{n+1} \cdot e^{-x}\ dx = -x^{n+1} \cdot e^{-x}\ \Big|_0^b + (n+1) \cdot \int\limits_0^b x^n \cdot e^{-x}\ dx$$

$$\int\limits_0^b x^{n+1} \cdot e^{-x}\ dx = -b^{n+1} \cdot e^{-b} + (n+1) \cdot \int\limits_0^b x^n \cdot e^{-x}\ dx$$

$$\int\limits_0^\infty x^{n+1} \cdot e^{-x}\ dx = \lim_{b \to \infty} -b^{n+1} \cdot e^{-b} + (n+1) \cdot \int\limits_0^b x^1 \cdot e^{-x}\ dx$$

$$\int\limits_0^\infty x^{n+1} \cdot e^{-x}\ dx = (n+1) \cdot n!$$

$$\int\limits_0^\infty x^{n+1} \cdot e^{-x}\ dx = (n+1)!$$

q.e.d.

Wenn nun die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty x^t \cdot e^{-x}\, dx$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existierten, könnte man diese als Fortsetzung der Fakultätsfunktion $n!$ auffassen.

Um zu untersuchen für welche reelle t die Konvergenz gesichert ist, bedient man sich der Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale. Speziell wählt man zunächst folgende Zerlegung des Integrationsbereichs :

$$\int_a^b x^t \cdot e^{-x}\, dx = \int_a^1 x^t \cdot e^{-x}\, dx + \int_1^b x^t \cdot e^{-x}\, dx \quad .$$

Dann folgt im Intervall $(0;1]$ die Abschätzung : $x^t \cdot e^{-1} < x^t \cdot e^{-x} < x^t$

Weil das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^t\, dx$ für $-1 < t$ existiert und und sonst divergiert folgt nach dem Vergleichskriterium die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^1 x^t \cdot e^{-x}\, dx \quad .$$

Im Intervall $[1;\infty)$ gelten folgende Abschätzungen :

Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^t}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ für $t \in \mathbb{R}$ gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass gilt :

$$\frac{x^t}{e^{\frac{x}{2}}} \leq 1 \quad \text{für alle} \quad \delta < x \quad .$$

Man erhält weiter : $x^t \cdot e^{-x} = x^t \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

Da das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\, dx$ existiert, folgt nach dem Vergleichskriterium auch die Existenz den uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty x^t \cdot e^{-x}\, dx$.

Insgesamt erhalten wir für $-1 < t$ die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty x^t \cdot e^{-x}\, dx \quad .$$

Definition der Gammafunktion

Man definiert nun für alle $t > 0$ die **Gammafunktion**

$$\boxed{\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx} \quad .$$

Dann folgt speziell für natürliche Argumente.

$$\Gamma(1) := \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 0!$$

$$\Gamma(2) := \int_0^\infty x^1 \cdot e^{-x}\, dx = 1!$$

$$\Gamma(3) := \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}\, dx = 2!$$

.

.

.

$$\boxed{\Gamma(n+1) := \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\, dx = n!}$$

Die **Gammafunktion** gehorcht folgender **Funktionalgleichung**:

$$\boxed{\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)} \quad ,$$

denn

$$\Gamma(t+1) := \lim_{a \to 0} \left(\int_a^1 x^t \cdot e^{-x}\, dx \right) + \lim_{b \to \infty} \left(\int_1^b x^t \cdot e^{-x}\, dx \right)$$

$$\Gamma(t+1) = \lim_{a \to 0} \left(x^t \cdot -e^{-x} \,\Big|_a^1 - \int_a^1 t \cdot x^{t-1} \cdot -e^{-x}\, dx \right) + \lim_{b \to \infty} \left(x^t \cdot -e^{-x} \,\Big|_1^b - \int_1^b t \cdot x^{t-1} \cdot -e^{-x}\, dx \right)$$

$$\Gamma(t+1) = \lim_{a \to 0}\left(-1e^{-1}+a^t \cdot e^{-a} + t \cdot \int_a^1 x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx\right) + \lim_{b \to \infty}\left(-b^t \cdot e^{-b}+1e^{-1} + t \cdot \int_1^b x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx\right)$$

$$\Gamma(t+1) = -1e^{-1} + \lim_{a \to 0}\left(a^t \cdot e^{-a} + t \cdot \int_a^1 x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx\right) + 1e^{-1} + \lim_{b \to \infty}\left(-b^t \cdot e^{-b} + t \cdot \int_1^b x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx\right)$$

$$\Gamma(t+1) = \lim_{a \to 0}\left(a^t \cdot e^{-a} + t \cdot \int_a^1 x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx\right) + \lim_{b \to \infty}\left(-b^t \cdot e^{-b} + t \cdot \int_1^b x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx\right)$$

$$\Gamma(t+1) = t \cdot \int_0^1 x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx + t \cdot \int_1^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(t+1) = t \cdot \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$$

q.e.d.