Das Heron-Verfahren zur iterativen Bestimmung von Wurzeln

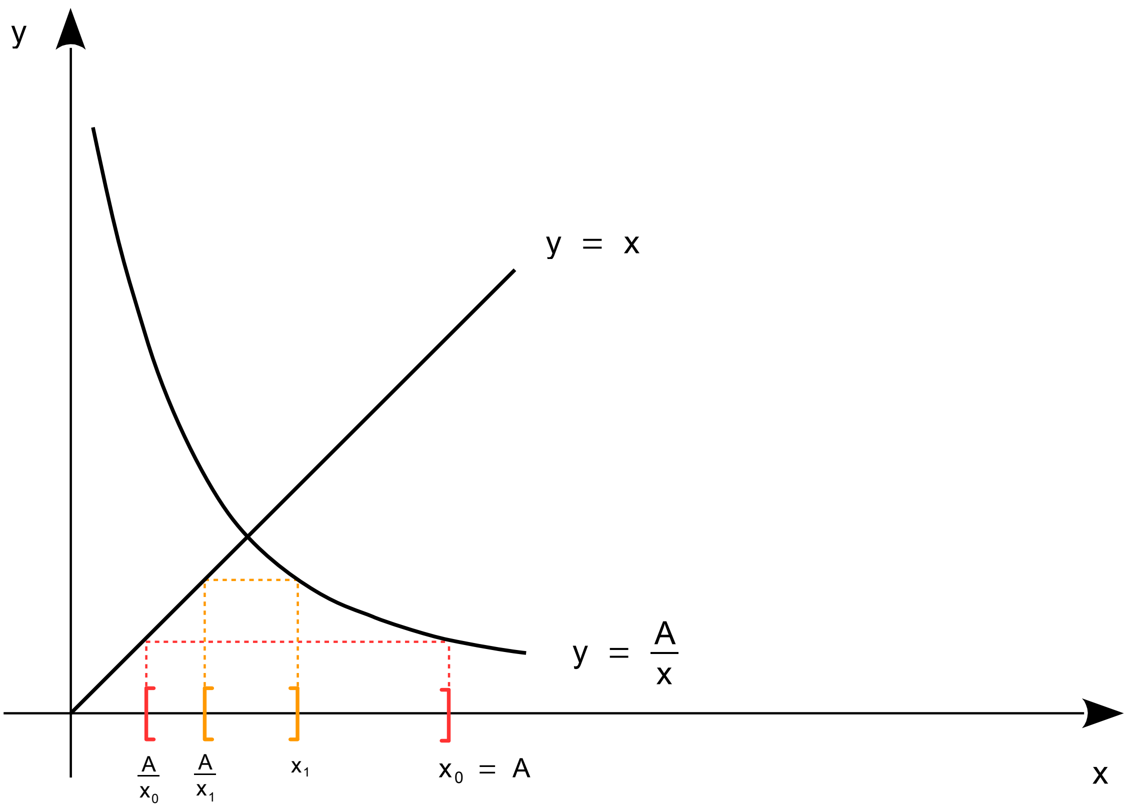
(Heron von Alexandria, ca. 10 - 75)
lat.: iterare = wiederholen

Gegeben sei die Zahl $A > 1$. Gesucht ist die Zahl x , die die Gleichung $x^2 = A$ erfüllt.

Es gilt folgende Äquivalenz :

$$x^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{A}{x}$$

Betrachtet man nun die entsprechenden Funktionen $y = x$ und $y = \frac{A}{x}$, so ergibt sich die gesuchte Lösung als Schnittstelle der beiden Funktionen :



Setze $x_0 := A$.

Wegen $A > 1$ folgt $A^2 > A$ und somit $x_0^{\,2} = A^2 > A$. Die Zahl $x_0 = A$ ist also zu groß.

Bildet man die Zahl $\dfrac{A}{x_0}$,

so ist diese zu klein, denn es ist $\left(\dfrac{A}{x_0}\right)^2 = \dfrac{A^2}{x_0^{\,2}} = \dfrac{A^2}{A^2} = 1 < A$.

Die gesuchte Lösung x liegt also im Intervall $\left[\dfrac{A}{x_0}\ ;\ x_o\right]$.

Setze $x_1 := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{x_0} + x_0\right)$.

Dann ist x_1 zu groß, denn nach der **Ungleichung vom Arithmetischen Mittel** ist

$$x_1^{\,2} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{x_0} + x_0\right)\right)^2 \geq \frac{A}{x_0} \cdot x_0 = A \ .$$

Bildet man die Zahl $\dfrac{A}{x_1}$,

so ist diese zu klein, denn es ist $\left(\dfrac{A}{x_1}\right)^2 = \dfrac{A^2}{x_1^{\,2}} \leq \dfrac{A^2}{A^2} = 1 < A$.

Die gesuchte Lösung x liegt also im Intervall $\left[\dfrac{A}{x_1}\ ;\ x_1\right]$

Außerdem gilt $\left[\dfrac{A}{x_0}\ ;\ x_0\right] \subset \left[\dfrac{A}{x_1}\ ;\ x_1\right]$:

Es ist nämlich $x_1 \in \left[\dfrac{A}{x_0}\ ;\ x_0\right]$, also $x_1 < x_0$, woraus folgt

$$\frac{1}{x_0} < \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{A}{x_0} < \frac{A}{x_1} \ .$$

Dieser Prozess lässt sich beliebig fortsetzen, so dass man eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $\left[\frac{A}{x_k}\ ;\ x_k\right]_{k \in \mathbb{N}}$ bekommt mit folgenden Eigenschaften :

$$\left[\frac{A}{x_k}\ ;\ x_k\right] \subset \left[\frac{A}{x_{k+1}}\ ;\ x_{k+1}\right] \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

$\frac{A}{x_k}$ ist zu klein und x_k ist zu groß für alle $k \in \mathbb{N}$

Außerdem streben die Längen der Intervalle gegen Null, was man wie folgt einsehen kann :

$$x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x_{k-1}} + x_{k-1}\right)$$

$$x_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{x_{k-1}} + \frac{1}{2} \cdot x_{k-1}$$

$$x_k = \frac{A}{x_{k-1}} + \frac{1}{2} \cdot x_{k-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{x_{k-1}}$$

$$x_k = \frac{A}{x_{k-1}} + \frac{1}{2}\left(x_{k-1} - \frac{A}{x_{k-1}}\right)$$

$$x_k - \frac{A}{x_{k-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} - \frac{A}{x_{k-1}}\right) \quad .$$

Wegen

$$\frac{A}{x_{k-1}} \leq \frac{A}{x_k}$$

folgt

$$-\frac{A}{x_{k-1}} \geq -\frac{A}{x_k}$$

$$x_k - \frac{A}{x_{k-1}} \geq x_k - \frac{A}{x_k}$$

und weiter

$$x_k - \frac{A}{x_{k-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} - \frac{A}{x_{k-1}}\right) \geq x_k - \frac{A}{x_k} \quad \text{, also}$$

$$x_k - \frac{A}{x_k} \leq \frac{1}{2}\left(x_{k-1} - \frac{A}{x_{k-1}}\right) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Setzt man diese Argumentation fort, so folgt nacheinander

$$x_k - \frac{A}{x_k} \leq \frac{1}{2}\left(x_{k-1} - \frac{A}{x_{k-1}}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x_{k-2} - \frac{A}{x_{k-2}}\right) \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(x_0 - \frac{A}{x_0}\right) \quad \text{, also}$$

$$x_k - \frac{A}{x_k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(x_0 - \frac{A}{x_0}\right) \quad .$$

Bezüglich des Grenzverhaltens folgt nun

$$\lim_{k \to \infty} x_k - \frac{A}{x_k} \leq \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(x_0 - \frac{A}{x_0}\right) = 0 \quad \text{, also}$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k - \frac{A}{x_k} = 0 \quad .$$

Die Folge $\left[\frac{A}{x_k} ; x_k\right]_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine **Intervallschachtelung mit dem Zentrum** x , und es gilt :

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A}{x_k}$$

$$x = \frac{A}{x}$$

$$x^2 = A \quad .$$

Die Zahl x ist also die gesuchte Lösung der Gleichung $x^2 = A$.

q.e.d.

Bemerkung :

Für den Fall $x^2 = A$ mit $0 < A < 1$ kann man folgendermaßen argumentieren :

$$x^2 = A$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{A}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{A}$$

Setze $\frac{1}{x} := u$

Dann ist u die Lösung der Gleichung $u^2 = \frac{1}{A}$ mit $\frac{1}{A} > 1$, und es folgt

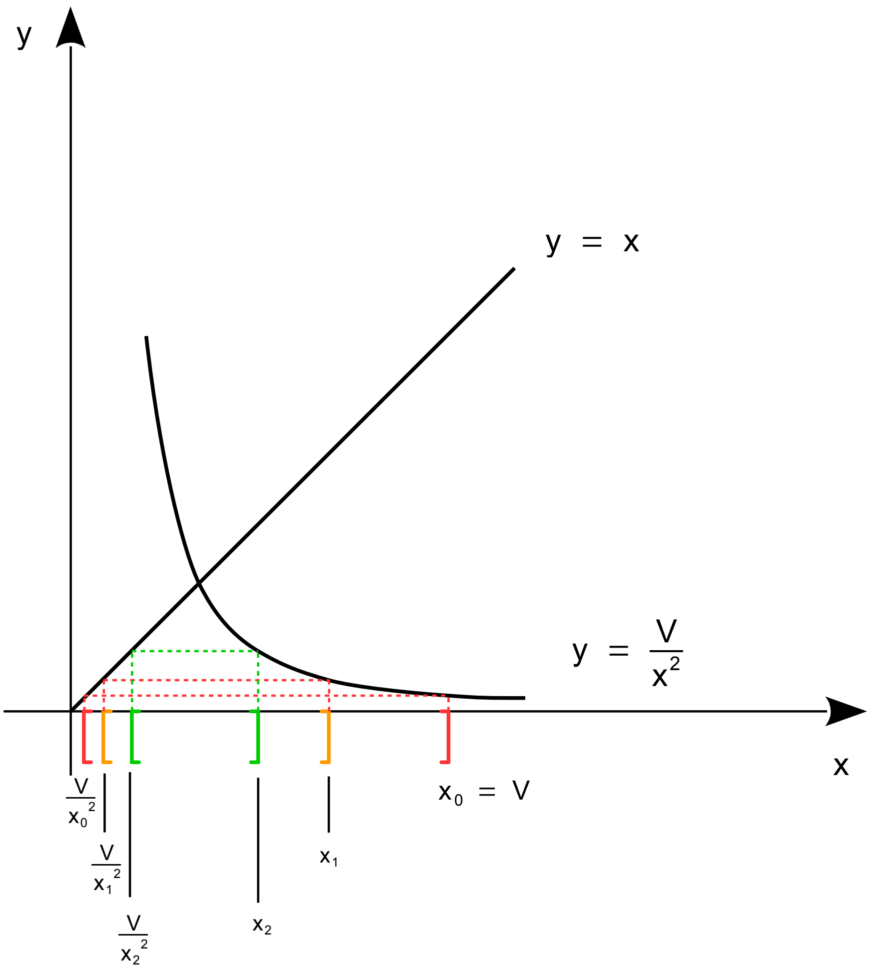
$$\frac{1}{u^2} = A$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)^2 = A$$

$x^2 = A$ mit $x = \frac{1}{u}$ als Lösung .

Das Heron-Verfahren kann für die Bestimmung von n-ten Wurzeln erweitert werden.

$$x^3 = V \quad \text{mit} \quad V > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{V}{x^2}$$



Setze $x_0 := V$.

Wegen $V > 1$ folgt $V^3 > A$ und somit $x_0^{\,3} = V^3 > V$. Die Zahl $x_0 = V$ ist also zu groß.

Bildet man die Zahl $\dfrac{V}{x_0^{\,2}}$,

so ist diese zu klein, denn es ist $\left(\dfrac{V}{x_0^{\,2}}\right)^3 = \dfrac{A^3}{x_0^{\,6}} = \dfrac{V^3}{V^6} = \dfrac{1}{V^3} < V$.

Die gesuchte Lösung x liegt also im Intervall $\left[\dfrac{V}{x_0^{\,2}} \; ; \; x_o\right]$.

Setze $\quad x_1 := \frac{1}{3}\left(\frac{V}{x_0^{\,2}} + x_0 + x_0\right)$.

Dann ist x_1 zu groß, denn nach der **Ungleichung vom Arithmetischen Mittel** ist

$$x_1^{\,3} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{V}{x_0^{\,2}} + x_0 + x_0\right)\right)^3 \geq \frac{V}{x_0^{\,2}} \cdot x_0 \cdot x_0 = V \quad .$$

Bildet man die Zahl $\frac{V}{x_1^{\,2}}$,

so ist diese zu klein, denn es ist $\left(\frac{V}{x_1^{\,2}}\right)^3 = \frac{V^3}{x_1^{\,6}} \leq \frac{V^3}{V^6} = \frac{1}{V^3} < V$.

Die gesuchte Lösung x liegt also im Intervall $\left[\frac{V}{x_1^{\,2}}\ ;\ x_1\right]$

Außerdem gilt $\left[\frac{V}{x_0^{\,2}}\ ;\ x_0\right] \subset \left[\frac{V}{x_1^{\,2}}\ ;\ x_1\right]$:

Es ist nämlich $x_1 \in \left[\frac{V}{x_0^{\,2}}\ ;\ x_0\right]$, also $x_1 < x_0$, woraus folgt

$$\frac{1}{x_0} < \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_0^{\,2}} < \frac{1}{x_1^{\,2}}$$

$$\frac{V}{x_0^{\,2}} < \frac{V}{x_1^{\,2}} \quad .$$

Dieser Prozess lässt sich beliebig fortsetzen, so dass man eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $\left[\frac{V}{x_k^{\,2}} \;;\; x_k\right]_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ bekommt mit folgenden Eigenschaften :

$$\left[\frac{V}{x_k^{\,2}} \;;\; x_k\right] \subset \left[\frac{V}{x_{k+1}^{\,2}} \;;\; x_{k+1}\right] \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{V}{x_k^{\,2}} \quad \text{ist zu klein und} \quad x_k \quad \text{ist zu groß} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

Außerdem streben die Längen der Intervalle gegen Null, was man wie folgt einsehen kann :

$$x_k = \frac{1}{3}\left(\frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} + 2x_{k-1}\right)$$

$$x_k = \frac{1}{3}\cdot\frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} + \frac{2}{3}\cdot x_{k-1}$$

$$x_k = \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} + \frac{2}{3}\cdot x_{k-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{V}{x_{k-1}^{\,2}}$$

$$x_k = \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} + \frac{2}{3}\left(x_{k-1} - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}}\right)$$

$$x_k - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} = \frac{2}{3}\left(x_{k-1} - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}}\right) \quad .$$

Wegen

$$\frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} \le \frac{V}{x_k^{\,2}}$$

folgt

$$-\frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} \ge -\frac{V}{x_k^{\,2}}$$

$$x_k - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} \ge x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}}$$

und weiter

$$, \quad x_k - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}} = \frac{2}{3}\left(x_{k-1} - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}}\right) \geq x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}} \quad , \text{ also}$$

$$x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}} \leq \frac{2}{3}\left(x_{k-1} - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}}\right) \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Setzt man diese Argumentation fort, so folgt nacheinander

$$x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}} \leq \frac{2}{3}\left(x_{k-1} - \frac{V}{x_{k-1}^{\,2}}\right) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(x_{k-2} - \frac{V}{x_{k-2}^{\,2}}\right) \leq \ldots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k\left(x_0 - \frac{V}{x_0^{\,2}}\right) \quad , \text{ also}$$

$$x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k\left(x_0 - \frac{V}{x_0^{\,2}}\right)$$

Bezüglich des Grenzverhaltens folgt nun

$$\lim_{k\to\infty} x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}} \leq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k\left(x_0 - \frac{V}{x_0^{\,2}}\right) = 0 \quad , \text{ also}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k - \frac{V}{x_k^{\,2}} = 0 \quad .$$

Die Folge $\left[\frac{V}{x_k^{\,2}} \; ; \; x_k\right]_{k \,\in\, \mathbb{N}}$ ist also eine **Intervallschachtelung mit dem Zentrum** x , und es gilt :

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \frac{V}{x_k^{\,2}}$$

$$x = \frac{V}{x^2}$$

$$x^3 = V \quad .$$

Die Zahl x ist also die gesuchte Lösung der Gleichung $x^3 = V$.

q.e.d.

Bemerkung :

Für den Fall $x^3 = V$ mit $0 < V < 1$ kann man folgendermaßen argumentieren :

$$x^3 = V$$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{V}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{V}$$

Setze $\frac{1}{x} := u$

Dann ist u die Lösung der Gleichung $u^3 = \frac{1}{V}$ mit $\frac{1}{V} > 1$, und es folgt

$$\frac{1}{u^3} = V$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)^3 = V$$

$x^3 = V$ mit $x = \frac{1}{u}$ als Lösung .

Das **Heron-Verfahren** zur Gleichung $x^2 = 5$

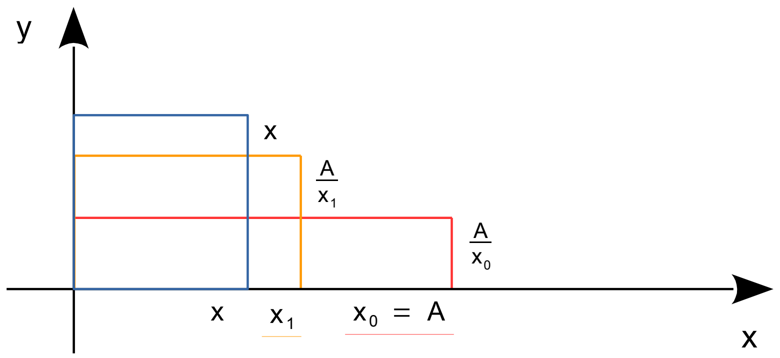
LibreOffice , Version: 4.4.4.3

A= 5

k	xk	A / xk
0	5,00000000000000000000	1,00000000000000000000
1	3,00000000000000000000	1,66666666666667000000
2	2,33333333333333000000	2,14285714285714000000
3	2,23809523809524000000	2,23404255319149000000
4	2,23606889564336000000	2,23606705935659000000
5	2,23606797749998000000	2,23606797749960000000
6	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
7	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
8	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
9	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
10	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
11	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
12	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
13	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
14	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
15	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
16	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000
17	2,23606797749979000000	2,23606797749979000000

Das **Heron-Verfahren** zur Gleichung $x^2 = A$ kann geometrisch veranschaulicht werden durch eine Folge von Rechtecken, die gegen das Quadrat mit der Kantenlänge x konvergiert.

Die Rechtecke haben jeweils eine zu große Breite x_k und eine zu kleine Höhe $\frac{A}{x_k}$. Der Flächeninhalt ist immer gleich A .



Das **Heron-Verfahren** zur Gleichung $x^3 = 5$

LibreOffice , Version: 4.4.4.3

V= 5

k	xk	V / xk^2
0	5,00000000000000000000	0,20000000000000000000
1	3,40000000000000000000	0,43252595155709300000
2	2,41084198385236000000	0,86026551214972700000
3	1,89398315995149000000	1,39385557955952000000
4	1,72727396648750000000	1,67589787229467000000
5	1,71014860175656000000	1,70963068880853000000
6	1,70997596410721000000	1,70997591181566000000
7	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
8	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
9	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
10	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
11	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
12	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
13	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
14	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
15	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
16	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000
17	1,70997594667670000000	1,70997594667670000000

Das **Heron-Verfahren** zur Gleichung $x^3 = V$ kann geometrisch veranschaulicht werden durch eine Folge von quadratischen Säulen, die gegen den Würfel mit der Kantenlänge x konvergiert.
Die quadratischen Säulen haben jeweils zu große Breiten x_k , x_k und eine zu kleine Höhe $\frac{V}{x_k^2}$. Das Volumen ist immer gleich V .