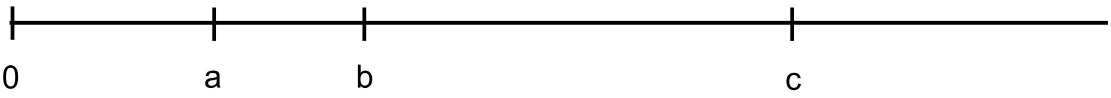
Medietäten (Mittelwerte)

(gr.: μεσοτητεζ = Bezeichnung für eine Verhältnisgleichung mit nur 3 Zahlen)
(lat.: medius = mitten)



Positive Zahlen	**Positive Differenzen**
$a \;,\; b \;,\; c$ mit	$b-a \;,\; c-a \;,\; c-b$
$a < b < c$	

Verhältnisse (Zahlen)

$\frac{a}{a}=1$	$\frac{b}{b}=1$	$\frac{c}{c}=1$
$\frac{a}{b}<1$	$\frac{a}{c}<1$	$\frac{b}{c}<1$
$\frac{b}{a}>1$	$\frac{c}{a}>1$	$\frac{c}{b}>1$

Verhältnisse (Differenzen)

$\frac{b-a}{b-a}=1$	$\frac{c-a}{c-a}=1$	$\frac{c-b}{c-b}=1$
$\frac{b-a}{c-a}<1$	$\frac{b-a}{c-b}$	$\frac{c-b}{c-a}<1$
$\frac{c-a}{b-a}>1$	$\frac{c-b}{b-a}$	$\frac{c-a}{c-b}>1$

Aufgabe :

Es sollen Verhältnisgleichungen aufgestellt werden, so dass auf der linken Seite ein Verhältnis aus reinen Zahlen und auf der rechten Seite ein Verhältnis aus Differenzen stehen .

Verhältnisgleichungen

Haben die Gleichungen Lösungen für b , so heißt b **Medietät** (von a und c) .

(1) $$\frac{a}{a} = \frac{b-a}{c-b}$$

(2) $$\frac{a}{a} = \frac{c-b}{b-a}$$

(3) $$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$$

(4) $$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b}$$

(5) $$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$$

(6) $$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a}$$

(7) $$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$$

(8) $$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

(9) $$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

(10) $$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$$

(11) $$\frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-a}$$

(12) $$\frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

(13) $$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

(14) $$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a}$$

Verhältnisgleichungen

Haben die Gleichungen Lösungen für b , so heißt b **Medietät** (von a und c) .

(1) $$\frac{a}{a} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$1 = \frac{b-a}{c-b}$$

$$c-b = b-a$$

$$a+c = 2b$$

$$\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$$

Arithmetisches Mittel

Es ist $2a < 2b = a+c < 2c$, also $a < b = \frac{a+c}{2} < c$.

(2) $$\frac{a}{a} = \frac{c-b}{b-a}$$

Arithmetisches Mittel, entsprechend (1)

(3) $$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$ac-a^2 = b^2-ab$$

$$0 = b^2-ab-ac+a^2$$

$$0 = b^2-ab-a(c-a)$$

$$\boxed{b = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+a(c-a)}}$$

Es ist :

$$b = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+a(c-a)} > \frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$, also $b > a$

.

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a(c-a)} < c$$

$$\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a(c-a)} < c - \frac{a}{2}$$

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a(c-a) < \left(c - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4} + a(c-a) < c^2 - ca + \frac{a^2}{4}$$

$$a(c-a) < c(c - a)$$

$a < c$ [wahre Aussage]

Also ist $b < c$.

(4) $$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$ac - ab = b^2 - ab$$

$$ac = b^2$$

$$\boxed{b = \sqrt{ac}}$$

Geometrisches Mittel

Es ist :

$$a < \sqrt{ac} < c$$

$$a^2 < ac < c^2$$

$a < c$ [wahre Aussage]

(5) $$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$ac - a^2 = -b^2 + cb$$

$$b^2 - cb + \left(ac - a^2\right) = 0$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{c}{2}\right)^2 - \left(ac - a^2\right)}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - ac + a^2}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4ca + 4a^2}{4}}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{(c-2a)^2}{4}}$$

1. Fall : $c-2a > 0$, d. h. $c > 2a$

$$b = \frac{c}{2} \pm \frac{c-2a}{2}$$

$b = c-a$ oder $b = a$ Widerspruch

2. Fall : $c-2a = 0$, d. h. $c = 2a$

$b = \frac{c}{2} = \frac{2a}{2} = a$ Widerspruch

$b = c-a$ oder $b = a$ Widerspruch

3. Fall : $c-2a < 0$, d. h. $c < 2a$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{(2a-c)^2}{4}}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \frac{2a-c}{2}$$

$b = a$ Widerspruch oder $b = c-a$

Zwar ist dann $b = c-a < c$, aber $b = c-a > a$ würde beinhalten, dass $c > 2a$ ist, im Widerspruch zur Voraussetzung $c < 2a$.

Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$ hat also nur unter der einschränkenden Bedingung $c > 2a$ eine Lösung.

(6) $$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a}$$

$$ab-a^2 = bc-b^2$$

$$b^2-cb+ab-a^2 = 0$$

$$b^2 - (c-a)b - a^2 = 0$$

$$b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$\boxed{b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2}}$$

Es ist :

$$b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$b > \sqrt{a^2}$$

$$b > a$$

Ob auch $b < c$ gilt, sie man so :

$$\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2} < c$$

$$\sqrt{\left(-\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2} < c - \frac{c-a}{2}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2} < \frac{c+a}{2}$$

$$\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2 < \left(\frac{c+a}{2}\right)^2$$

$$\frac{(c-a)^2}{4} + a^2 < \frac{(c+a)^2}{4}$$

$$(c-a)^2 + 4a^2 < (c+a)^2$$

$$c^2 - 2ca + a^2 + 4a^2 < c^2 + 2ca + a^2$$

$$-2ca + 4a^2 < 2ca$$

$4a^2 \quad < \quad 4ca$

$a \quad < \quad c$ [wahre Aussage]

Also ist $b \quad < \quad c$.

(7) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$

$ac-a^2 = cb-ca$

$2ac-a^2 = cb$

$2a(c-a) = cb$

$$\boxed{\frac{2a(c-a)}{c} = b}$$

Es ist :

$\frac{2a(c-a)}{c} > a$

$2a(c-a) > ac$

$2ac-a^2 > ac$

$ac-a^2 > 0$

$c-a > 0$ [wahre Aussage]

$\frac{2a(c-a)}{c} < c$

$2a(c-a) < c^2$

$2ac-a^2 < c^2$

$0 < c^2-2ca+a^2$

$0 < (c-a)^2$

$0 < c-a$ [wahre Aussage]

(8) $$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$ac-ab = cb-ca$$

$$2ac = (a+c)b$$

$$\boxed{b = \frac{2ac}{a+c}}$$

Harmonisches Mittel

Es ist :

$$\frac{2ac}{a+c} > a$$

$$2ac > a^2+ac$$

$$ac > a^2$$

$c > a$ [wahre Aussage]

$$\frac{2ac}{a+c} < c$$

$$2ac < ac+c^2$$

$$ac < c^2$$

$a > c$ [wahre Aussage]

(9) $$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$a(c-a) = c^2-cb$$

$$cb = c^2-a(c-a)$$

$$cb = c^2-ac+a^2$$

$$cb = c(c-a)+a^2$$

$$\boxed{b = \frac{c(c-a)+a^2}{c}}$$

Es ist :

$$\frac{c(c-a)+a^2}{c} > a$$

$$c(c-a)+a^2 > ac$$

$$c^2-ac+a^2 > ac$$

$$c^2-2ca+a^2 > 0$$

$$(c-a)^2 > 0$$

$c-a > 0$ [wahre Aussage]

$$\frac{c(c-a)+a^2}{c} < c$$

$$c(c-a)+a^2 < c^2$$

$$c^2-ac+a^2 < c^2$$

$$-ac+a^2 < 0$$

$$a^2 < ac$$

$a < c$ [wahre Aussage]

(10) $$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$$

$$ab-a^2 = c^2-cb$$

$$(a+c)b = a^2+c^2$$

$$\boxed{b = \frac{a^2+c^2}{a+c}}$$

Es ist :

$$\frac{a^2+c^2}{a+c} > a$$

$$a^2+c^2 > a^2+ac$$

$$c^2 > ac$$

$c > a$ [wahre Aussage]

$$\frac{a^2+c^2}{a+c} < c$$

$a^2+c^2 < ac+c^2$

$a^2 < ac$

$a < c$ [wahre Aussage]

(11) $\frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-a}$

$bc-ab = cb-ca$

$-ab = -ac$

$b = c$ Widerspruch zur Voraussetzung

(12) $\frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-b}$

$bc-b^2 = cb-ca$

$-b^2 = -ca$

$b^2 = ac$

$b = \sqrt{ac}$ **Geometrisches Mittel**, entsprechend (4)

(13) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$

$bc-ba = c^2-cb$

$2bc-ba = c^2$

$(2c-a)b = c^2$

$$\boxed{b = \frac{c^2}{2c-a}}$$

Es ist :

$$\frac{c^2}{2c-a} > a$$

$$c^2 > 2ca - a^2$$

$$c^2 - 2ca + a^2 > 0$$

$$(c-a)^2 > 0$$

$$c - a > 0 \qquad \text{[wahre Aussage]}$$

$$\frac{c^2}{2c-a} < c$$

$$c^2 < 2c^2 - ac$$

$$0 < c^2 - ac$$

$$0 < c - a \qquad \text{[wahre Aussage]}$$

(14) $$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a}$$

$$b^2 - ab = c^2 - cb$$

$$b^2 + (c-a)b - c^2 = 0$$

$$\boxed{b = -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2}}$$

Es ist :

$$-\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2} > a$$

$$\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2} > a + \frac{c-a}{2}$$

$$\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2 > \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2 > a^2 + a(c-a) + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2 > a^2 + ac - a^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$c^2 > ac$$

$c > a$ [wahre Aussage]

$$-\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2} < c$$

$$\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2} < c + \frac{c-a}{2}$$

$$\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2 < \left(c + \frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2 < c^2 + c(c-a) + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$0 < c(c-a)$ [wahre Aussage]

Es gibt also nur 10 Medietäten :

(1) $\frac{a}{a} = \frac{b-a}{c-b}$ $\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$ Arithmetisches Mittel

(2) $\frac{a}{a} = \frac{c-b}{b-a}$ Arithmetisches Mittel

(3) $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$ $\boxed{b = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a(c-a)}}$

(4) $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b}$ $\boxed{b = \sqrt{ac}}$ Geometrisches Mittel

(5) $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$

(6) $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a}$ $\boxed{b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2}}$

(7) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$ $\boxed{\frac{2a(c-a)}{c} = b}$

(8) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$ $\boxed{b = \frac{2ac}{a+c}}$ Harmonisches Mittel

(9) $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$ $\boxed{b = \frac{c(c-a)+a^2}{c}}$

(10) $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$ $\boxed{b = \frac{a^2+c^2}{a+c}}$

(11) $\frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-a}$

(12) $\frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-b}$ Geometrisches Mittel

(13) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$ $\boxed{b = \frac{c^2}{2c-a}}$

(14) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a}$ $\boxed{b = -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2}}$

Es gibt also nur 10 Medietäten :

(1)	$\frac{a}{a} = \frac{b-a}{c-b}$	$\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$	**Arithmetisches Mittel**
(3)	$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$	$\boxed{b = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a(c-a)}}$	
(4)	$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b}$	$\boxed{b = \sqrt{ac}}$	**Geometrisches Mittel**
(6)	$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a}$	$\boxed{b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2}}$	
(7)	$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$	$\boxed{\frac{2a(c-a)}{c} = b}$	
(8)	$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$	$\boxed{b = \frac{2ac}{a+c}}$	**Harmonisches Mittel**
(9)	$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$	$\boxed{b = \frac{c(c-a)+a^2}{c}}$	
(10)	$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$	$\boxed{b = \frac{a^2+c^2}{a+c}}$	
(13)	$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$	$\boxed{b = \frac{c^2}{2c-a}}$	
(14)	$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a}$	$\boxed{b = -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2}}$	

Es gibt also nur 10 Medietäten :

(I) $\frac{a}{a} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a+c}{2}}$ **Arithmetisches Mittel**

(II) $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a(c-a)}}$

(III) $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{ac}}$ **Geometrisches Mittel**

(IV) $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2}}$

(V) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a} \Rightarrow \boxed{\frac{2a(c-a)}{c} = b}$

(VI) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2ac}{a+c}}$ **Harmonisches Mittel**

(VII) $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c(c-a)+a^2}{c}}$

(VIII) $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a^2+c^2}{a+c}}$

(IX) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c^2}{2c-a}}$

(X) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right) + c^2}}$

Geschichtliches zu den Medietäten

Alle 10 Medietäten kommen in der „Einführung in die Arithmetik“ des **Nicomachus von Gerasa** (um 100 nach Chr.) vor.

Die Formulierung der Verhältnisgleichungen ist bei **Tropfkes „Geschichte der Elementarmathemarik“** anders und bezieht sich auf die Zahlen $c < b < a$. Durch Umbenennung würden sich der Reihe nach folgende Gleichungen ergeben :

(I) $b - a = c - a$ **Arithmetische** Proportion

(III) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ **Geometrische** Proportion

(VI) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$ **Harmonische** Proportion

(VIII) $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$

(IV) $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a}$

(X) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a}$

(V) $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$

(VII) $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$

(II) $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$

$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$

Die Gleichung (IX) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$ fehlt hier.

Statt dessen ist folgende Gleichung, die jedoch nur unter einschränkende Bedingungen für die Zahlen a , c eine Lösung für b erlaubt, angegeben :

$$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$$

Versuch der Lösung :

$$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$ac - a^2 = -b^2 + cb$$

$$b^2 - cb + \left(ac - a^2\right) = 0$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{c}{2}\right)^2 - \left(ac - a^2\right)}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - ac + a^2}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4ca + 4a^2}{4}}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{(c-2a)^2}{4}}$$

1. Fall : $c-2a > 0$, d. h. $c > 2a$

$$b = \frac{c}{2} \pm \frac{c-2a}{2}$$

$b = c-a$ oder $b = a$ Widerspruch

2. Fall : $c-2a = 0$, d. h. $c = 2a$

$b = \frac{c}{2} = \frac{2a}{2} = a$ Widerspruch

$b = c-a$ oder $b = a$ Widerspruch

3. Fall : $c-2a < 0$, d. h. $c < 2a$

$$b = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{(2a-c)^2}{4}}$$

$$b = \frac{c}{2} \pm \frac{2a-c}{2}$$

$b = a$ Widerspruch oder $b = c-a$

Zwar ist dann $b = c-a < c$, aber $b = c-a > a$ würde beinhalten, dass $c > 2a$ ist, im Widerspruch zur Voraussetzung $c < 2a$.

Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$ hat also nur unter der einschränkenden Bedingung $c > 2a$ eine Lösung.

Es gibt also genau die zuvor gezeigten 10 Medietäten:

(I)	$b - a = c - a$	**Arithmetische** Proportion
(III)	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$	**Geometrische** Proportion
(VI)	$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$	**Harmonische** Proportion
(VIII)	$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$	
(IV)	$\frac{a}{b} = \frac{c-b}{b-a}$	
(X)	$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{b-a}$	
(V)	$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$	
(VII)	$\frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$	
(II)	$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$	
(IX)	$\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$	

Die Medietät (IX) $\frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$ fehlt bei **Nicomachus** , statt dessen ist sie durch die nur unter einschränkenden Bedingungen geltende Medietät $\frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$ ersetzt.

Nicomachus of Gerasa : Introduction to Arithmetic, translated by M. L. d'Ooge, THE MACMILLAN COMPANY, New York, 1926, (S. 281 - 286)

Tropfke, J. : Geschichte der Elementarmathematik, Band 1, Verlag von Veit und Comp. , 1902, (S. 232 -234)