Die 3 klassischen Mittelwerte

Voraussetzungen

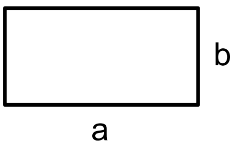
Binomische Formeln

$$(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

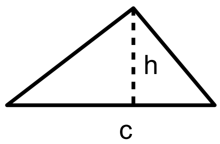
$$(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Flächenformeln



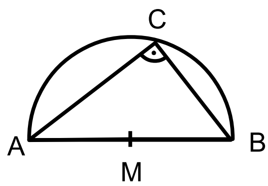
$$A = ab$$



$$A = \frac{ch}{2}$$

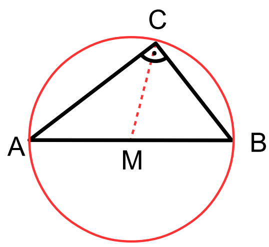
Satz von Thales

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.



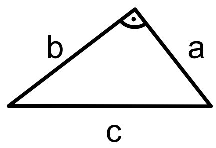
Satz vom Umkreis

Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert die Hypothenuse .



Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

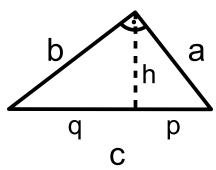


Euklidische Flächensätze : Kathetensätze, Höhensatz

$$a^2 = pc$$

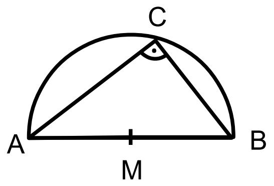
$$b^2 = qc$$

$$h^2 = pq$$



Satz vonThales

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter .



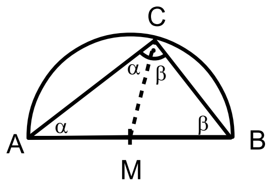
Beweis :

Wegen der Gleichschenkligkeit der Dreiecke und dem Winkelsummensatz für Dreiecke gilt

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

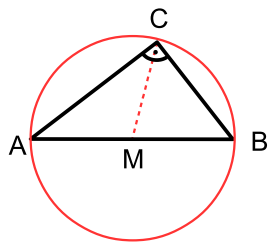
$$2(\alpha + \beta) = 180°$$

$$(\alpha + \beta) = 90°$$



Satz vom Umkreis

Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC mit $< C = 90°$ halbiert die Hypothenuse



Beweis :

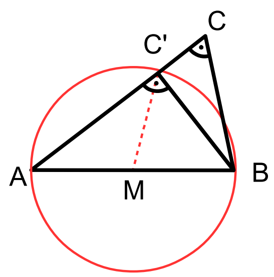
Sei $|AB| = c$ und M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Dann sind $A \; , \; B \; \in \; K_{M,\frac{c}{2}}$.

Angenommen, $C \notin K_{M,\frac{c}{2}}$, sondern zum Beispiel außerhalb.

Dann gibt es ein $C' \in K_{M,\frac{c}{2}}$, so dass nach dem Satz von Thales das Dreieck $\Delta ABC'$ rechtwinklig ist mit $< C' = 90°$.

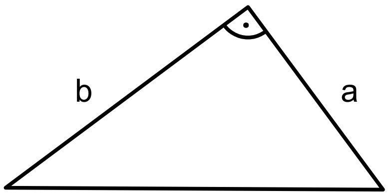
Dann hätte aber das Dreieck $\Delta BCC'$ zwei rechte Winkel. Widerspruch !



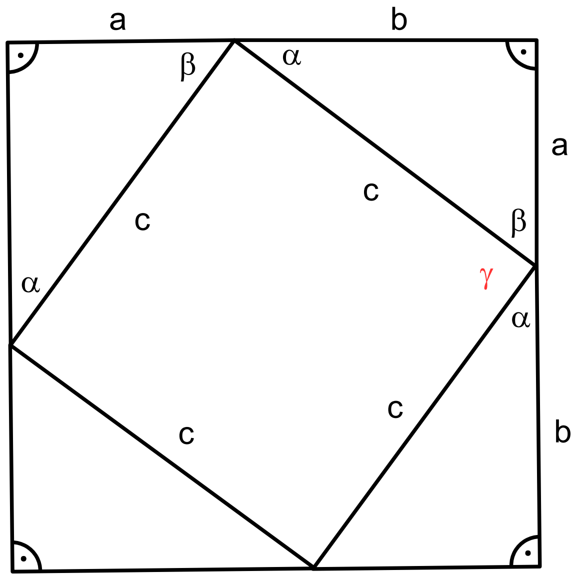
Satz von Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Beweis :



Winkelsummensatz

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

Winkel an Geraden

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$90° + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 90°$$

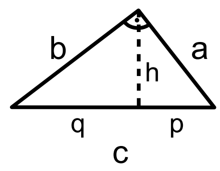
Flächenbetrachtung

$$(a + b)^2 = c^2 + \frac{4 \cdot ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Euklidische Flächensätze : Kathetensätze, Höhensatz



$a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 = p^2 + h^2$ $\qquad$ $b^2 = q^2 + h^2$ $\qquad$ $c = p + q$

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = (p + q)^2$$

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$h^2 = pq$$

$$a^2 = p^2 + h^2$$

$$a^2 = p^2 + pq$$

$$a^2 = p(p + q)$$

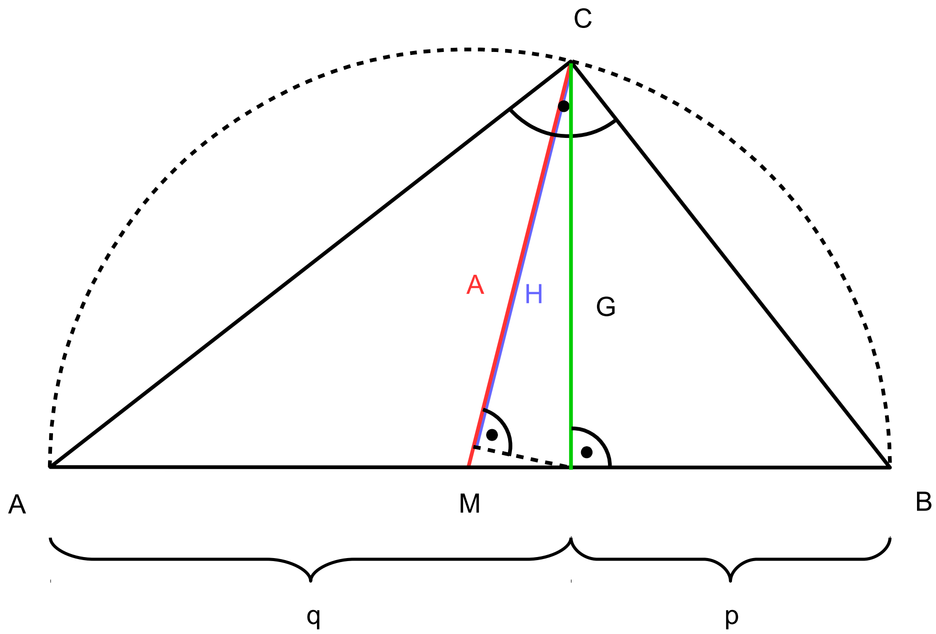
$$a^2 = pc$$

Analog :

$$b^2 = qc$$

Die 3 klassischen Mittelwerte

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ΔABC mit $\sphericalangle C = 90°$.



Umkreisradius A von ΔABC

$$\boxed{A = \frac{p + q}{2}}$$

Arithmetisches Mittel von p und q .

Höhe G von ΔABC

$$\boxed{G = \sqrt{p\ q}}$$

Geometrisches Mittel von p und q .

Projektion H von G auf A

$$\boxed{H = \frac{2\ p\ q}{p + q}}$$

Harmonisches Mittel von p und q .

Beweis :

Der Radius ist gleich dem halben Durchmesser :

$$A = \frac{p + q}{2}$$

Höhensatz :

$$G^2 = p \; q$$

$$G = \sqrt{p \; q}$$

Kathetensatz :

$$G^2 = H \; A$$

$$H = \frac{G^2}{A}$$

$$H = \frac{p \; q}{\frac{p + q}{2}}$$

$$H = \frac{2 \; p \; q}{p + q}$$

q.e.d.

Zusammenhang der 3 klassischen Mittelwerte

Satz :

Für das **Arithmetische** , **Geometrische** und das **Harmonische** **Mittel** der Zahlen p und q mit $A = \frac{p + q}{2}$, $G = \sqrt{p\ q}$ und $H = \frac{2\ p\ q}{p + q}$ gelten folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen:

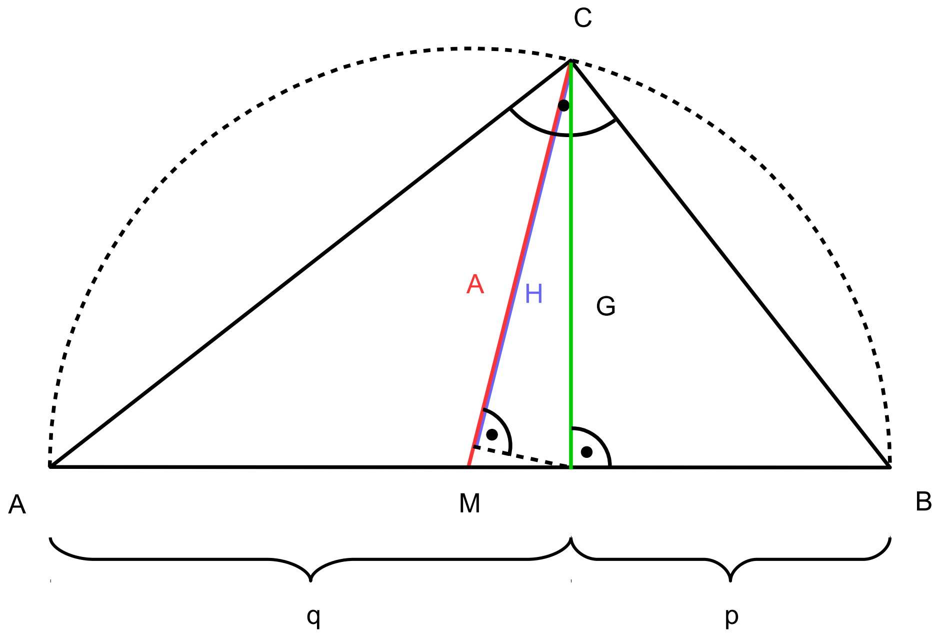
$H < G < A$ falls $p \neq q$; $H = G = A$ falls $p = q$

Beweis :

1) **Geometrisch-anschaulicher** Beweis :

Wie bereits gezeigt kommen alle 3 Mittelwerte der folgenden Figur vor :

Dreieck ΔABC mit $\angle C = 90°$.



Weil die Katheten im rechtwinklige Dreieck immer größer als die Hypotenuse sind, kann man die Ungleichungen unmittelbar aus der Zeichnung ablesen.
Falls $p = q$ ist fallen alle Strecken zusammen, und es gilt $H = G = A$

2) **Algebraischer** Beweis :

$$H < G$$

$$\frac{2\ p\ q}{p\ +\ q} < \sqrt{p\ q}$$

$$\frac{4\ p^2\ q^2}{(p\ +\ q)^2} < p\ q$$

$$\frac{4\ p\ q}{(p\ +\ q)^2} < 1$$

$$4\ pq < (p\ +\ q)^2$$

$$4\ pq < p^2 + 2pq + q^2$$

$$0 < p^2 - 2pq + q^2$$

$0 < (p-q)^2$ Wahre Aussage , falls $p \neq q$!

Falls $p = q$ gilt $H = \dfrac{2\ p^2}{2p} = p = \sqrt{p\ p} = G$.

$$G < A$$

$$\sqrt{p\ q} < \frac{p\ +\ q}{2}$$

$$2\sqrt{p\ q} < p\ +\ q$$

$$4pq < (p+q)^2$$

$$4pq < p^2 + 2pq + q^2$$

$$0 < p^2 - 2pq + q^2$$

$0 < (p-q)^2$ Wahre Aussage , falls $p \neq q$!

Falls $p = q$ gilt $G = \sqrt{p\ p} = p = \dfrac{p\ +\ p}{2} = A$.

Zusammenhang der 3 klassischen Mittelwerte

Satz :

Für das **Arithmetische** , **Geometrische** und das **Harmonische Mittel** der Zahlen p und q mit $A = \frac{p + q}{2}$, $G = \sqrt{p\ q}$ und $H = \frac{2\ p\ q}{p + q}$ gilt :

$$G = \sqrt{H\ A} \quad .$$

Das Geometrische Mittel ist gleich dem Geometrischen Mittel vom Harmonischen und Arithmetischen Mittel !

Beweis :

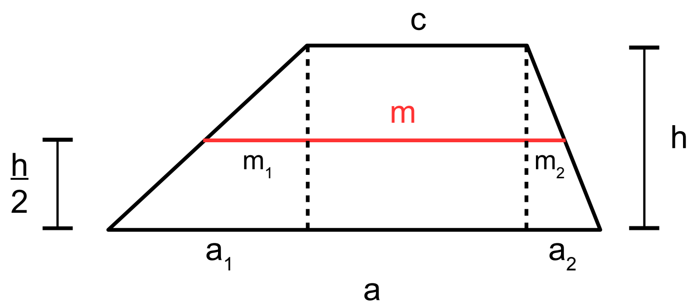
$$\sqrt{H\ A} = \sqrt{\frac{2pq}{p+q}\ \frac{p+q}{2}}$$

$$\sqrt{H\ A} = \sqrt{p\ q}$$

$$\sqrt{H\ A} = G$$

Die 3 klassischen Mittelwerte am Trapez

Teilung des Trapezes in halber Höhe



$$\frac{m_1}{a_1} = \frac{\frac{h}{2}}{h}$$

$$\frac{m_1}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$m_1 = \frac{a_1}{2}$$ analog : $$m_2 = \frac{a_2}{2}$$

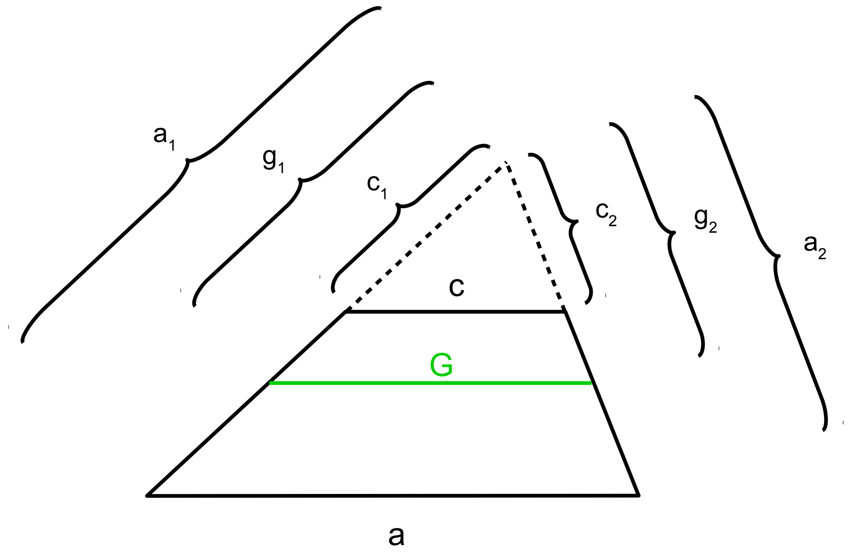
$$m = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + c$$

$$m = \frac{a_1 + a_2 + 2c}{2}$$

$$m = \frac{a_1 + a_2 + c + c}{2}$$

$$\boxed{m = \frac{a + c}{2}}$$

Teilung des Trapezes in zwei ähnliche Trapeze



Ähnlichkeitsbedingung :

$$\frac{a}{G} =: k \qquad \frac{G}{c} =: k$$

Strahlensatz :

$$\frac{a_1}{g_1} = \frac{a}{G} =: k$$

$$\frac{g_1}{c_1} = \frac{G}{c} =: k$$

$$\frac{a_1}{g_1} = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\frac{a_1}{g_1} - 1 = \frac{g_1}{c_1} - 1$$

$$\frac{a_1 - g_1}{g_1} = \frac{g_1 - c_1}{c_1}$$

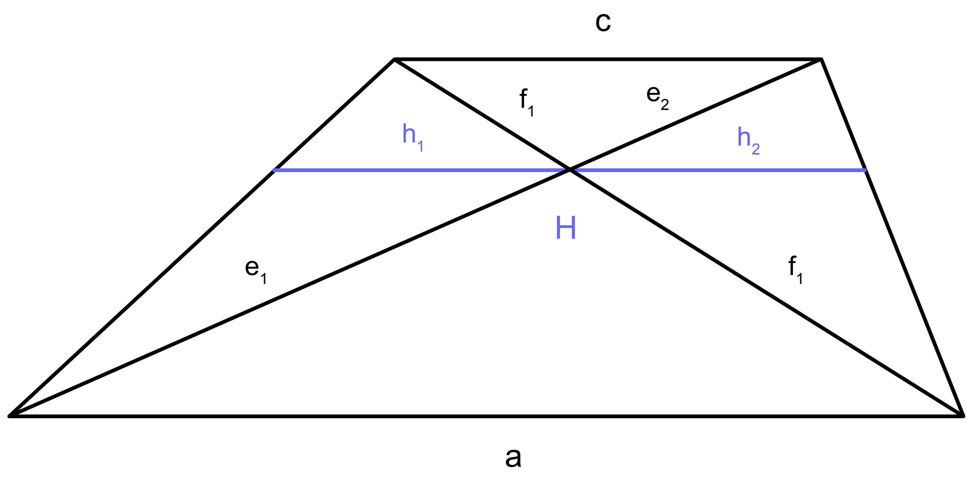
$$\frac{a_1 - g_1}{g_1 - c_1} = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\frac{a_1 - g_1}{g_1 - c_1} = k \qquad \text{analog :} \qquad \frac{a_2 - g_2}{g_2 - c_2} = k$$

Wegen der Winkelgleichheit ist Ähnlichkeit mit dem Ähnlichkeitsfaktor k gezeigt .

$$\frac{a}{G} = \frac{G}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \sqrt{a\ c}}$$

Waagrechte Teilung des Trapezes durch den Diagonalenschnittpunkt



Strahlensätze :

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{a}{c} \qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{e_1}{e_2} + 1 = \frac{a}{c} + 1 \qquad \frac{f_1}{f_2} + 1 = \frac{a}{c} + 1$$

$$\frac{e_1 + e_2}{e_2} = \frac{a + c}{c} \qquad \frac{f_1 + f_2}{f_2} = \frac{a + c}{c}$$

$$\frac{e_1 + e_2}{e_2} = \frac{a}{h_2} \qquad \frac{f_1 + f_2}{f_2} = \frac{a}{h_1}$$

$$\frac{a + c}{c} = \frac{a}{h_2} \qquad \frac{a + c}{c} = \frac{a}{h_1}$$

$$h_2 = \frac{a\ c}{a + c} \qquad h_1 = \frac{a\ c}{a + c}$$

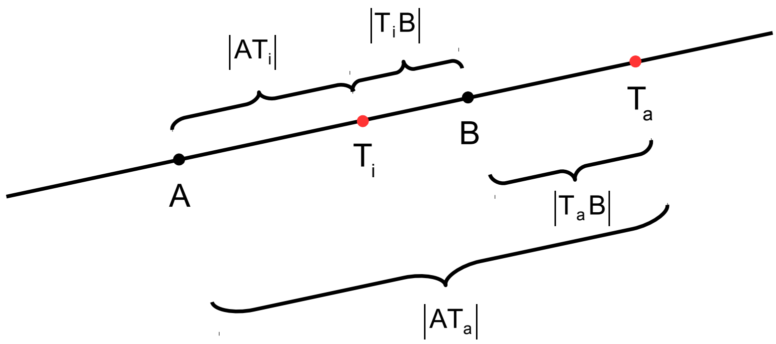
$$H = h_2 + h_1$$

$$\boxed{H = \frac{2\ a\ c}{a + c}}$$

Die Harmonische Teilung

Gegeben sei die Gerade AB. Gesucht sind Punkte T_i, T_a auf AB mit

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|} > 1 \quad .$$



Die Punkte T_i, T_a heißen **Harmonische Punkte** zu A, B.

Bemerkung :

Dann sind auch die Punkte B, A **Harmonische Punkte** zu T_a, T_i, denn :

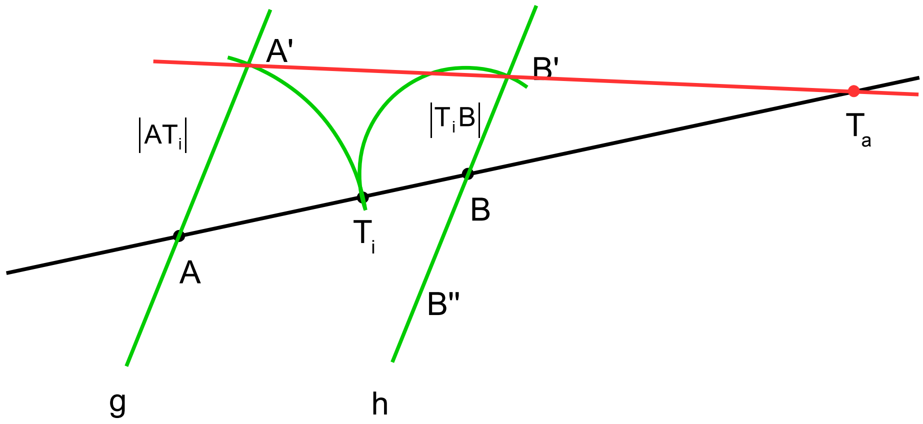
$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

$$\frac{|T_aB|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|AT_i|}$$

$$\frac{|T_aB|}{|BT_i|} = \frac{|T_aA|}{|AT_i|}$$

Lösung :

Falls man den Punkt $T_i \in \overline{AB}$ vorgibt, kann man den Punkt $T_a \in AB$ wie folgt konstruieren :



(1) g durch A , h durch B , $g \parallel h$

(2) $K\left(A, |AT_i|\right)$, $K\left(A, |T_iB|\right)$

(3) $A' \in K\left(A, |AT_i|\right)$, $B' \in K\left(A, |T_iB|\right)$, A' , B' liegen auf der gleichen Seite bezüglich AB

(4) $A'B' \cap AB = \{T_a\}$

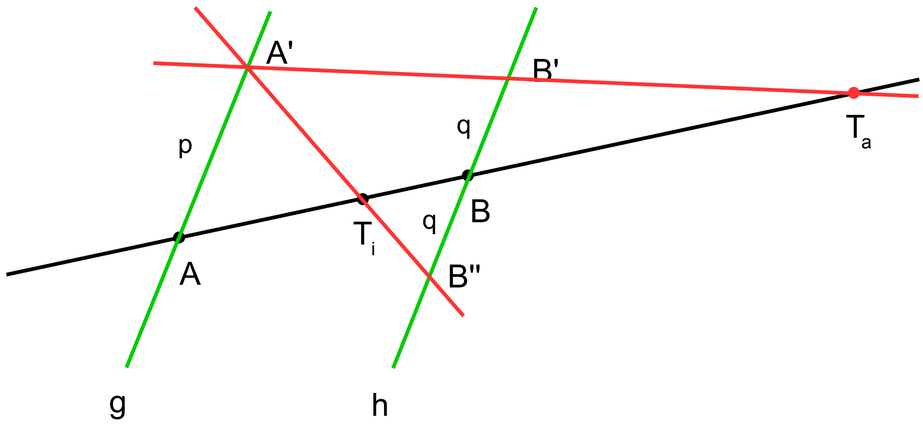
Nach dem 2. Strahlensatz gilt :

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

Lösung :

Falls man für das Verhältnis eine bestimmte Zahl vorgibt, etwa $\dfrac{|AT_i|}{|T_iB|} = \dfrac{p}{q} > 1$, findet man die Punkte T_i , T_a auf AB nach folgender Konstruktion :



(1) g durch A , h durch B , $g \parallel h$

(2) $A' \in g$ mit $|AA'| = p$, $B' \in h$ mit $|BB'| = q$, A' , B' liegen auf der gleichen Seite bezüglich AB

(3) $A' \in g$ mit $|AA'| = p$, $B'' \in h$ mit $|BB''| = q$, B'' , B' liegen auf verschiedenen Seiten bezüglich AB

(4) $A'B' \cap AB = \{T_a\}$, $A'B'' \cap AB = \{T_i\}$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt :

$$\frac{p}{q} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{|AT_i|}{|T_iB|}$$

Also :

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

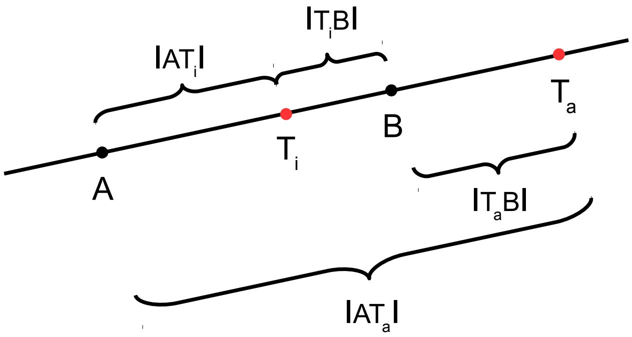
q.e.d.

Zusammenhang zwischen Harmonischer Teilung und Harmonischem Mittel

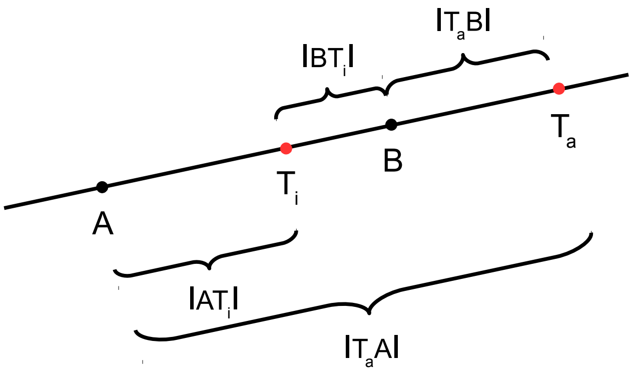
Gegeben seien 4 Punkte auf einer Geraden $A < T_i < B < T_a$, so dass die Punkte T_i , T_a Harmonische Punkte bezüglich A , B sind, und umgekehrt, dass die Punkte B , A Harmonische Punkte bezüglich T_a , T_i sind.

Dann gelten die Gleichungen :

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$



$$\frac{|T_aB|}{|BT_i|} = \frac{|T_aA|}{|AT_i|}$$



Behauptung :

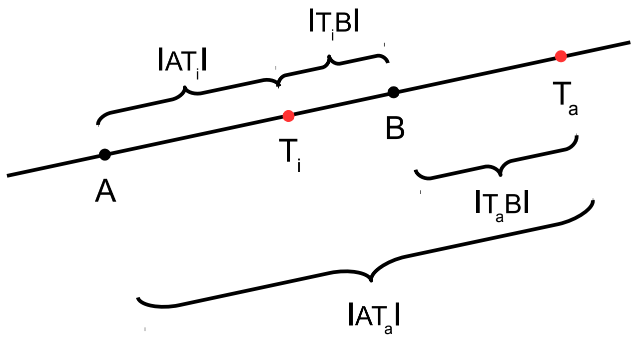
Betrachtet man nur die Abstände $|AT_i| < |AB| < |AT_a|$ bzw. $|T_aB| < |T_aT_i| < |T_aA|$, so ist

$|AB|$ das **Harmonische Mittel** von $|AT_i|$, $|AT_a|$, d. h. $|AB| = \dfrac{2\ |AT_i|\ |AT_a|}{|AT_i| + |AT_a|}$.

Analog ist

$|T_aT_i|$ das **Harmonische Mittel** von $|T_aB|$, $|T_aA|$, d. h. $|T_aT_i| = \dfrac{2\ |T_aB|\ |T_aA|}{|T_aB| + |T_aA|}$.

Beweis :



$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

In der Gleichung müssen $|T_iB|$ und $|T_aB|$ ersetzt werden durch

$$|T_iB| = |AB| - |AT_i| \quad , \quad |T_aB| = |AT_a| - |AB| \quad .$$

$$\frac{|AT_i|}{|AB| - |AT_i|} = \frac{|AT_a|}{|AT_a| - |AB|}$$

$$|AT_i|\left(|AT_a| - |AB|\right) = |AT_a|\left(|AB| - |AT_i|\right)$$

$$|AT_i||AT_a| - |AT_i||AB| = |AT_a||AB| - |AT_a||AT_i|$$

$$|AT_i||AT_a| = |AT_a||AB| + |AT_i||AB| - |AT_a||AT_i|$$

$$2\ |AT_i||AT_a| = |AT_a||AB| + |AT_i||AB|$$

$$2\ |AT_i||AT_a| = \left(|AT_a| + |AT_i|\right)|AB|$$

$$\frac{2\ |AT_i|\ |AT_a|}{|AT_a| + |AT_i|} = |AB|$$

$$|AB| = \frac{2\ |AT_i|\ |AT_a|}{|AT_i| + |AT_a|}$$

q,e,d,