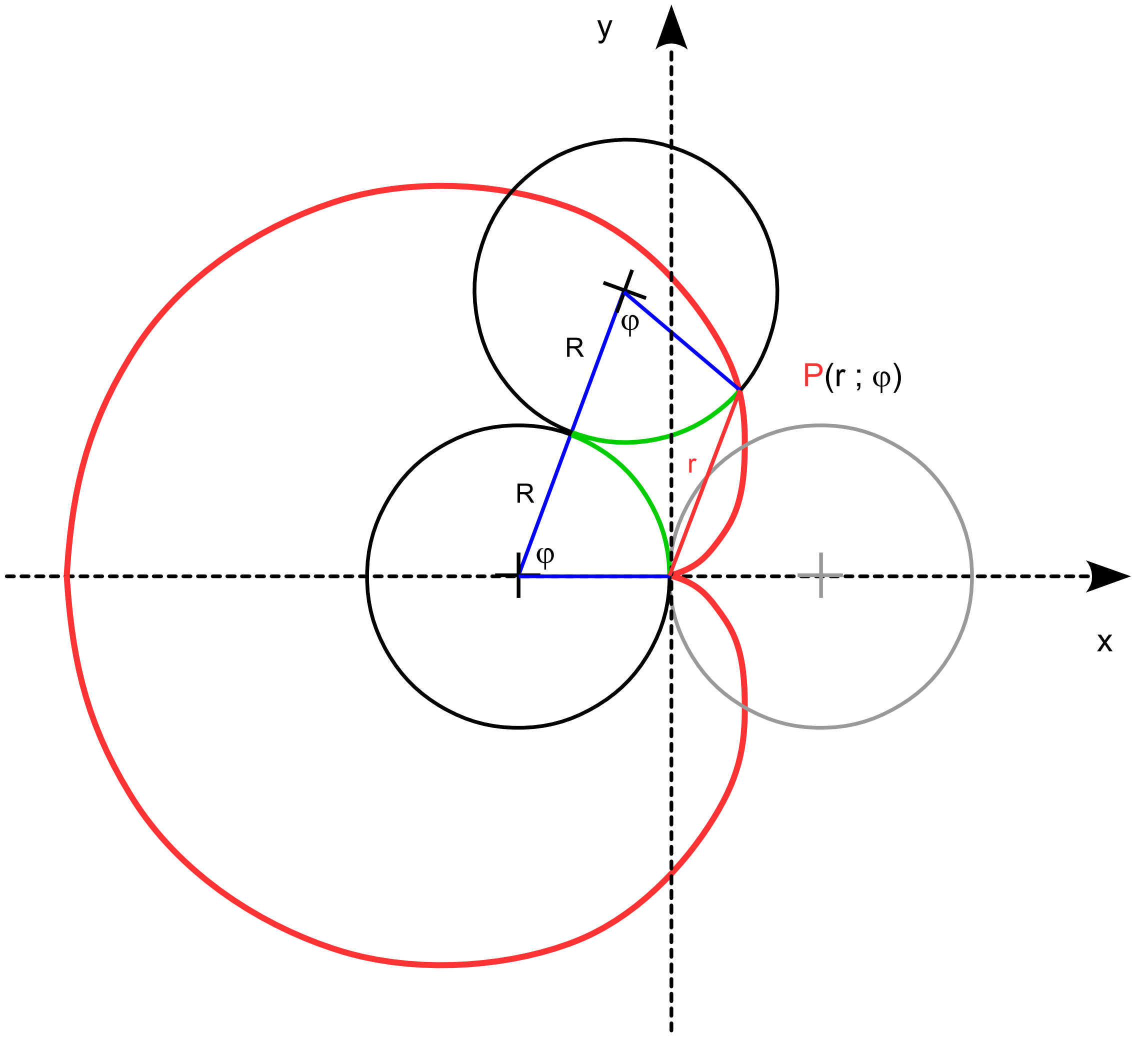
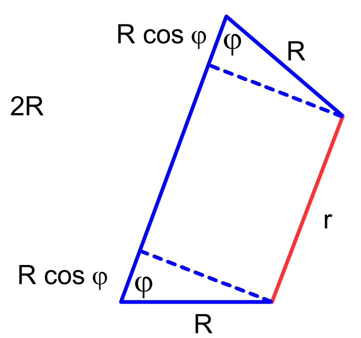
Kardioide (Herzkurve)

gr.: καρδια = Herz , ειδηζ = ähnlich

Wird auf dem Umfang eines Kreises mit Radius R ein Kreis mit gleichem Radius abgerollt, so beschreibt ein fester Punkt P des zweiten Kreises eine Kurve, die Kardioide genannt wird.





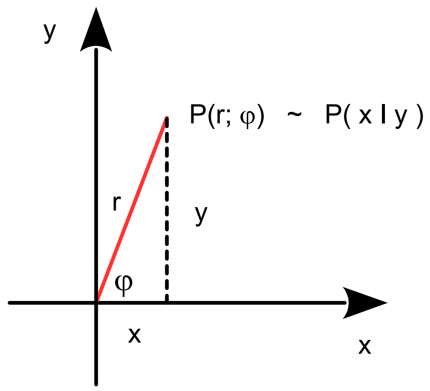
$$r = 2R - 2 \cdot R \cos\varphi$$

$$r = 2R(1 - \cos\varphi)$$

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Kardioide

$$\boxed{P(r\ ;\ \varphi) = P(\ 2R(1 - \cos\varphi)\ ;\ \varphi\ )} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0\ ,\ 2\pi] \quad .$$

Übergang zu Kartesischen Koordinaten :



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\ \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$r = 2R(1 - \cos\varphi)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2R\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 2R\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 2R\ \sqrt{x^2 + y^2} - 2Rx$$

$$x^2 + y^2 + 2Rx = 2R\ \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 + 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 4Rx(x^2 + y^2) + 4R^2x^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 4Rx(x^2 + y^2) = 4R^2y^2$$

In Kartesischen Koordinaten lauter die Gleichung der Kardioide

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 + 4Rx(x^2 + y^2) - 4R^2y^2 = 0} \quad .$$