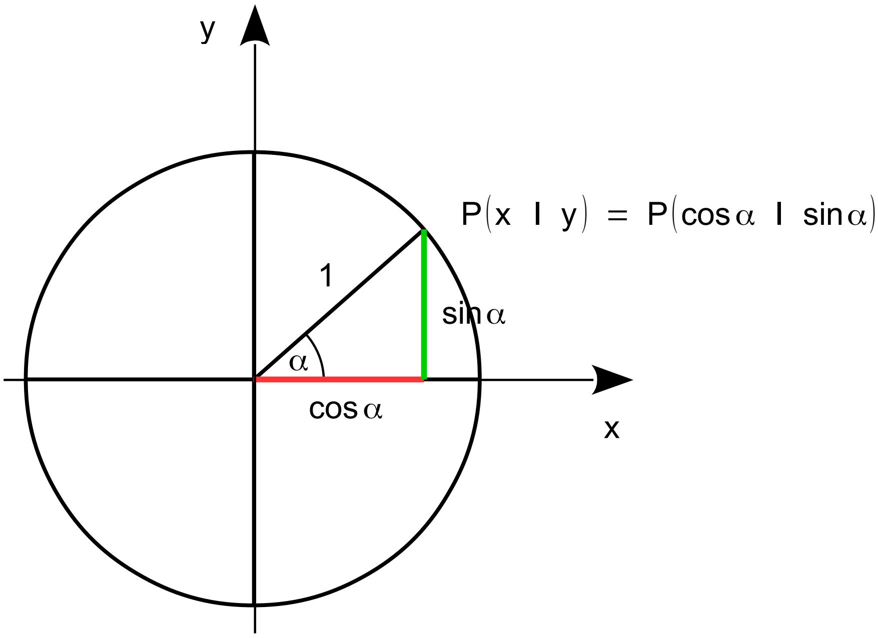
Definition der Trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus am Einheitskreis



Die Koordinaten eines Punktes $P(x \mid y)$ auf dem Einheitskreis sind Funktionen des zugehörigen Winkels α :

Sinusfunktion

$$\sin \; : \; [0° \, ; \, 360°) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto x = \sin\alpha$$

Kosinusfunktion

$$\cos \; : \; [0° \, ; \, 360°) \longrightarrow \mathbb{R}$$

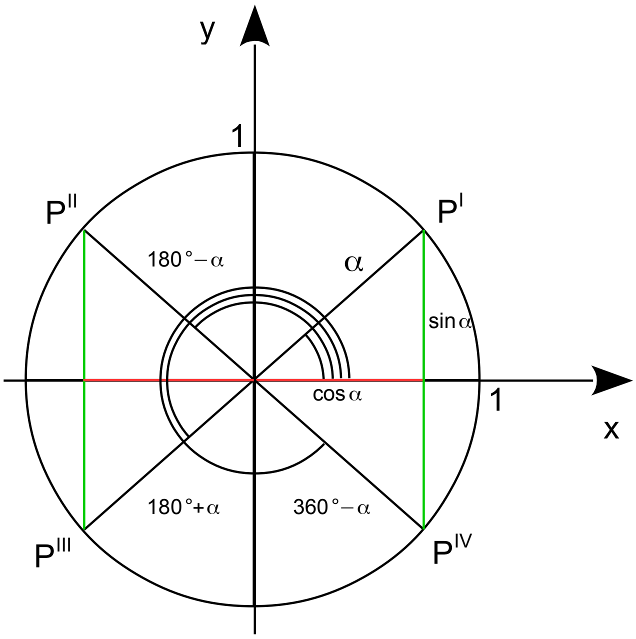
$$\alpha \longmapsto y = \cos\alpha$$

Die Funktionen können periodisch nach beiden Richtungen erweitert werden, so dass gilt :

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360°) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360°) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Die Trigonometrischen Funktionen genügen folgenden Symmetrien :



$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(90°-\alpha) = \sin(90°+\alpha)}$

$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \boxed{\sin(180°-\alpha) = \sin(180°+\alpha)}$

$\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(180°-\alpha) = \cos(180°+\alpha)}$

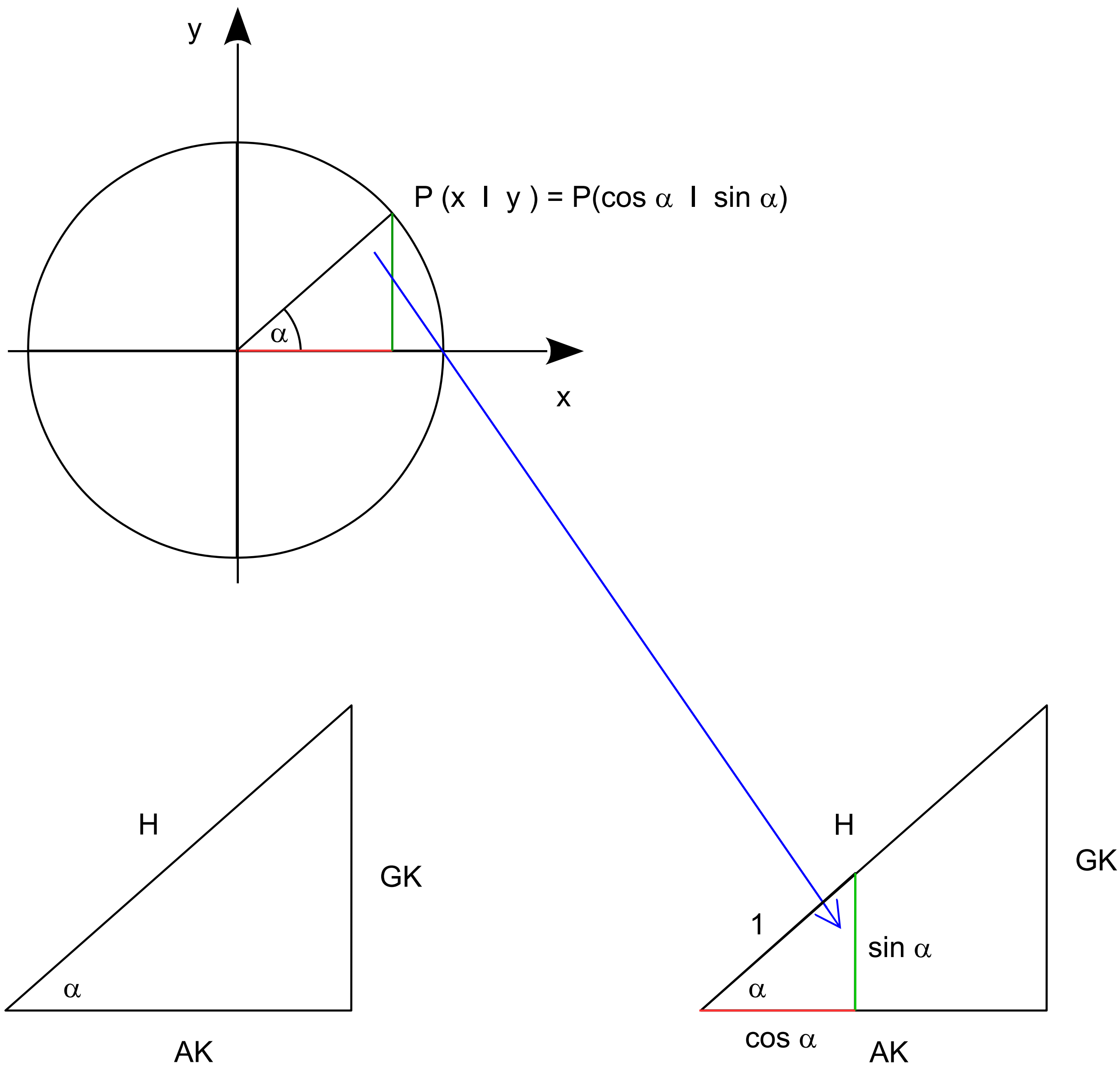
$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(360°-\alpha) = \cos\alpha$

Für $\alpha \in (0°;90°)$ gilt nach dem Satz des Pythagoras :

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Die Trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck



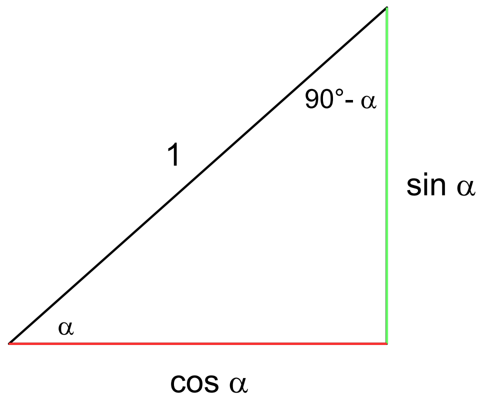
Strahlensätze :

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{GK}{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\alpha = \frac{GK}{H}} \quad \Rightarrow \quad GK = H\cdot\sin\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{AK}{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{AK}{H}} \quad \Rightarrow \quad AK = H\cdot\cos\alpha$$

Bemerkung:
Zum praktischen Rechnen am rechtwinkligen Dreieck müssten die trigonometrischen Funktionen tabelliert sein !

Beziehungen zwischen den Trigonometrische Funktionen sin und cos am rechtwinkligen Dreieck

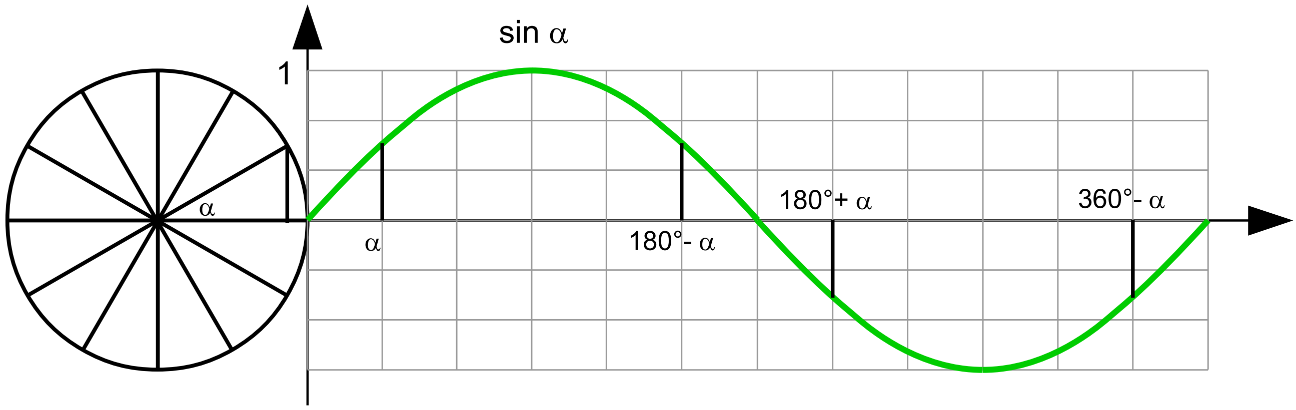


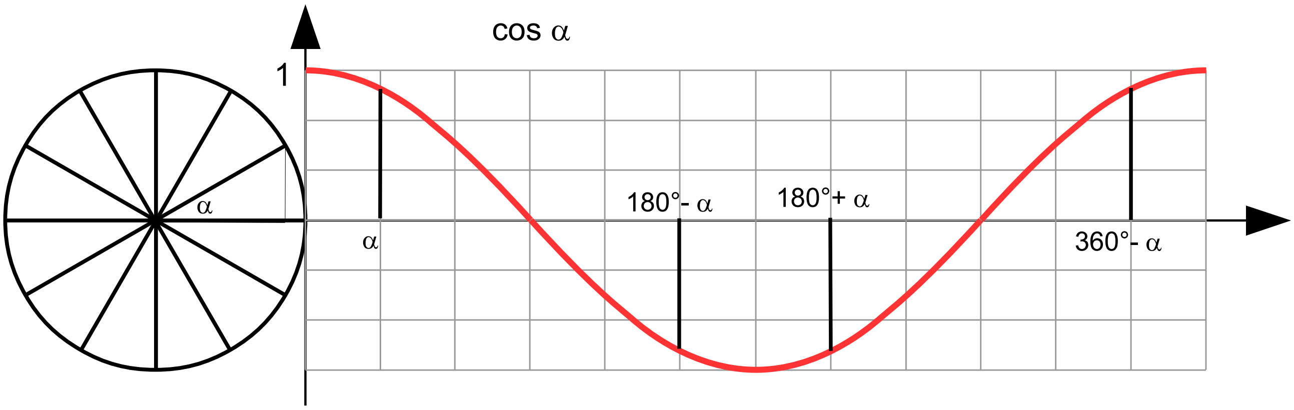
$\boxed{\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)}$ $\boxed{\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)}$

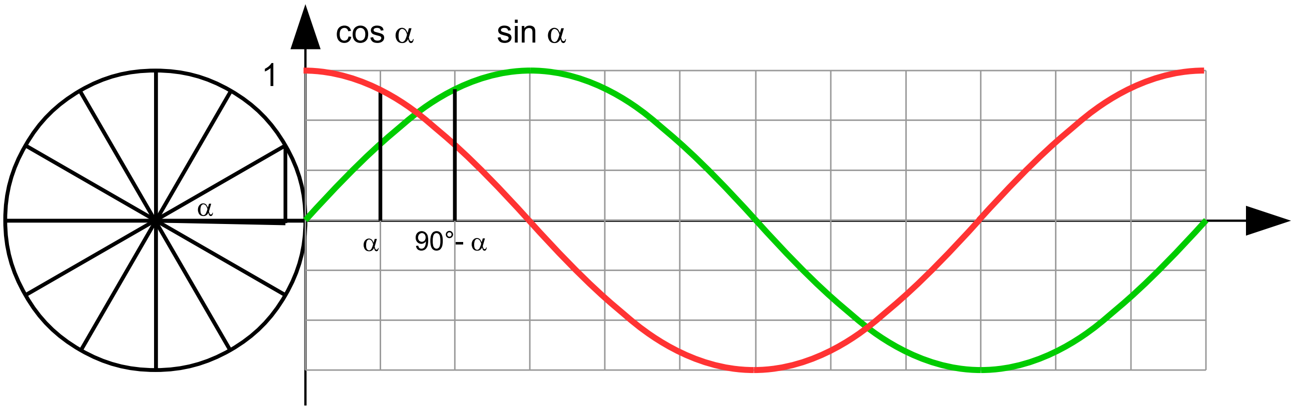
Man betrachtet außerdem noch die **Tangensfunktion** .

$$\boxed{\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{GK}{AK}}$$

Schaubilder der Trigonometrische Funktionen sin und cos





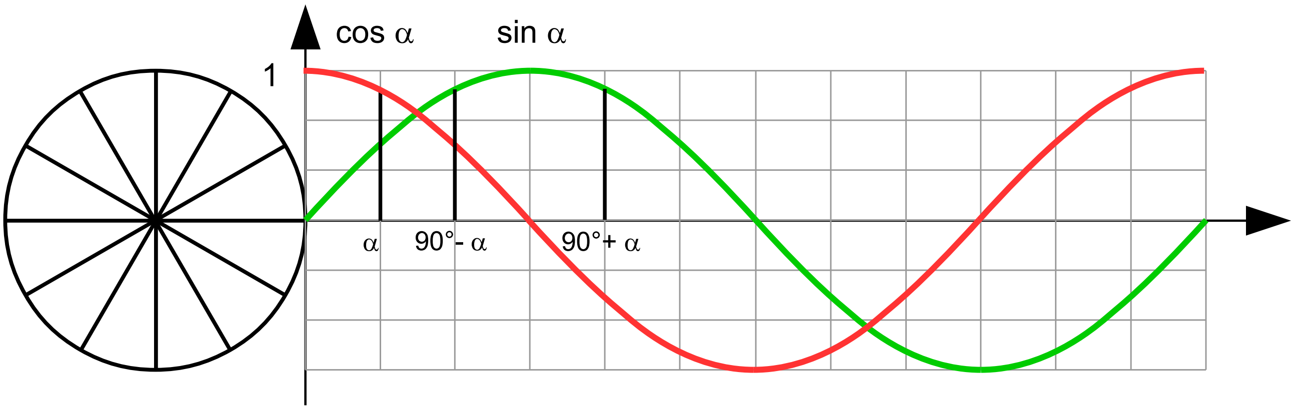


$\alpha \in [0°;90°]$:

$$\boxed{\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)}$$

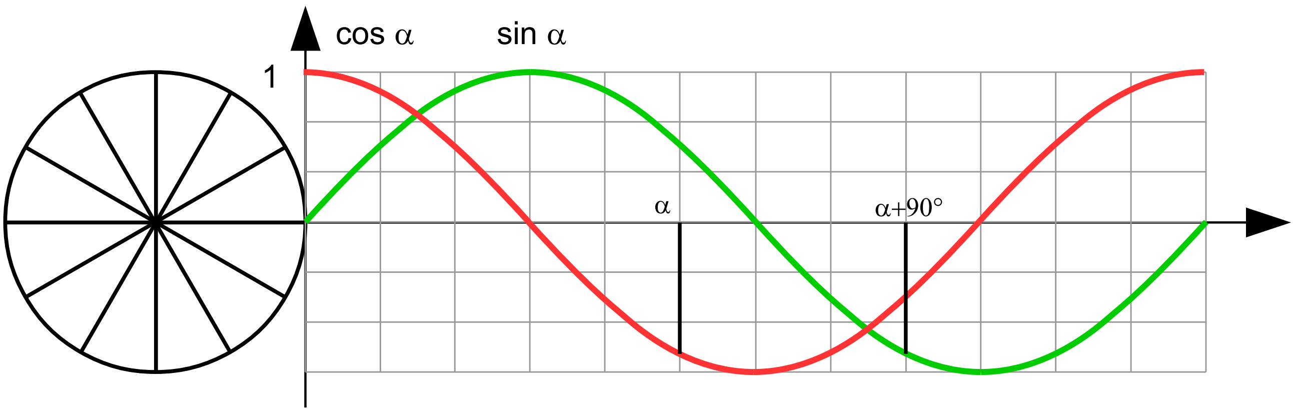
$$\boxed{\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)}$$

Beziehung zwischen den Trigonometrischen Funktionen sin und cos



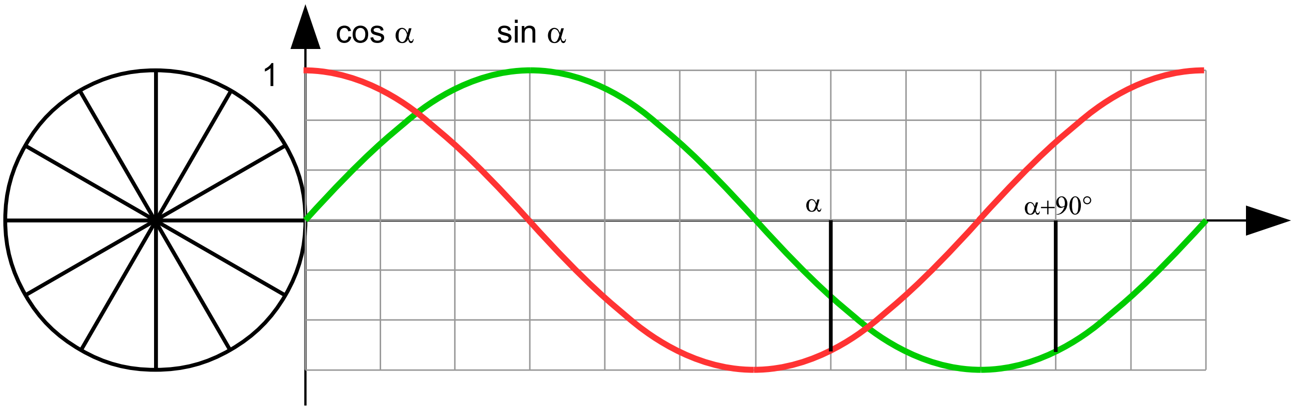
$\alpha \in [0°;90°]$:

$$\cos\alpha = \sin(90°-\alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90°+\alpha)$$
$$\boxed{\cos\alpha = \sin(\alpha+90°)}$$

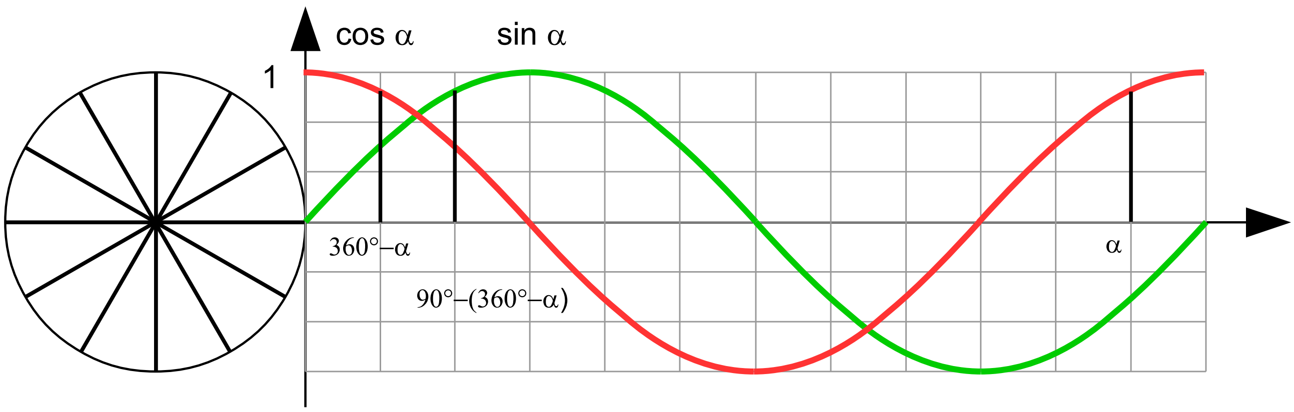


$\alpha \in [90°;180°]$:

$$\cos\alpha = -\cos(180°-\alpha)$$
$$\cos\alpha = -\sin(180°-\alpha+90°)$$
$$\cos\alpha = -\sin(180°-(\alpha-90°))$$
$$\cos\alpha = +\sin(180°+(\alpha-90°))$$
$$\boxed{\cos\alpha = \sin(\alpha+90°)}$$



$$
\begin{aligned}
\alpha \in [180°;270°] \quad : \quad \cos\alpha &= \cos(180° + (\alpha - 180°)) \\
\cos\alpha &= \cos(180° - (\alpha - 180°)) \\
\cos\alpha &= \sin(180° - (\alpha - 180° + 90°)) \\
\cos\alpha &= \sin(360° + 90° - \alpha) \\
\cos\alpha &= \sin(360° - (\alpha - 90°)) \\
\cos\alpha &= \sin(180° + (\alpha - 90°)) \\
&\boxed{\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\alpha \in [270°;360°] \quad : \quad \cos\alpha &= \cos(360° - (360° - \alpha)) \\
\cos\alpha &= \cos(360° - \alpha) \\
\cos\alpha &= \sin(90° - (360° - \alpha)) \\
\cos\alpha &= \sin(90° + \alpha - 360°) \\
\cos\alpha &= \sin(90° + \alpha - 360° + 360°) \\
&\boxed{\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt also :

$\boxed{\cos\alpha \; = \; \sin(\alpha+90°)}$ für alle α

„Die **Kosinusfunktion** ist die um **90° nach links verschobene Sinusfunktion**!“

$\boxed{\sin\alpha \; = \; \cos(\alpha-90°)}$ für alle α

„Die **Sinusfunktion** ist die um **90° nach rechts verschobene Kosinusfunktion**!“

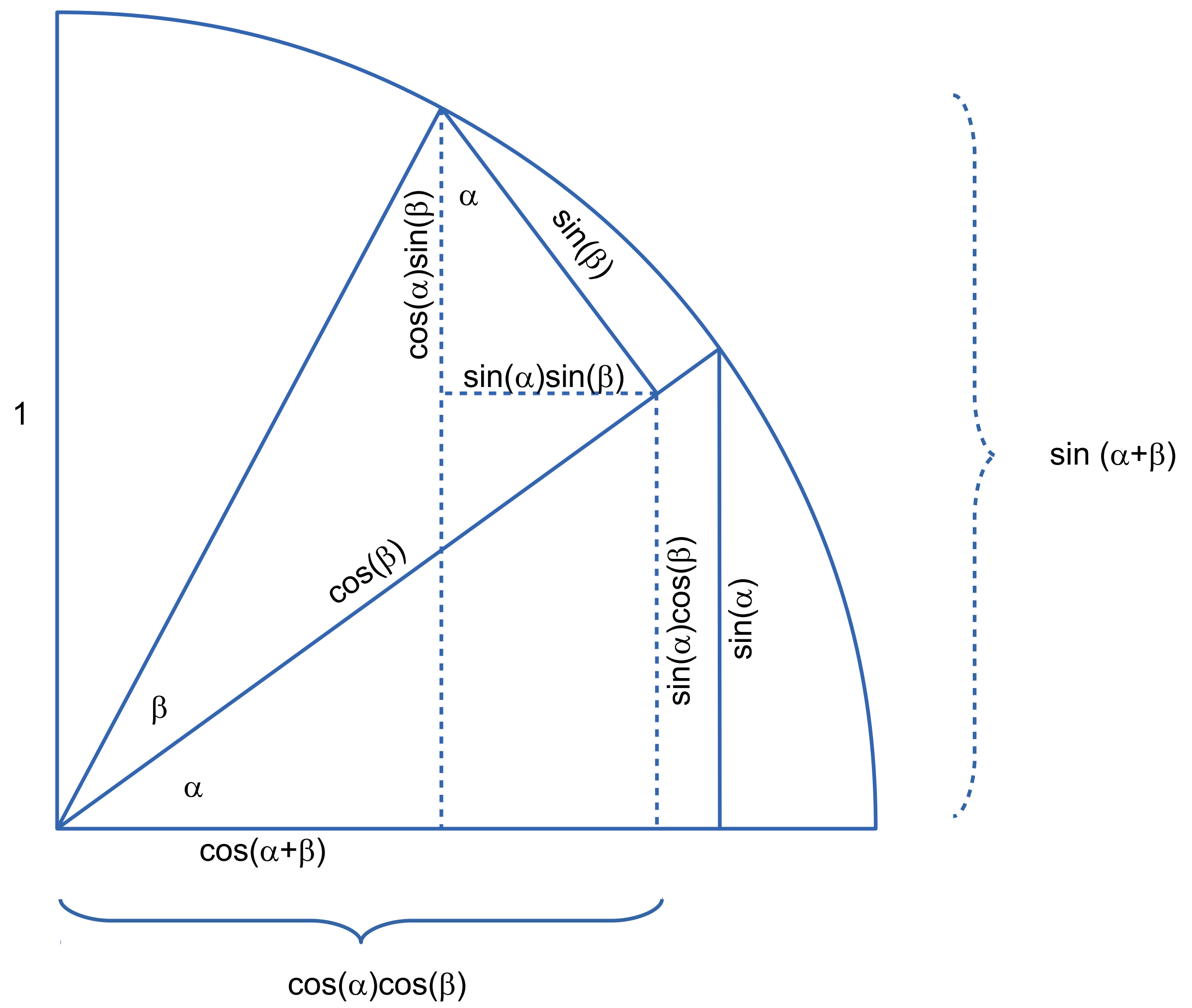
$\boxed{-\sin\alpha \; = \; \cos(\alpha+90°)}$ für alle α

„Die **negative Sinusfunktion** ist die um **90° nach links verschobene Kosinusfunktion** !“

$\boxed{-\cos\alpha \; = \; \sin(\alpha-90°)}$ für alle α

„Die **negative Kosinusfunktion** ist die um **90° nach rechts verschobene Sinusfunktion**!“

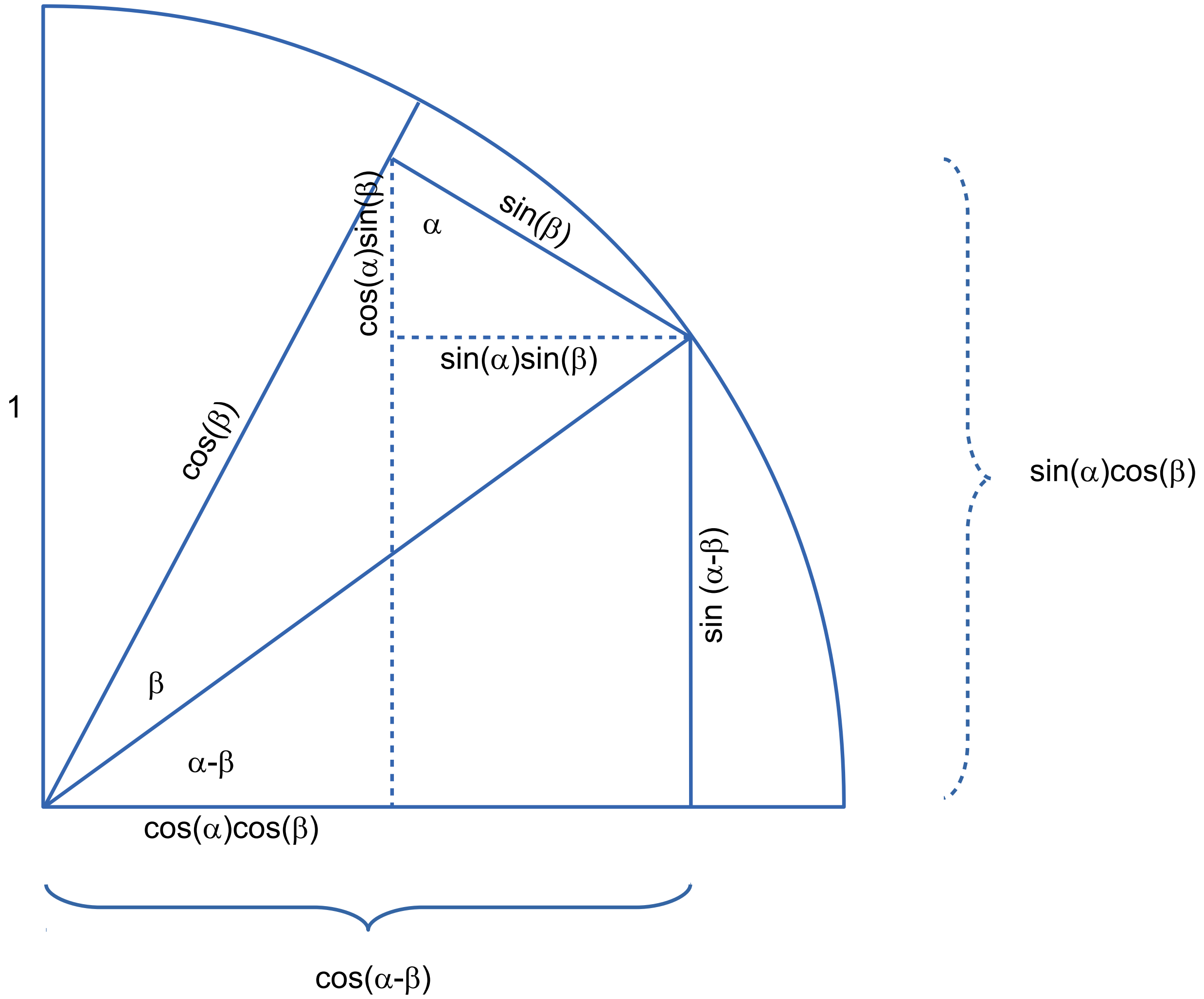
Additionstheoreme ($\alpha\ ,\ \beta \in [0°\ ,90°)\ ,\ \ \alpha+\beta \in [0°\ ,90°)$)



$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Subtraktionstheoreme $\left(\alpha , \beta \in [0° , 90°) , \alpha + \beta \in [0° , 90°) \right)$



$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Additions- und Subtraktionstheoreme für beliebige Winkel

$$\alpha = k \cdot 360° + \alpha' \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad , \quad \alpha' \in [0°\,, 360°)$$

$$\beta = l \cdot 360° + \beta' \quad , \quad l \in \mathbb{Z} \quad , \quad \beta' \in [0°\,, 360°)$$

Die Vorgehensweise sei am **Beispiel der Sinusfunktion** dargestellt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin((k+l) \cdot 360° + \alpha' + \beta')$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha' + \beta')$$

Falls man zeigen kann, dass das **Additionstheorem für die Sinusfunktion** für alle $\alpha'\,,\ \beta' \in [0°\,, 360°)$ gilt, würde folgen

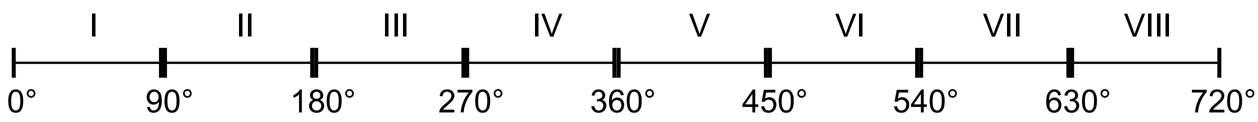
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\sin\beta'$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(k \cdot 360° + \alpha')\ \cos(l \cdot 360° + \beta') + \cos(k \cdot 360° + \alpha')\ \sin(l \cdot 360° + \beta') \quad ,$$

also

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}$$

Um zu zeigen, dass das Additionstheorem für die Sinusfunktion für alle $\alpha'\,,\ \beta' \in [0°\,, 360°)$ gilt, teilt man das Intervalle $[0°\,, 360°)$, $[360°\,, 720°)$ in „Quadraten“ auf :



Es sind folgende 20 Fallunterscheidungen zu beachten :

α'	β'	$\alpha' + \beta'$
I	I	I , II
II	II	III , IV
II	I	II , III
III	III	V , VI
III	II	IV , V
III	I	III , IV
IV	IV	VII , VIII
IV	III	VI , VII
IV	II	V , VI
IV	I	VII , V

Greift man zum Beispiel den Fall $\alpha' \in \text{III} = [180°, 270°)$ **,** $\beta' \in \text{II} = [90°, 180°)$ **heraus , so folgt :**

$$\alpha' = 180° + \alpha'' \quad , \quad \beta' = 90° + \beta'' \quad , \quad \alpha' + \beta' = 270° + \alpha'' + \beta''$$

1. Fall : $\alpha'' + \beta'' \in \text{I}$

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin(270° + (\alpha'' + \beta''))$$

$$\sin(\alpha' + \beta') = -\sin(90° - (\alpha'' + \beta''))$$

$$\sin(\alpha' + \beta') = -\cos(\alpha'' + \beta'')$$

$$\underline{\sin(\alpha' + \beta') = -[\cos\alpha'' \cos\beta'' - \sin\alpha'' \sin\beta'']}$$

Andererseits ist

$$\sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta' = \sin(180°+\alpha'') \cos(90°+\beta'') + \cos(180°+\alpha'') \sin(90°+\beta'')$$

$$\sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta' = -\sin\alpha'' \cdot -\cos(90°-\beta'') - \cos\alpha'' \sin(90°-\beta'')$$

$$\sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta' = -\sin\alpha'' \cdot -\sin\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta''$$

$$\sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta' = \sin\alpha'' \sin\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta''$$

$$\underline{\sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta' = -[\cos\alpha'' \cos\beta'' - \sin\alpha'' \sin\beta'']}$$

Also folgt :

$$\boxed{\sin(\alpha'+\beta') = \sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta'}$$

2. Fall : $\alpha'' + \beta'' \in \text{II}$

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin(270°+(\alpha''+\beta''))$$

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin(360°-90°+(\alpha''+\beta''))$$

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin(360°+(\alpha''+\beta''-90°))$$

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin(\alpha''+\beta''-90°)$$ „ um 90° nach rechts verschobene Sinusfunktion „

$$\sin(\alpha' + \beta') = -\cos(\alpha''+\beta'')$$

Falls man zeigen kann, dass das **Additionstheorem für die Kosinusfunktion** für $\alpha'' + \beta'' \in \text{II}$ gilt, würde folgen :

$$\underline{\sin(\alpha' + \beta') = -[\cos\alpha'' \cos\beta'' - \sin\alpha'' \sin\beta'']}$$

Um zu zeigen, dass das **Additionstheorem für die Kosinusfunktion** für $\alpha'' + \beta'' \in \text{II}$ gilt, geht man wie folgt vor:

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = \cos(180°-(180°-(\alpha''+\beta'')))$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = -\cos(180°-(\alpha''+\beta''))$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = -\cos(90°-\alpha''+90°-\beta'')$$

$$\cos\left(\alpha'' + \beta''\right) = -\left[\ \cos\left(90° - \alpha''\right)\ \cos\left(90° - \beta''\right) - \sin\left(90° - \alpha''\right)\ \sin\left(90° - \beta''\right)\ \right]$$

$$\cos\left(\alpha'' + \beta''\right) = -\left[\ \sin\alpha''\ \sin\beta'' - \cos\alpha''\ \cos\beta''\ \right]$$

$$\boxed{\cos\left(\alpha'' + \beta''\right) = \cos\alpha''\ \cos\beta'' - \sin\alpha''\ \sin\beta''}$$

Andererseits gilt :

$$\sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta' = \sin\left(180° + \alpha''\right)\ \cos\left(90° + \beta''\right) + \cos\left(180° + \alpha''\right)\ \sin\left(90° + \beta''\right)$$

$$\sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta' = -\sin\alpha'' \cdot -\cos\left(90° - \beta''\right) - \cos\alpha''\ \sin\left(90° - \beta''\right)$$

$$\sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta' = \sin\alpha''\ \cos\left(90° - \beta''\right) - \cos\alpha''\ \sin\left(90° - \beta''\right)$$

$$\sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta' = \sin\alpha''\ \sin\beta'' - \cos\alpha''\ \cos\beta''$$

$$\sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta' = -\left[\ \cos\alpha''\ \cos\beta'' - \sin\alpha''\ \sin\beta''\right]$$

Also folgt :

$$\boxed{\sin\left(\alpha' + \beta'\right) \sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta'}$$

Insgesamt ist also gezeigt, dass das Additionstheorem der Sinusfunktion auch für $\alpha' \in \mathrm{III} = [180°, 270°)$, $\beta' \in \mathrm{II} = [90°, 180°)$ **gilt** :

$$\boxed{\sin\left(\alpha' + \beta'\right) \sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta'}$$

q.e.d.

Bemerkung :

Es scheint sinnvoll, zunächst einmal die Additionstheoreme für α'' , $\beta'' \in \mathrm{I}$ mit $\alpha'' + \beta'' \in \mathrm{II}$ nachzuweisen :

$$\sin\left(\alpha'' + \beta''\right) = \sin\alpha''\ \cos\beta'' + \cos\alpha''\ \sin\beta''$$

$$\cos\left(\alpha'' + \beta''\right) = \cos\alpha''\ \cos\beta'' - \sin\alpha''\ \sin\beta''$$

Nachweis der Additionstheoreme für $\alpha'' \,,\ \beta'' \in \mathrm{I} \quad , \quad \alpha'' + \beta'' \in \mathrm{II} \ :$

$$\sin(\alpha'' + \beta'') = \sin\Big(180° - \big(180° - (\alpha''+\beta'')\big)\Big)$$

$$\sin(\alpha'' + \beta'') = \sin\big(180° - (\alpha''+\beta'')\big)$$

$$\sin(\alpha'' + \beta'') = \sin(90° - \alpha'' + 90° - \beta'')$$

$$\sin(\alpha'' + \beta'') = \sin(90° - \alpha'')\ \cos(90° - \beta'') + \cos(90° - \alpha'')\ \sin(90° - \beta'')$$

$$\sin(\alpha'' + \beta'') = \cos\alpha''\ \sin\beta'' + \sin\alpha''\ \cos\beta''$$

$$\boxed{\sin(\alpha'' + \beta'') = \sin\alpha''\ \cos\beta'' + \cos\alpha''\ \sin\beta''}$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = \cos\Big(180° - \big(180° - (\alpha''+\beta'')\big)\Big)$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = -\cos\big(180° - (\alpha''+\beta'')\big)$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = -\cos(90° - \alpha'' + 90° - \beta'')$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = -\big[\ \cos(90° - \alpha'')\ \cos(90° - \beta'') - \sin(90° - \alpha'')\ \sin(90° - \beta'')\ \big]$$

$$\cos(\alpha'' + \beta'') = -\big[\ \sin\alpha''\ \sin\beta'' - \cos\alpha''\ \cos\beta''\ \big]$$

$$\boxed{\cos(\alpha'' + \beta'') = \cos\alpha''\ \cos\beta'' - \sin\alpha''\ \sin\beta''}$$

q.e.d.