

Der Satz von Bolzano und Weierstraß und das Cauchy-Kriterium für Folgen in $\mathbb{R}$

Arno Fehringer , Juni 2016

Intervallschachtelungsaxiom

[IA] Jede Intervallschachtelung $[A_n, B_n]_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat genau ein Zentrum z .

Satz von Bolzano und Weierstraß

- (1) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt H^* und H_* .
- (2) Der Punkt H ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine gegen H konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt.

Beweis (1):

Man zeigt zunächst die Existenz des **größten Häufungspunktes** H^* :

Es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_1 \leq a_n \leq B_1$. Setze $I_1 := [A_1, B_1]$.

Sei M die Mitte von $[A_1, B_1]$. Es gibt nur 3 mögliche Konstellationen:

- I Sowohl $[A_1, M]$ und $[M, B_1]$ enthalten unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- II Nur $[M, B_1]$ enthält unendlich viele Folgenglieder.
- III Nur $[A_1, M]$ enthält unendlich viele Folgenglieder.

In den Fällen I, II setze: $I_2 = [A_2, B_2] := [M, B_1]$.

Ansonsten setze: $I_2 = [A_2, B_2] := [A_1, M]$.

Fährt man in dieser Weise fort, erhält man eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nach dem **Intervallschachtelungsaxiom** das Zentrum H^* hat.

Nach Konstruktion der Intervallschachtelung liegen also oberhalb jedes Intervalls I_n höchstens endlich viele Folgenglieder!

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I_{n_0} \in U_\epsilon(H^*)$. Dann enthält I_{n_0} und damit $U_\epsilon(H^*)$ unendlich viele a_n . Also ist H^* ein Häufungspunkt.

Jetzt zeigt man noch, dass H^* der größte Häufungspunkt ist :

Sei H mit $H^* < H$ ein noch größerer Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Setze : $\epsilon_0 := \frac{H - H^*}{2}$.

Dann sind die Umgebungen $U_{\epsilon_0}(H^*)$, $U_{\epsilon_0}(H)$ disjunkt mit $U_{\epsilon_0}(H^*) < U_{\epsilon_0}(H)$.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n - A_n = 0$ gibt es ein n_0 mit $I_{n_0} \subset U_{\epsilon_0}(H^*)$ und $I_{n_0} < U_{\epsilon_0}(H^*) < U_{\epsilon_0}(H)$.

Da nun oberhalb des Intervalls I_{n_0} höchstens endlich viele Folgenglieder liegen, kann H kein Häufungspunkt sein .

Also ist H^* der **größte Häufungspunkt** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Mit einer entsprechenden Konstruktion einer Intervallschachtelung zeigt man, die Existenz des **kleinsten Häufungspunktes** H_* .

Beweis (2) :

Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, welche gegen H konvergiere .

Sei $\epsilon > 0$ gegeben . Dann gibt es ein n_{k_0} , so dass für alle $n_k > n_{k_0}$ gilt :

$$|a_{n_k} - H| < \epsilon .$$

Da also fast alle Teilfolgenglieder a_{n_k} in $U_\epsilon(H)$ liegen, ist H ein Häufungspunkt der Folgen $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei nun umgekehrt H ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann heißt dies, dass jede Umgebung $U_\epsilon(H)$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält .

Man wähle nun zu $U_1(H)$ ein $a_{n_1} \in (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_1} \in U_1(H)$ und dann ein $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(H)$ mit $n_2 > n_1$, ... usw. .

Für die so konstruierte Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gilt dann $|a_{n_k} - H| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also konvergiert die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen H .

q.e.d.

Satz

Jede beschränkte monotone Folge $a_n \in \mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis:

Sei die Folge a_n monoton wachsend. Nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** gibt es eine Teilfolge a_{n_k} mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = z$.

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_{k_0} , so dass gilt:

$$|a_{n_k} - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n_k > n_{k_0}.$$

Wegen der Monotonie gilt dann :

$$|a_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_{k_0}.$$

q.e.d.

Cauchy-Kriterium für Folgen in $\mathbb{R}$

Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gilt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Beweis :

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben . Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für alle $n, m > n_0$ gilt dann :

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Umgekehrt gelte : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m > n_0$ gilt $|a_n - a_m| < 1$.

Speziell gilt dann für n_0+1 und für alle $m > n_0$: $|a_{n_0+1} - a_m| < 1$.

Anders gesagt liegen alle a_m mit $m > n_0$ in der Umgebung $U_1(a_{n_0+1})$.

Also ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt :

$$\min\{a_0, \dots, a_{n_0}, a_{n_0+1}-1\} \leq (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq \max\{a_0, \dots, a_{n_0}, a_{n_0+1}+1\}$$

Nach dem **Satz von Bolzano und Weierstraß** gibt es eine konvergente Teilfolge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \text{ .}$$

Man zeigt nun, dass auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt :

Sei also $\epsilon > 0$ gegeben . Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n, m > N \text{ .}$$

Es existiert außerdem ein $n_K > N$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n_k > n_K > N \text{ .}$$

Dann folgt für alle $n > N$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

q.e.d.