

Axiome und Definitionen der Geometrie (nicht vollständig)

[A1] Zu zwei Punkten P , Q gibt es genau eine Gerade g durch P und Q .
Schreibweise: $g = PQ$

[A2] Zwei Geraden g , h haben höchstens einen Schnittpunkt.

Haben zwei Geraden g , h keinen Schnittpunkt, so sind sie parallel.
Schreibweise: $g \parallel h$

[PA] Parallelenaxiom:
Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine zu g parallele Gerade g' durch P .

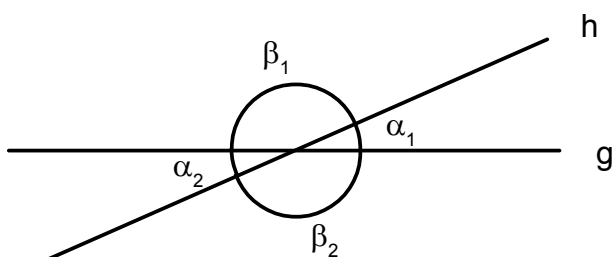
[OA] Orthogonalitätsaxiom:
Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine zu g senkrechte Gerade h durch P . Die Gerade h heißt Lotgerade oder Orthogonale. Der Winkel $\angle g, h$ ist 90° .
Schreibweise: $h \perp g$

Winkel an einer Geraden g haben 180° .

[DA] Dreiecksaxiom:
Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

[KA] Kongruenzaxiom:
Zwei Dreiecke Δ_1 , Δ_2 , die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, heißen kongruent. Schreibweise: $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.
Kongruente Dreiecke stimmen in allen Seiten und Winkeln überein.

Winkelsätze an zwei sich schneidenden Geraden:



Nebenwinkel sind zusammen 180° : $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$

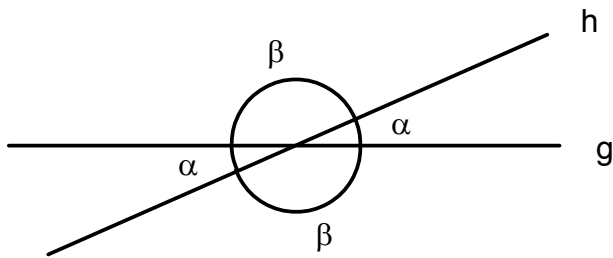
$$\beta_1 + \alpha_2 = 180^\circ$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$$

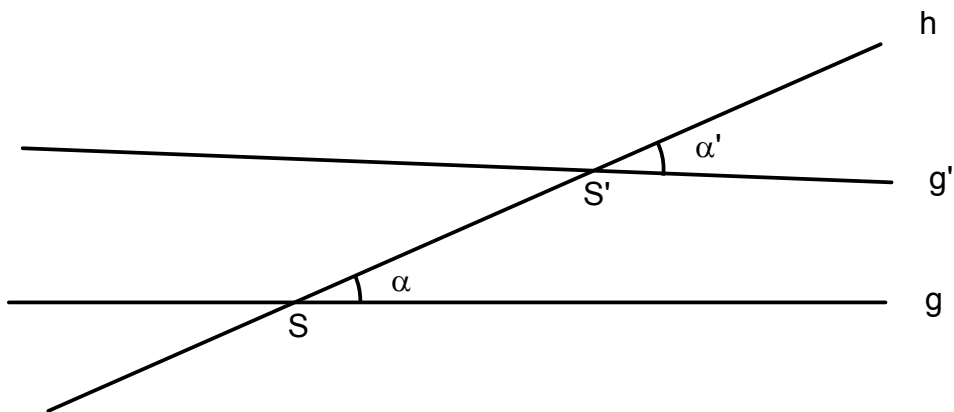
$$\beta_2 + \alpha_1 = 180^\circ$$

Gegenwinkel sind gleich: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$

Vereinfachte Darstellung



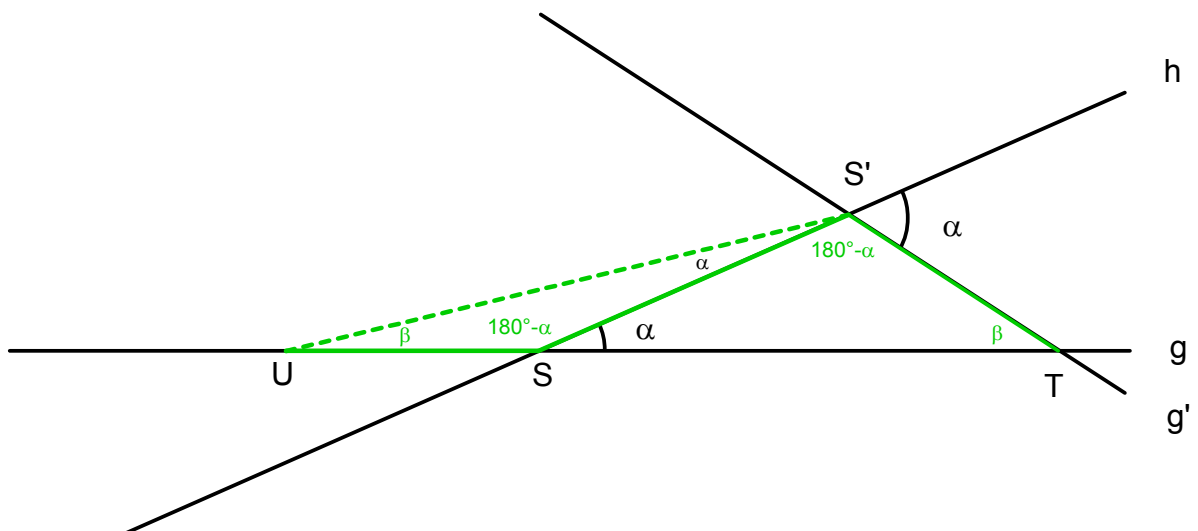
Winkel an zwei Geraden g , g' , die von einer dritten Geraden h geschnitten werden :



Satz : $g \parallel g' \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$.

Beweis :

Sei $\alpha = \alpha'$. Angenommen, g , g' wären nicht parallel, dann würden sie sich im Punkt T schneiden .



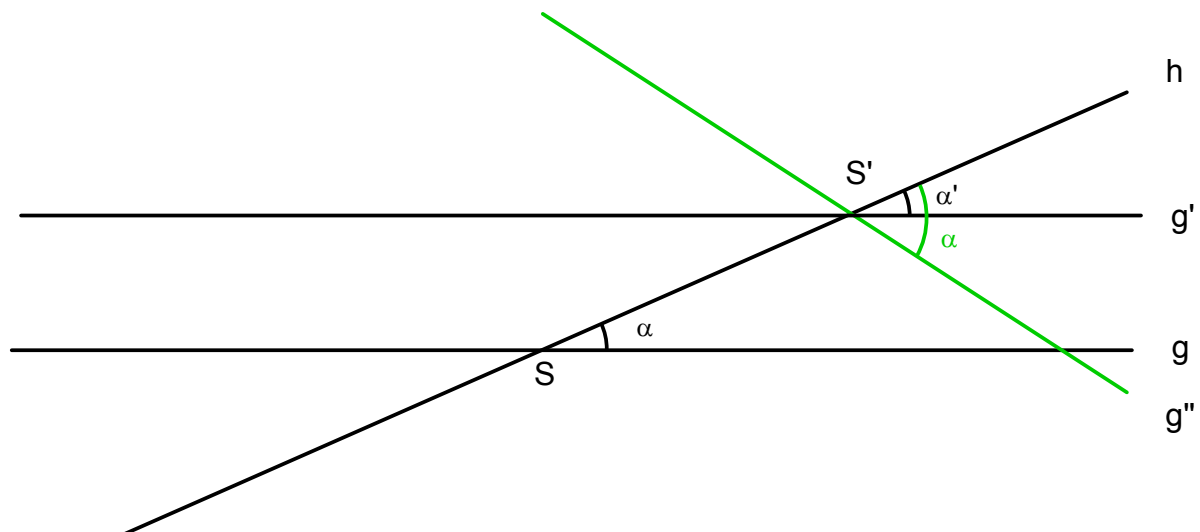
Bilde das Dreieck $\triangle S'SU \equiv \triangle SS'T$

Dann ist die Linie durch $US'T$ eine Gerade, weil der Winkel $\angle S' = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$ ist.

Die Geraden $US'T$ und g hätten dann zwei Schnittpunkte U , T , im Widerspruch zu Axiom **[A2]**.

Also gilt $g \parallel g'$.

Sei nun umgekehrt $g \parallel g'$.

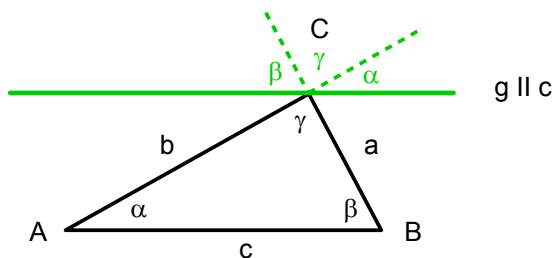


Falls $\alpha \neq \alpha'$ ist, zeichne g'' durch S' mit $\angle S' = \alpha$. Dann ist nach dem Vorigen $g \parallel g''$, das heißt, es gibt durch den Punkt S' zwei zu g parallele Geraden g' , g'' , im Widerspruch zu Axiom **[PA]**.

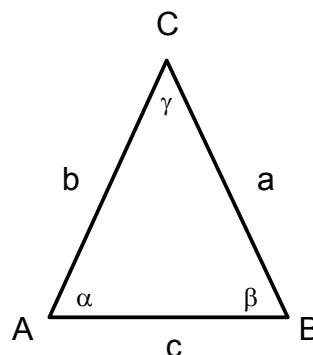
Winkelsummensatz im Dreieck :

Die Summe der Winkel im Dreieck sind zusammen 180° .

Beweis :



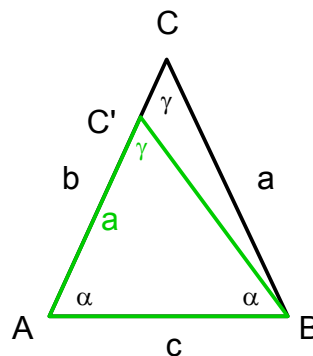
Satz über gleichschenklige Dreiecke : $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$.



Beweis :

Sei $a = b$. Dann folgt nach dem Kongruenzaxiom **[KA]** : $\triangle ACB \equiv \triangle BCA$, also $\alpha = \beta$.

Sei nun umgekehrt $\alpha = \beta$. Angenommen $a \neq b$, etwa $a < b$.

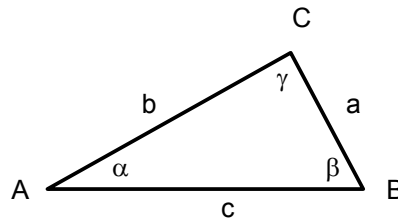


Bilde das Dreieck $\triangle ABC'$ mit $\triangle BAC' \equiv \triangle ABC$ nach **[KA]** .

Dann wären die Geraden CB , $C'B$ parallel und hätten den Schnittpunkt B , was einen Widerspruch darstellt .

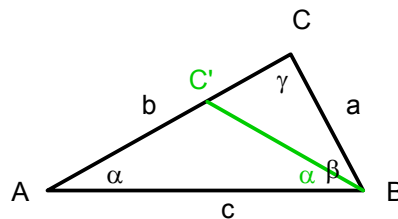
Also gilt $a = b$.

Satz über Seiten und Winkel : $\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b$.



Beweis :

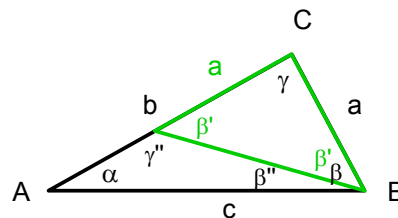
Sei $\alpha < \beta$.



Dann folgt nach dem Dreiecksaxiom **[DA]** und dem **Satz über gleichschenklige Dreiecke** :

$$a = |BC| < |BC'| + |C'C| = |AC'| + |C'C| = |AC| = b \text{ .}$$

Sei nun umgekehrt $a < b$.



Dann folgt nach den **Winkelsätzen** und dem **Satz über gleichschenklige Dreiecke** :

$$\alpha < \alpha + \beta'' = 180^\circ - \gamma'' = \beta' < \beta$$

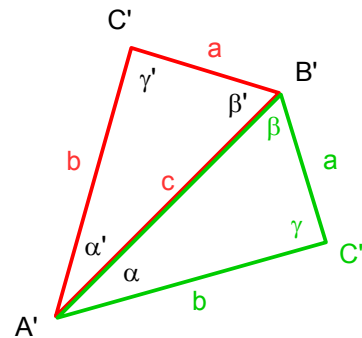
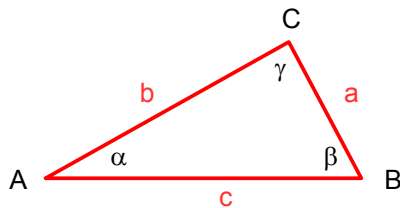
Kongruenzsätze

Kongruenzsatz [sss] :

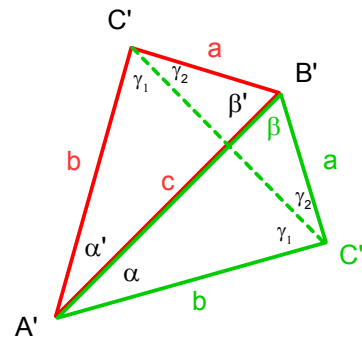
Zwei Dreiecke Δ_1 , Δ_2 sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen .

Schreibweise : $\Delta_1 \equiv_{[sss]} \Delta_2$

Beweis :



Konstruiere nach dem Kongruenzaxiom **[KA]** das Dreieck $\Delta A'B'C''$ mit $\angle A' = \alpha$. Dann sind $\angle B' = \beta$, $\angle C'' = \gamma$.



Betrachte die gleichschenkligen Dreiecke $\Delta C'C''A'$, $\Delta C'C''B'$. Es folgt dann :

$$\angle C' = \gamma' = \gamma_1 + \gamma_2 \quad , \quad \angle C'' = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \quad , \quad \text{also} \quad \gamma' = \gamma \quad .$$

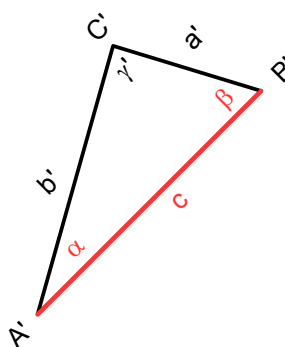
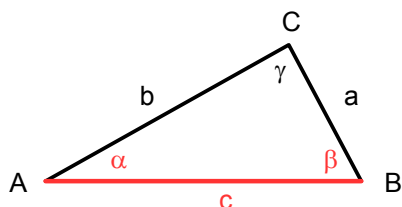
Nach dem Kongruenzaxiom **[KA]** ist dann $\Delta A'B'C' \equiv \Delta A'B'C''$, und es gilt :

$$\alpha' = \alpha \quad , \quad \beta' = \beta \quad .$$

Kongruenzsatz [wsw] :

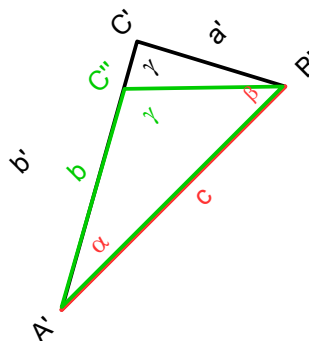
Zwei Dreiecke Δ_1 , Δ_2 sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen .

Schreibweise : $\Delta_1 \overset{\equiv}{[wsw]} \Delta_2$

Beweis :

Nach dem Winkelsummensatz sind die Winkel bei C und C' gleich : $\gamma = \gamma'$

Angenommen $b \neq b'$, etwa $b < b'$.



Konstruiere nach dem Kongruenzaxiom **[KA]** das Dreieck $\Delta A'B'C'' \equiv \Delta ABC$.

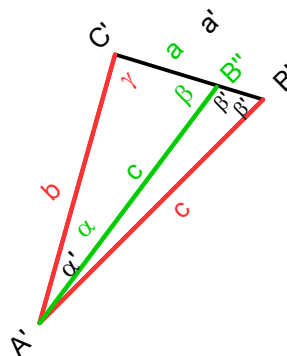
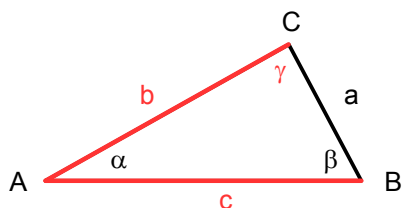
Dann wären die Geraden $C'B'$, $C''B'$ parallel und hätten den Schnittpunkt B' , was einen Widerspruch darstellt .

Also ist $b = b'$ und nach **[KA]** ist auch $a = a'$.

Kongruenzsatz [Ssw] :

Zwei Dreiecke Δ_1 , Δ_2 sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel der der größeren Seite gegenüber liegt, übereinstimmen.

Schreibweise : $\Delta_1 \stackrel{\equiv}{[Ssw]} \Delta_2$

Beweis :

Man zeigt, dass $\alpha = \alpha'$, woraus $\Delta ABC \stackrel{\equiv}{[KA]} \Delta A'B'C'$ folgt.

Angenommen $\alpha \neq \alpha'$, etwa $\alpha < \alpha'$.

Dann ist $\Delta ABC \stackrel{\equiv}{[wsw]} \Delta A'B''C'$.

Wegen $c > b$ folgt $\gamma > \beta'$.

Wegen der Gleichschenkligkeit von $\Delta A'B'B''$ folgt :

$$\beta' = 180^\circ - \beta = \alpha + \gamma > \gamma. \text{ Widerspruch !}$$

Also ist $\alpha = \alpha'$ und $\Delta ABC \stackrel{\equiv}{[KA]} \Delta A'B'C'$.