

Konvexe und konkave Funktionen

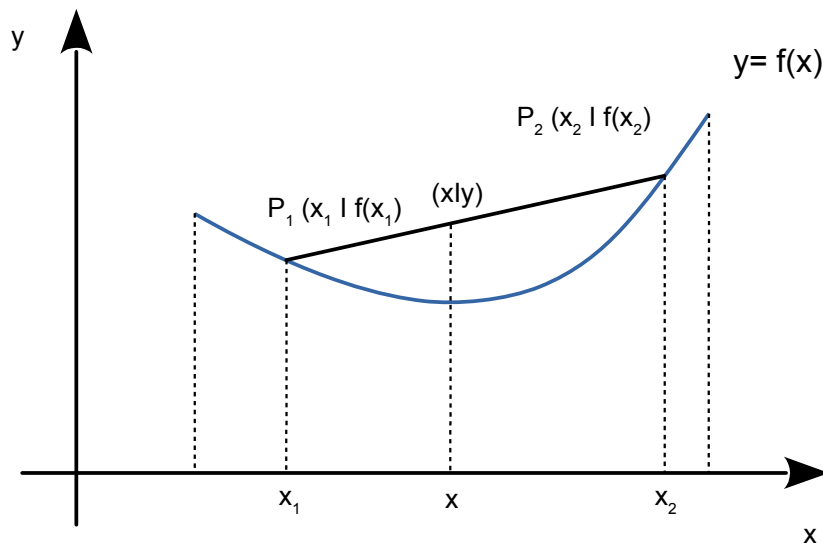
Arno Fehring , Juni 2016

Quellen :

Königsberger, Konrad : Analysis I , Springer Verlag , 2000, 5. Aufl.

Konvexität

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für je zwei Punkte $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ mit $x_1 < x_2 \in I$ der Graph der Funktion unterhalb der Sehne $\overline{P_1 P_2}$ verläuft.



Punkt-Steigungsform bezüglich des Punktes P_1 der Sehne $\overline{P_1 P_2}$:

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y = \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{f(x_1)x_2 - f(x_1)x_1 + f(x_2)x - f(x_2)x_1 - f(x_1)x + f(x_1)x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{f(x_1)x_2 + f(x_2)x - f(x_2)x_1 - f(x_1)x}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Da man jedes $x \in [x_1, x_2]$ darstellen kann als

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

$$x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

folgt für die Darstellung der Sehne $\overline{P_1 P_2}$ auch :

$$y = \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$y = (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

mit $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \lambda \in [0, 1]$

Punkt-Steigungsform bezüglich des Punktes P_2 der Sehne $\overline{P_1 P_2}$:

$$\frac{y - f(x_2)}{x - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y - f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2)$$

$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2)$

$$y = \frac{f(x_2)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_2)}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{f(x_2)x_2 - f(x_2)x_1 + f(x_2)x - f(x_2)x_2 - f(x_1)x + f(x_1)x_2}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{-f(x_2)x_1 + f(x_2)x - f(x_1)x + f(x_1)x_2}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$y = \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_2)$

Da diese Gleichung mit der obigen, aus der Punkt-Steigungsform bezüglich des Punktes P_1 gewonnenen, Gleichung übereinstimmt, folgt wegen

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

$$x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

für die Darstellung der Sehne $\overline{P_1 P_2}$ ebenfalls

$y = (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

 $\text{mit} \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \lambda \in [0, 1].$

Definition der Konvexität und Konkavität

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für je zwei Punkte $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ mit $x_1 < x_2 \in I$ der Graph der Funktion unterhalb der Sehne $\overline{P_1 P_2}$ verläuft, das heißt, dass irgend eine der folgenden (äquivalenten) Aussagen gilt:

I Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

II Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2)$$

III Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

IV Für alle $x_1 < x_2 \in I$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

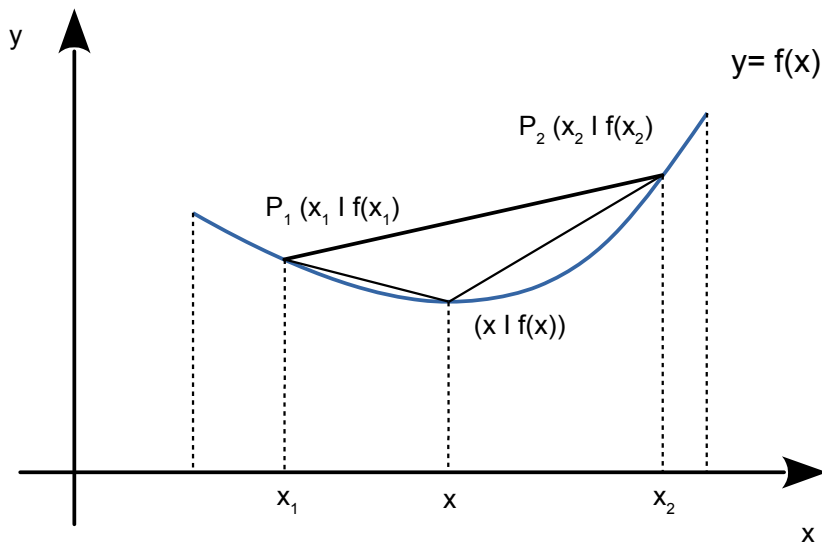
$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konkav**, falls entsprechende Aussagen **I'** - **IV'** mit der Relation $\geq$ gelten.

Konvexität und Konkavität mittels Differenzenquotienten

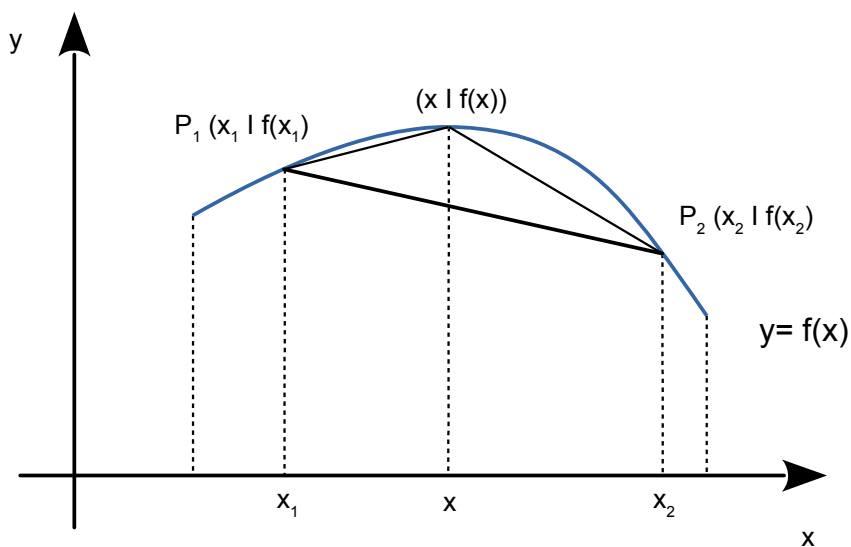
Die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **konvex**, genau dann, wenn gilt :

V
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2 .$$



Die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **konkav**, genau dann, wenn gilt :

V'
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2 .$$



Beweis :

Nach I gilt im Fall der **Konvexität** :

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2 .$$

Durch Äquivalenzumformung folgt

$$f(x) - f(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{(x - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Also ist die linke Ungleichung erfüllt .

Nach II gilt im Fall der **Konvexität** :

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2) \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2 .$$

Durch Äquivalenzumformung folgt

$$f(x) - f(x_2) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{(x - x_2)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{(x_2 - x)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

Also ist die rechte Ungleichung erfüllt .

Der Beweis der Aussage für den Fall der **Konkavität** geht entsprechend .

Satz

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvex** . Dann ist die Funktion $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für alle x_0 **monoton steigend** .

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **konkav** . Dann ist die Funktion $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für alle x_0 **monoton fallend** .

Beweis :

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvex** .

Betrachte die linke Ungleichung von **V** ,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2 ,$$

und setze $x_0 := x_1$, dann folgt für $x_0 < x < x_2$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

Die Funktion ist also rechts von x_0 monoton steigend .

Betrachte die rechte Ungleichung von **V** ,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2 ,$$

und setze $x_0 := x_2$, dann folgt für $x_1 < x < x_0$:

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Die Funktion ist also auch links von x_0 monoton steigend .

Der Beweis für den **konkaven Fall** geht analog .

Konvexitäts- und Konkavitätskriterien für differenzierbare Funktionen

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **konvex**, wenn die Ableitungsfunktion f' **monoton steigt**.

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **konkav**, wenn die Ableitungsfunktion f' **monoton fällt**.

Beweis :

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvex**. Dann gilt :

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2, \text{ bzw.}$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \quad \text{für alle } x_1 < x < x_2.$$

Für die Grenzwerte gilt :

$$\lim_{x \rightarrow x_1, x > x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2, x < x_2} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_2} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2),$$

also insgesamt

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$$

Die Ableitungsfunktion f' ist **monoton steigend**.

Sei nun umgekehrt die Ableitungsfunktion f' **monoton steigend**, und sei $x_1 < x < x_2$.

Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Wegen $\xi_1 < \xi_2$ und der Monotonie von f' folgt $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Weiter folgt:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$f(x) - f(x_1) (x_2 - x) \leq (f(x_2) - f(x)) (x - x_1)$$

$$f(x) (x_2 - x) - f(x_1) (x_2 - x) \leq f(x_2) (x - x_1) - f(x) (x - x_1)$$

$$f(x) ((x_2 - x) + (x - x_1)) \leq f(x_2) (x - x_1) + f(x_1) (x_2 - x)$$

$$f(x) (x_2 - x_1) \leq f(x_2) (x - x_1) + f(x_1) (x_2 - x)$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) (x - x_1) + f(x_1) (x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)x - f(x_2)x_1 + f(x_1)x_2 - f(x_1)x}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)x - f(x_2)x_1 + f(x_1)x_2 - f(x_1)x - f(x_1)x_1 + f(x_1)x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)x - f(x_2)x_1 - f(x_1)x + f(x_1)x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Dies ist Aussage **I** für die **Konvexität** von f .

Der Beweis für den **konkaven Fall** geht analog .

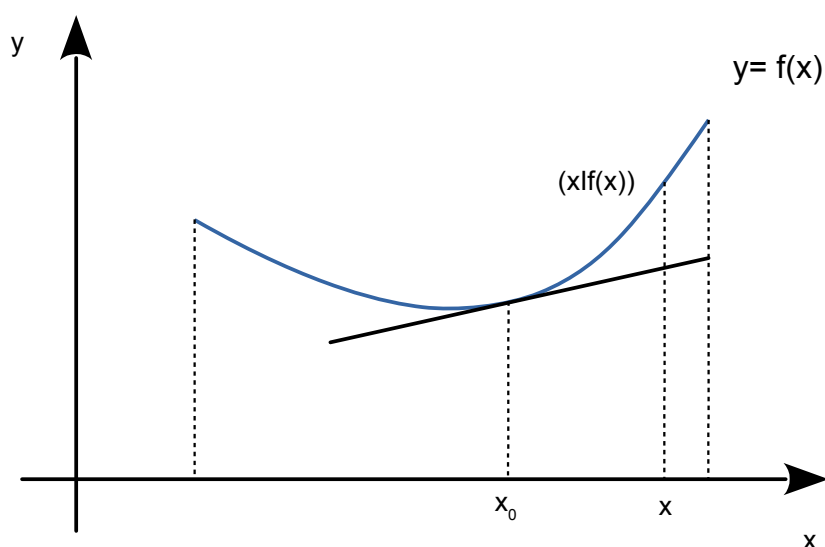
Konvexitäts- und Konkavitätskriterien bezüglich der Tangente

Eine differenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **konvex**, wenn der Graph der Funktion immer oberhalb der Tangente verläuft, das heißt wenn gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{für alle } x_0, x \in I.$$

Eine differenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **konkav**, wenn der Graph der Funktion immer unterhalb der Tangente verläuft, das heißt wenn gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{für alle } x_0, x \in I.$$



Beweis :

Sei f **konvex**. Dann ist f' monoton wachsend.

Sei $x_0 < x$ gegeben. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_1 \in (x_0, x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_1) \geq f'(x_0).$$

Es folgt :

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sei $x < x_0$ gegeben. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_2 \in (x, x_0)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_2) \leq f'(x_0).$$

Es folgt :

$$\begin{aligned}f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)(x - x_0) \\f(x) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .\end{aligned}$$

Die **Tangentenbedingung** ist als in beiden Fällen erfüllt .

Sei nun umgekehrt die **Tangentenbedingung** erfüllt , und seien $x_1 < x < x_2$ gegeben .

Dann folgt

$$\begin{aligned}f(x_2) &\geq f(x) + f'(x)(x_2 - x) \\f(x_2) - f(x) &\geq f'(x)(x_2 - x) \\ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} &\geq f'(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}f(x_1) &\geq f(x) + f'(x)(x_1 - x) \\-f'(x)(x_1 - x) &\geq f(x) - f(x_1) \\f'(x)(x - x_1) &\geq f(x) - f(x_1) \\f'(x) &\geq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} .$$

Weiter folgt :

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \\f(x) - f(x_1) (x_2 - x) &\leq (f(x_2) - f(x)) (x - x_1) \\f(x) (x_2 - x) - f(x_1) (x_2 - x) &\leq f(x_2) (x - x_1) - f(x) (x - x_1) \\f(x) ((x_2 - x) + (x - x_1)) &\leq f(x_2) (x - x_1) + f(x_1) (x_2 - x)\end{aligned}$$

$$f(x) (x_2 - x_1) \leq f(x_2) (x - x_1) + f(x_1) (x_2 - x)$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) (x - x_1) + f(x_1) (x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)x - f(x_2)x_1 + f(x_1)x_2 - f(x_1)x}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)x - f(x_2)x_1 + f(x_1)x_2 - f(x_1)x - f(x_1)x_1 + f(x_1)x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)x - f(x_2)x_1 - f(x_1)x + f(x_1)x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Dies ist Aussage **I** für die **Konvexität** von f .

Der Beweis für den **konkaven Fall** geht analog .

Konvexitäts- und Konkavitätskriterien für 2-mal differenzierbare Funktionen

Eine 2-mal differenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **konvex**, wenn die Funktion $f'' \geq 0$ ist.

Eine 2-mal differenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **konkav**, wenn die Funktion $f'' \leq 0$ ist.

Beweis :

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvex**. Dann ist nach dem letzten Satz f' **monoton steigend**, das heißt für $\Delta x > 0$ ist $f'(x+\Delta x) \geq f'(x)$ und $f'(x-\Delta x) \leq f'(x)$, und es folgt :

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x-\Delta x) - f'(x)}{-\Delta x} \geq 0.$$

Sei umgekehrt $f''(x) \geq 0$.

Dann gibt es zu jedem $\Delta x > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\xi_1 \in (x-\Delta x, x)$ bzw. $\xi_2 \in (x, x+\Delta x)$ mit

$$\frac{f'(x-\Delta x) - f'(x)}{-\Delta x} = f''(\xi_1) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(\xi_2) \geq 0.$$

Dann folgt :

$$f'(x-\Delta x) - f'(x) \leq 0$$

$$f'(x+\Delta x) - f'(x) \geq 0$$

$$f'(x-\Delta x) \leq f'(x)$$

$$f'(x+\Delta x) \geq f'(x)$$

Also ist f' **monoton steigend** und nach dem letzten Satz f **konvex**.

Der Beweis für den **konkaven Fall** geht analog.

Definition des Wendepunktes

Eine stetige Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ hat im Punkt $WP(x_0, f(x_0))$ einen **Wendepunkt**, falls es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, so dass eine der beiden Aussagen gilt:

- (1) f ist **konvex** auf $(x_0 - \epsilon, x_0)$ und **konkav** auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$.
- (2) f ist **konkav** auf $(x_0 - \epsilon, x_0)$ und **konvex** auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$.

Wendepunktskriterium für 2-mal stetigdifferenzierbare Funktionen

Eine 2-mal stetigdifferenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ hat im Punkt $WP(x_0, f(x_0))$ einen **Wendepunkt**, falls es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, so dass eine der beiden Aussagen gilt:

- (1) $f'' \geq 0$ auf $(x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'' \leq 0$ auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$.
- (2) $f'' \leq 0$ auf $(x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'' \geq 0$ auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$.

Insbesondere ist notwendigerweise $f''(x_0) = 0$.

Beweis :

Die Bedingung (1) sagt, dass f **konvex** auf $(x_0 - \epsilon, x_0)$ und **konkav** auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$ ist. Somit ist der Punkt $WP(x_0, f(x_0))$ ein **Wendepunkt**.

Wegen der Stetigkeit von f'' folgt:

$$f''(x_0 - \Delta x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f''(x_0 - \Delta x) \geq 0.$$

$$f''(x_0 + \Delta x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f''(x_0 + \Delta x) \leq 0.$$

Also folgt $f''(x_0) = 0$.

Der Fall (2) liefert entsprechende Ergebnisse.

Wendepunktskriterium für 3-mal stetigdifferenzierbare Funktionen

Ist eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 3-mal stetigdifferenzierbar und gilt

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0 ,$$

dann ist der Punkt $WP(x_0, f(x_0))$ ein **Wendepunkt** .

Beweis :

Wegen der Stetigkeit von f''' und $f'''(x_0) \neq 0$ ist $f''' \neq 0$ in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0)$. Nach dem Monotoniesatz ist die Funktion f'' streng monoton, es gilt also eine der beiden Aussagen :

$$(1) \quad f'' \geq 0 \quad \text{auf} \quad (x_0 - \epsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f'' \leq 0 \quad \text{auf} \quad (x_0, x_0 + \epsilon)$$

$$(2) \quad f'' \leq 0 \quad \text{auf} \quad (x_0 - \epsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f'' \geq 0 \quad \text{auf} \quad (x_0, x_0 + \epsilon) .$$

Also ist der Punkt $WP(x_0, f(x_0))$ ein **Wendepunkt** .