01
Prinzipien der Konvergenztheorie

Arno Fehringer

Dreiecksungleichung

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $|a+b| \leq |a|+|b|$,

(2) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

(3) $||a|-|b|| \leq |a+b|$

Beweis: (1)

$-|a| \leq a \leq |a|$ $\qquad$ $-|b| \leq b \leq |b|$

$-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

Beweis: (2)

$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$ $\qquad$ $|b| = |b-a+a| \leq |b-a|+|a|$

$|a|-|b| \leq |a-b|$ $\qquad$ $|b|-|a| \leq |b-a|$

$|b|-|a| \leq |a-b|$

$-|a-b| \leq |a|-|b|$

$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$

$||a|-|b|| \leq |a-b|$

Beweis: (3)

$|a| = |a+b+(-b)| \leq |a+b|+|b|$ $\qquad$ $|b| = |b+a+(-a)| \leq |b+a|+|a|$

$|a|-|b| \leq |a+b|$ $\qquad$ $|b|-|a| \leq |b+a|$

$|b|-|a| \leq |a+b|$

$-|a+b| \leq |a|-|b|$

$-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$

$||a|-|b|| \leq |a+b|$

Konvergente Folgen

Definition

Eine reelle Folge a_n **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Man schreibt auch $\boxed{\lim_{n \to -\infty} a_n = a}$, oder kurz $a_n \to a$.

Eine Folge a_n mit $\lim_{n \to -\infty} a_n = 0$ heißt **Nullfolge**.

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.

Satz

Jede konvergente Folge a_n ist beschränkt.

Beweis:

Sei $\lim_{n \to -\infty} a_n = a$. Zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < 1$$

$$-1 \leq a_n - a \leq 1$$

$$a - 1 \leq a_n \leq a + 1$$

Setze $s := \min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$, $S := \max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$.

Dann gilt: $s \leq a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Grenzwertsätze

Seien a_n , b_n konvergente folgen mit $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to-\infty} b_n = b$.

Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$

(2) $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n b_n = ab$

(3) $\lim\limits_{n\to-\infty} c\, b_n = b$ für $c \in \mathbb{R}$.

(4) $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, falls $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$.

(5) $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$.

Beweis: (1)

Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Es folgt:

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$|a_n + b_n - (a+b)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Analog

$$|a_n - b_n - (a-b)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Beweis: (2)

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da b_n beschränkt ist gibt es ein $K > 0$ mit $|b_n| < K$ und $|a| < K$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2K} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K} \ .$$

Es folgt:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + ab_n + ab_n - ab|$$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$$

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$|a_n b_n - ab| \leq |(a_n - a)||b_n| + |a||(b_n - b)|$$

$$|a_n b_n - ab| \leq |(a_n - a)|K + K|(b_n - b)|$$

$$|a_n + b_n - (a+b)| < \frac{\epsilon}{2K} K + K \frac{\epsilon}{2K} = \epsilon$$

Beweis: (3)

(3) folgt aus (2) mit der konstanten Folge $a_n = c$.

Beweis: (4)

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right|$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|}$$

Wegen $||b_n| - |b|| \leq |b_n - b|$ ist $\lim\limits_{n \to -\infty} |b_n| = |b|$ und zu $\frac{|b|}{2}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2} \ .$$

Es folgt dann

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n|-|b| < \frac{|b|}{2}$$

$$-\frac{|b|}{2}+|b| < |b_n| < \frac{|b|}{2}+|b|$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n|$$

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu $\epsilon_0 = \min\left\{\frac{|b|}{2}, \frac{\epsilon|b|^2}{2}\right\}$ gibt es nun ein neues $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|b_n-b| < \epsilon_0 \ .$$

Für die weitere Abschätzung folgt nun:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n||b|}$$

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b_n|}\frac{1}{|b|}|b-b_n|$$

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| < \frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|}\epsilon_0 \leq \frac{2}{|b|}\ \frac{1}{|b|}\ \frac{\epsilon|b|^2}{2} = \epsilon$$

Beweis: (5)

(5) folgt aus (2) und (4)

q.e.d.

Konvergente Folgen in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$

Definition

Eine komplexe Folge $z_n = x_n + i\ y_n$ **konvergiert** gegen $z = x + i\ y$, falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - z| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Der Zusammenhang zwischen dem dem komplexen Betrag einer Zahl $z = x + i\ y$ ist folgender:

$|x|\ ,\ |y| \leq |z| \leq |x| + |x|$.

Das bedeutet für eine komplexe Folge $z_n = x_n + i\ y_n$:

$z_n = x_n + i\ y_n \quad \rightarrow \quad z = x + i\ y \qquad \Leftrightarrow \qquad x_n \rightarrow x \quad \text{und} \quad y_n \rightarrow y$

Weitreichende Konsequenzen:

Ist $f : \mathbb{R}$ -------> $\mathbb{C}$ mit $f(\phi) = \cos(\phi) + i\ \sin(\phi)$ diejenige Funktion , welche die Zahlengerade auf den komplexen Einheitskreis abbildet, dann gilt:

$f'(\phi) = -\sin(\phi) + i\ \cos(\phi)$

$f'(\phi) = i\ (\cos(\phi) + i\ \sin(\phi))$

$f'(\phi) = i\ f(\phi)$

Die Funktion f hat nun weitere folgende Eigenschaften:

$f(0) = 1$

Wegen $f(-\phi) = \cos(\phi) - i\ \sin(\phi)$ ist $f(-\phi)f(\phi) = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$, also

$f(\phi) \neq 0$ für alle $\phi \in \mathbb{R}$.

$f'(\phi) = i\ f(\phi)$.

Die Funktion f hat nun folgende Eigenschaften:

(i) $f(0) = 1$

(ii) $f(\phi) \neq 0$ für alle $\phi \in \mathbb{R}$.

(iii) $f'(\phi) = i\ f(\phi)$.

Es gibt nur eine Funktion, mit diesen Eigenschaften:

Angenommen es gäbe eine weitere derartige Funktion g. Dann folgt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\phi) = \frac{f'(\phi)g(\phi) - f(\phi)g'(\phi)}{(g(\phi))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\phi) = \frac{i\ f(\phi)g(\phi) - f(\phi)i\ g(\phi)}{(g(\phi))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\phi) = 0$$

Dann ist aber $\left(\frac{f}{g}\right)(\phi) = c$ konstant, also $f(\phi) = c \cdot g(\phi)$.

Wegen $f(0) = g(0) = 1$ folgt $c = 1$, also ist $f(\phi) = g(\phi)$ für alle ϕ .

Da die Exponentialfunktion $g(\phi) = e^{i\,\phi}$ ebenfalls die Eigenschaften (i), (ii), (iii) hat, ist

$g = f$, also

$$\boxed{e^{i\,\phi} = \cos(\phi) + i\ \sin(\phi)} \quad .$$

Die berühmte **Eulersche Formel** verwendet man beim Beweis des **Fundamentalsatzes der Algebra** (vgl. Differentialrechnung).

Axiom der Intervallschachtelung

Gegeben sei eine Intervallfolge $[a_n ; b_n]$ mit rationalen Intervallgrenzen, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim\limits_{n \to -\infty} b_n - a_n = 0$.

Dann gibt es genau eine **reelle Zahl** z mit $z \in [a_n; b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Man spricht auch von der **Intervallschachtelung** $[a_n ; b_n]$ mit dem **Zentrum** z.
Eine entsprechende Aussage soll auch für Intervallfolgen $[a_n ; b_n]$ mit reellen Intervallgrenzen gelten.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $a_n \in \mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge a_{n_k} .

Beweis:

$A_0 \leq a_n \leq A_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $I_0 := [A_0; B_0]$.

Man konstruiert nun sukzessive eine Intervallschachtelung I_k :

Zunächst halbiert man das Intervall in $\left[A_1 \; ; \; \frac{A_0+B_0}{2}\right]$ und $\left[\frac{A_0+B_0}{2} \; ; \; B_0\right]$.

Als I_1 definiert man dasjenige Intervall, welches unendlich viele a_n enthält.

Es sei $I_k := [A_k \; ; \; B_k]$ schon definiert. Dann definiert man I_{k+1} zu

$$I_{k+1} := \begin{cases} \left[A_k \; ; \; \frac{A_k+B_k}{2}\right] & \text{, falls darin unendlich viele } a_n \text{ liegen.} \\ \left[\frac{A_k+B_k}{2} \; ; \; B_k\right] & \text{, falls darin unendlich viele } a_n \text{ liegen.} \end{cases}$$

Wegen $\lim\limits_{k \to -\infty} B_k - A_k = \lim\limits_{k \to -\infty} \frac{B_0 - A_0}{2^k} = 0$ ist I_k eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum z . Aus jedem Intervall I_k wählt man nun ein Folgenglied a_{n_k} der Folge a_n aus, so dass a_{n_k} monoton steigend ist, und zeigt, dass $\lim\limits_{k \to -\infty} a_{n_k} = z$ ist.
Wie macht man das genau?

Betrachte zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Umgebung $U_{\frac{1}{k}}(z)$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein n_k , so daß $I_{n_k} \subset U_{\frac{1}{k}}(z)$. Aus jedem Intervall I_{n_k} wählt man aus den unendlich

vielen a_n ein a_{n_k} so aus, dass die Indizes monoton wachsen..

Für die so konstruierte Teilfolgeolge a_{n_k} gilt dann :

$$\left| a_{n_k} - z \right| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Es ist also $\lim\limits_{k \to -\infty} a_{n_k} = z$

q.e.d.

Satz von Bolzano-Weierstraß für komplexe Folgen
Jede beschränkte Folge $z_n \in \mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge z_{n_k} .

Beweis:
Sei $z_n = a_n + i\, b_n$. Wegen $|a_n| \leq |z_n|$ ist die Folge a_n beschränkt und hat eine gegen a konvergente Teilfolge $a'_k = a_{n_k}$. Betrachte nun die beschränkten Teilfolgen $b'_k = b_{n_k}$ und $z'_k = a'_k + b'_k$. Es gibt eine gegen b konvergente Teilfolge b'_{k_l} , so dass die Folge $z'_{k_l} = a'_{k_l} + b'_{k_l}$ gegen $z = a + i\, b$ konvergiert.

q.e.d.

Satz
Jede beschränkte monotone Folge $a_n \in \mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis:
Sei die Folge a_n monoton wachsend. Nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** gibt es eine Teilfolge a_{n_k} mit $\lim\limits_{k \to -\infty} a_{n_k} = z$.

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_{k_0} , so dass gilt:
$\left|a_{n_k} - z\right| < \varepsilon$ für alle $n_k > n_{k_0}$.

Wegen der Monotonie gilt dann :
$\left|a_n - z\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_{k_0}$.

q.e.d.

Beschränkte Mengen

Satz und Definition
Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \{\}$. Dann heißt eine Zahl

$s \in \mathbb{R}$ **untere Schranke** von A, falls für alle $a \in A$ gilt: $s \leq a$.

$S \in \mathbb{R}$ **obere Schranke** von A, falls für alle $a \in A$ gilt: $a \leq S$.

Das **Infimum** von A , inf A , ist die **größte untere Schranke** .

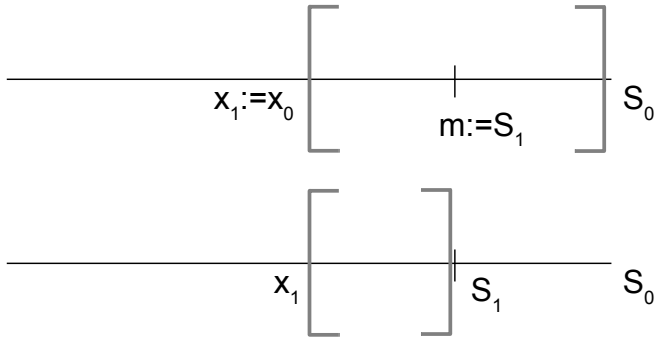
Das **Supremum** von A, sup A, ist die **kleinste obere Schranke** .

Gehören Infimum und Supremum zur Menge A heißen sie **Minimum** bzw. **Maximum**.

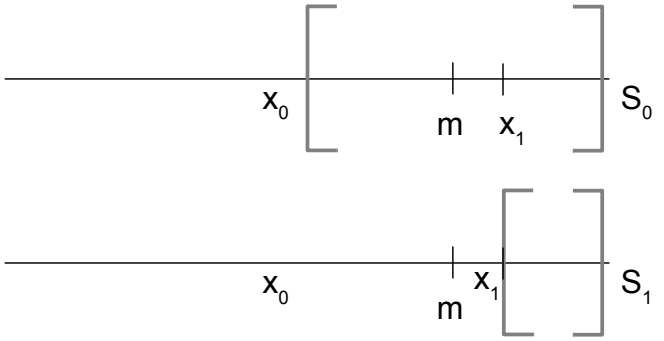
Jede nicht leere beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum und ein Supremum.

Beweis:
Sei $x_0 \in A$ und S_0 eine obere Schranke von A. Nun halbiert man das Intervall $I_0 = [x_0; S_0]$. Die Mitte ist $m = \frac{x_0 + S_0}{2}$. Es können zwei Fälle auftreten:

1. Fall: $A \cap (m; S_0] = \emptyset$
Dann ist m eine obere Schranke und wir definieren $x_1 := x_0$, $S_1 := m$ und $I_1 = [x_1; S_0]$



2. Fall: $M \cap (m; S_0] \neq \emptyset$
Dann gibt es einen Punkt $x_1 \in A$ mit $x_1 > m$. Dann definieren wir $S_1 := S_0$ und $I_1 = [x_1; S_1]$



Diese Konstruktion kann man fortsetzen, so dass man eine Intervallschachtelung $I_n = [x_n; S_n]$ bekommt , wobei die S_n obere Schranken vom A , die $x_n \in A$ und $S_n - x_n \leq \frac{S_0 - x_0}{2^n}$.

Die Folge der oberen Schranken S_n ist monoton fallend und deswegen konvergent gegen eine Zahl S.

Jetzt zeigt man, dass S die kleinste obere Schranke ist:

Für $x \in A$ gilt $x \leq S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x \leq \lim_{n \to -\infty} S_n = S$. Damit ist S eine obere Schranke.

Angenommen es gäbe eine obere Schranke S‘ < S. Wegen S-S‘ > 0 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$S_n - x_n \leq \frac{S_0 - x_0}{2^n} < S - S' \leq S_n - S'$$

$$S_n - x_n < S_n - S'$$

.

$$-x_n < -S'$$

$$x_n > S'$$

Die letzte Ungleichung steht im Widerspruch dazu, dass S‘ eine obere Schranke von A ist. Das heißt, dass S die kleinste obere Schranke , also das Supremum von A ist.

Die Existenz des Infimums von A zeigt man analog.

q.e.d.

Satz und Definition

Die Zahl a heißt **Häufungspunkt** einer Folge a_n , wenn für alle $\delta > 0$ gilt:

Unendlich viele a_n liegen in der δ -Umgebung von a, $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\}$.

Jede beschränkte Folge $a_n \in [A;B]$ hat in $[A;B]$ einen

kleinsten Häufungspunkt $\underline{a} = \inf\{a : a \text{ ist Häufungspunkt von } a_n\}$ und einen

größten Häufungspunkt $\overline{a} = \sup\{a : a \text{ ist Häufungspunkt von } a_n\}$.

Man schreibt und sagt auch :

$\underline{a} = \liminf = \underline{\lim}\ a_n$ „ **Limes inferior** von a_n „

$\overline{a} = \limsup = \overline{\lim}\ a_n$ „ **Limes superior** von a_n „

Beweis:

Nach dem Satz von **Bolzano-Weierstraß** existiert eine Teilfolge a_{n_k} , mit $\lim\limits_{k \to -\infty} a_{n_k} = h \in [A;B]$. Da dann h Häufungspunkt von a_n ist, die Menge der Häufungspunkte $H := \{h \in \mathbb{R} : h \text{ ist Häufungspunkt von } a_n\} \neq \{\}$ und beschränkt.

Deshalb existieren $\underline{h} = \inf H$ und $\overline{h} = \sup H$.

Wir zeigen, dass $\underline{h}$ eine Häufungspunkt ist:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $b \in H$ mit $\underline{h} \leq h < \underline{h} + \epsilon$.

Falls $\underline{h} = h$ ist, ist $\underline{h} \in H$, und der Beweis ist fertig.

Falls $\underline{h} < h$ ist, ist $\underline{h} \in H$, gibt es eine Umgebung $U_\delta(h)$ mit

$\underline{h} < h-\delta < h < h+\delta < \underline{h} + \epsilon$.

Da h Häufungspunkt ist, liegen In $U_\delta(h)$ unendlich viele Folgenglieder a_n und damit aber auch in $U_\epsilon(\underline{h})$. Also ist $\underline{h}$ Häufungspunkt von a_n und $\underline{h} \in H$.
Analog zeigt man, dass $\overline{h} \in H$ ist.

Die Punkte $\underline{h}$, $\overline{h}$ sind also kleinster bzw. größter Häufungspunkt von a_n .

q.e.d.

Abgeschlossene, beschränkte, kompakte Mengen

Definition
Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn für jede Folge $z_n \in A$ gilt:

$$\lim_{n \to -\infty} z_n = z \quad \Rightarrow \quad z \in A \ .$$

Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Zahl S gibt mit $|z| \leq S$ für alle $z \in A$.

Eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ heißt **kompakt,** wenn gilt:

Zu jeder Folge $z_n \in K$ existiert eine konvergente Teilfolge z_{n_k} mit

$$\lim_{k \to -\infty} z_{n_k} = z \in K \ .$$

Satz
Für alle $A \subset \mathbb{C}$ gilt: A ist kompakt $\Leftrightarrow$ A ist abgeschlossen und beschränkt .

Beweis: „ $\Leftarrow$ “

Sei A abgeschlossen und beschränkt, und sei $z_n = x_n + iy_n \in A$ eine Folge.
Dann gilt

$$|z_n| \leq S \ .$$

Für die reellen und imaginären Anteile gilt dann

$$-S \leq x_n \leq S \text{ und } -S \leq y_n \leq S \ .$$

Nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** gibt es konvergente Teilfolgen x_{n_k} und y_{n_k} , mit

$$\lim_{k \to -\infty} x_{n_k} = x \text{ und } \lim_{k \to -\infty} y_{n_k} = y \ .$$

Dann gilt für die Teilfolge z_{n_k} , dass $\lim_{k \to -\infty} z_{n_k} = \lim_{k \to -\infty} x_{n_k} + iy_{n_k} = x + iy =: z$ ist.

Wegen der Abgeschlossenheit von A ist $z \in A$. Das heißt, A ist kompakt.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “

Sei A kompakt. Angenommen A sei unbeschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in A$ mit $|z_n| > n$. Für die reellen und imaginären Anteile gilt entsprechend $|x_n| > n$ und $|y_n| > n$.

Dann sind diese Folgen und sämtliche Teilfolgen divergent, im Widerspruch zur Kompaktheit. Also ist A beschränkt.

Sei nun $z_n \in A$ mit $\lim\limits_{n \to -\infty} z_n = z$. Dann gibt es wegen der Kompaktheit eine konvergente Teilfolge z_{n_k} mit $\lim\limits_{k \to -\infty} z_{n_k} = \lim\limits_{n \to -\infty} z_n = z \in A$.

Deshalb ist A abgeschlossen.

q.e.d.

Bemerkung:

Jedes Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$ und jede Kreisscheibe $K_r = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ ist kompakt .

<u>Satz</u>
Ist $f : K \subset \mathbb{C}$ -------> $\mathbb{C}$ stetig und K kompakt, so ist $f(K)$ kompakt.
Kurz: Das stetige Bild einer kompakten Menge ist wieder kompakt.

Beweis:
Sei y_n eine Folge in $f(K)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $z_n \in K$ mit $f(z_n) = y_n$.

Da K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge z_{n_k} mit $\lim\limits_{k \to -\infty} z_{n_k} = z \in K$.

Wegen der Stetigkeit von f folgt $\lim\limits_{k \to -\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k \to -\infty} f(z_{n_k}) = f(z) \in f(K)$. Also ist $f(K)$ kompakt.

q.e.d.

Satz vom Maximum und Minimum für reellwertige stetige Funktionen

Ist f : K -------> IR stetig und $K \in \mathbb{C}$ kompakt, so hat f ein Minimum und ein Maximum.

Beweis:

Nach dem vorigen Satz ist f(K) kompakt, das heißt abgeschlossen und beschränkt. Nach dem Satz vom Infimum und Supremum existieren diese. Es sei s := sup f(K) .

Nach dem Beweis gibt es eine monoton wachsende Folge $y_n \in f(K)$ mit $\lim_{n \to -\infty} y_n = s \in f(K)$, da f(K) abgeschlossen ist.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $z_n \in K$ mit $f(z_n) = y_n$.

Da K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge z_{n_k} mit $\lim_{k \to -\infty} z_{n_k} = z \in K$.

Wegen der Stetigkeit von f folgt $s = \lim_{k \to -\infty} y_{n_k} = \lim_{k \to -\infty} f(z_{n_k}) = f(z)$. Das heißt, dass f in z ein Maximum hat.

Der Beweis für die Existenz des Minimums funktioniert analog.

q.e.d.

Cauchysches Konvergenzkriterium für Folgen

Für eine Folge a_n sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$|a_n - a_{n_0}| < \epsilon$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Es folgt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a_{n_0}| = |a_n - a + a - a_{n_0}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n_0}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1)

Die Folge a_n erfülle das Kriterium von (2). Wir zeigen zuerst, dass a_n beschränkt ist:

Zu $\epsilon = 1$ gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_{n_0}| < 1$.

Dann folgt:

$$-1 < a_n - a_{n_0} < 1$$

$$a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 .$$

Die Folge a_n , $n \geq n_0$ ist also beschränkt. Da die restlichen Glieder a_0 , ... , a_{n-1} ebenfalls beschränkt sind, ist die ganze Folge a_n beschränkt.

Nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** gibt es eine konvergente Teilfolge a_{n_k} mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Wir zeigen nun, dass $\lim_{n \to -\infty} a_n = a$ ist:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_{n_0}| < \frac{\epsilon}{2}$.

Wegen $\lim_{k \to -\infty} a_{n_k} = a$ gibt es ein $n_{k_0} \geq n_0$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n_k \geq n_{k_0}$.

Für alle $n \geq n_0$ folgt dann:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

q.e.d.

Konvergente Reihen

Definition

Eine reelle Folge S_n heißt **Reihe** mit den Gliedern a_i , falls $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Reihe **konvergiert** gegen $S \in \mathbb{R}$, wenn die Folge S_n gegen S konvergiert:

$$\lim_{n\to-\infty} S_n = \lim_{n\to-\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = S \ .$$

Man schreibt auch $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} a_i = S}$.

Notwendige Bedingung für die Konvergenz von S_n :

$$\lim_{n\to-\infty} S_n = \lim_{n\to-\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = S \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to-\infty} a_n = \lim_{n\to-\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

Die Folge der Glieder a_n muss also eine Nullfolge sein.

Geometrische Reihen

Die geometrische Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$ ist konvergent, genau dann wenn $|q| < 1$.

Beweis:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} q^i$$

$$S_n = 1 + q\sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

$$S_n = 1 + q\sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

$$S_n = 1 + q\left(S_n - q^n\right)$$

$$S_n = 1 + qS_n - q^{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - q)}$$

Für $|q| < 1$ ist $\lim_{n\to-\infty} q^n = 0$ und

$$\lim_{n\to-\infty} S_n = \lim_{n\to-\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - q)} = \frac{1}{(1 - q)}$$, also konvergent.

Ist umgekehrt $|q| \geq 1$, folgt $|q|^n \geq 1$ und daher q^n ist keine Nullfolge.

q.e.d.

Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen

Für eine Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\lim_{n \to -\infty} S_n = \lim_{n \to -\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = S$

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|S_n - S_{n_0}| = \left| \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n_0} a_i \right| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \right| < \epsilon \ .$$

Beweis:

Man ersetze beim Beweis des **Cauchyschen Konvergenzkriteriums für Folgen** einfach f_n durch S_n .

Weitere Konvergenzkriterium für Reihen

Definition

Sind $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ zwei unendliche Reihen mit **nichtnegativen Gliedern** $a_i , b_i \geq 0$ und gilt für fast alle $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_i \leq b_i$, so heißt $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ eine **Minorante** von $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ eine **Majorante** von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Satz (Majoranten / Minorantenkriterium)

Jede Minorante einer konvergenten Reihe konvergiert, jede Majorante einer divergenten Reihe divergiert.

Beweis:

Sei $\sum_{i=0}^{n} a_i$ eine Reihe, die eine konvergente Majorante $\sum_{i=0}^{n} b_i$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = S$ hat.

Ab einen gewissen Index i_0 gilt dann $a_i \leq b_i$ für alle $n \geq i_0$ und

$$\sum_{i=i_0}^{n} a_i \leq \sum_{i=i_0}^{n} b_i \leq S = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

$$\sum_{i=0}^{i_0-1} a_i + \sum_{i=i_0}^{n} a_i \leq \sum_{i=i_0}^{n} b_i \leq S + \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \leq \sum_{i=i_0}^{n} b_i \leq S + \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i \ .$$

Die monoton wachsende Folge $\sum_{i=0}^{n} a_i$ ist also beschränkt und damit konvergent.

Sei nun $\sum_{i=0}^{n} a_i$ eine divergente Minorante von $\sum_{i=0}^{n} b_i$. Ab einem gewissen Index i_0 gilt dann $b_i \geq a_i$ für alle $n \geq i_0$ und $\sum_{i=i_0}^{n} b_i \geq \sum_{i=i_0}^{n} a_i$. Wäre nun $\sum_{i=0}^{n} b_i$ konvergent, wäre sie eine konvergente Majorante von $\sum_{i=0}^{n} a_i$, also wäre $\sum_{i=0}^{n} a_i$ nach dem Vorigen ebenfalls konvergent, was jedoch im Widerspruch zur zur Divergenz von $\sum_{i=0}^{n} a_i$ stünde.

q.e.d.

Satz (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{i=0}^{n} a_i$ eine Reihe mit nur **positiven Gliedern** $a_i > 0$.
Wenn es eine Zahl q , $0 < q < 1$ gibt, so dass für fast alle $i \in \mathbb{N}$ der Quotient

$\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq q$ ist , dann ist die Reihe konvergent.

Ist aber für fast alle $i \in \mathbb{N}$ der Quotient $\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 1$, so divergiert die Reihe.

Beweis:
Es gelte $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq q$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$, das heißt, es gibt ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq i_0$ gilt: $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq q$, also $a_{i+1} \leq a_i q$.

Dann gilt für alle $j \geq 0$:

$$a_{i_0+j} \leq a_{i_0+j-1} q \leq a_{i_0+j-2} q^2 \leq a_{i_0+j-3} q^3 \leq \ldots \leq a_{i_0} q^j .$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{n} a_{i_0+j}$ hat also die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{n} a_{i_0} q^j$ als **konvergente Majorante** und konvergiert daher. Darum ist konvergiert auch $\sum_{j=0}^{n} a_i$.

Ist für alle $i \geq i_0$ der Quotient $\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 1$, sind die a_i monoton wachsend und bilden daher **keine Nullfolge**. Die Reihe $\sum_{j=0}^{n} a_i$ divergiert deshalb.

q.e.d.

Satz (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{i=0}^{n} a_i$ eine Reihe mit **nichtnegativen Gliedern** $a_i \geq 0$.
Wenn es eine Zahl q , $0 < q < 1$ gibt, so dass für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$\sqrt[i]{a_i} \leq q$, dann ist die Reihe konvergent.

Wenn aber für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[i]{a_i} \geq 1$, so divergiert die Reihe.

Beweis:
Wenn es eine Zahl q , $0 < q < 1$ gibt, und $\sqrt[i]{a_i} \leq q$ ist für fast alle $i \in \mathbb{N}$, folgt $a_i \leq q^i$ für diese i , und daher ist die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{n} q^i$ eine **konvergente Majorante** für $\sum_{i=0}^{n} a_i$.

Ist $\sqrt[i]{a_i} \geq 1$ für für fast alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt $a_i \geq 1$ für diese i , die Reihe divergiert also.

q.e.d.

Definition und Satz (absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ konvergent ist.
Jede absolut konvergente Reihe konvergiert in gewöhnlichen Sinn.

Beweis:
Sei $S_n = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ konvergent. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach dem **Cauchyschen Konvergenzkriterium** ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|S_n - S_{n_0}| = \left| \sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{n_0} |a_i| \right| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{n} |a_i| \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{n} |a_i| < \epsilon .$$

Wegen $\left| \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{n} |a_i| < \epsilon$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{n} a_i$ nach dem **Cauchykriterium für Reihen** .

q.e.d.

Folgen und Reihen von Funktionen

Zunächst soll an den Begriff der stetigen Funktion erinnert werden:

Definition
Eine Funktion $f : [a; b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig in** $x \in [a;b]$, wenn gilt:

Für alle Folgen x_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Man schreibt auch kurz $\lim\limits_{\bar{x}\to x} f(\bar{x}) = f(x)$. Die Funktion heißt **stetig**, wenn sie in jedem $x \in [a;b]$ stetig ist.

Satz
Gegeben sei eine Funktion $f : [a; b] \dashrightarrow \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig in x.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1)
Sei x_n eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt:

$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)
Angenommen es gäbe ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x(\delta)$ existiert mit

$|x(\delta) - x| < \delta$, aber $|f(x(\delta)) - f(x)| \geq \varepsilon_0$. Falls nun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq n_0$, aber $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0$.

Das heißt aber, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$, im Widerspruch zur Stetigkeit von f.

q.e.d.

Satz
Sei f : [a; b] ----------> IR stetig. Dann ist f sogar **gleichmäßig stetig**. Das heißt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a;b]$ gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Beweis:
Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ Werte $x(\delta)$, $y(\delta)$ existierten , mit

$$I\, x(\delta) - y(\delta)\, I < \delta \ , \quad \text{aber} \quad I\, f(x(\delta)) - f(y(\delta))\, I \geq \varepsilon_0 \ .$$

Speziell würden für $\delta = \frac{1}{n}$ Folgen x_n , y_n existieren mit $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Nach dem **Satz von Bolzano – Weierstraß** gäbe es eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Wegen $|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n}$ gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x$ und

$$|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \ .$$

Wegen der Stetigkeit von f ist aber $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x)$,

also $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}) = 0$ im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0$.

q.e.d.

Satz
Sei f : [a; b] --------> IR stetig und $f(x_0) > a$.
Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, so dass für alle $x \in U(x_0) \cap [a;b]$ gilt $f(x) > a$.

Entsprechendes gilt im Fall $f(x_0) < a$.

Beweis:
Wäre ein solches $U(x_0)$ nicht vorhanden, gäbe es es zu jedem $U_{1/n}(x_0)$ ein x_n mit $f(x_n) \leq a$. Dann wäre $\lim\limits_{x_n\to x_0} x_n = x_0$, aber $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = f(x_0) \leq a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

q.e.d.

Folgen von Funktionen

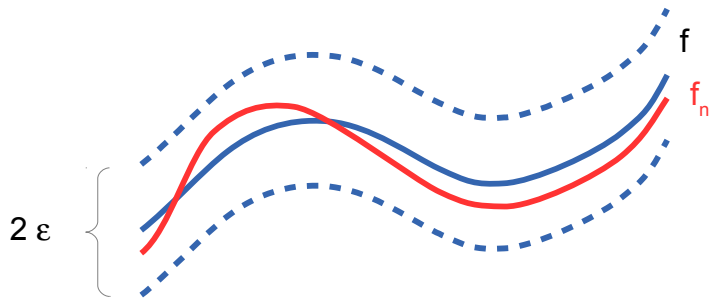
Definition

Eine Funktionenfolge $f_n : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ heißt **punktweise konvergent**, wenn für jedes $x \in [a;b]$ die Folge $f_n(x)$ konvergiert.

Die **Grenzfunktion** $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ist die durch $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ definierte Funktion.

Eine Funktionenfolge $f_n : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion f, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$ gilt:

$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.



Satz

Konvergiert die Folge $f_n : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ **gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion $f : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ und sind alle f_n stetig, so ist auch f stetig.

Beweis:

Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$ gilt:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Da f_{n_0} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt :

$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$

Es folgt dann für $|y - x| < \delta$:

$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f(x)|$

$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|$

$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Also ist f stetig .

q.e.d.

Cauchysches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Folgen von Funktionen

Für eine Folge f_n von Funktionen $f_n : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \epsilon \quad .$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Sei f_n gleichmäßig konvergent gegen f. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad .$$

Dann folgt:

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_{n_0}(x)|$$

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_0}(x)|$$

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \epsilon$, das heißt, das Kriterium (2) ist erfüllt.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1)

Jetzt sei umgekehrt das Kriterium (2) erfüllt. Die Reihe konvergiert dann punktweise gegen eine Funktion f, da die Folge $f_n(x)$ das **Cauchysche Konvergenzkriterium für Folgen** erfüllen: $\lim\limits_{n \to -\infty} f_n = f$ mit $f(x) = \lim\limits_{n \to -\infty} f_n(x)$

Man muss jetzt nur noch die gleichmäßige Konvergenz gegen f nachweisen:

Zu $\epsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad .$$

Für alle $n + m \geq n_0$ und für alle $x \in [a;b]$ folgt dann:

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |f_{n+m}(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_n(x)|$$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+m}(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_n(x)|$$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \frac{2}{3}\epsilon \ .$$

Das heißt aber:

$$-\frac{2}{3}\epsilon < f_{n+m}(x) - f_n(x) < \frac{2}{3}\epsilon$$

$$f_n(x) - \frac{2}{3}\epsilon < f_{n+m}(x) < f_n(x) + \frac{2}{3}\epsilon$$

$$f_n(x) - \frac{2}{3}\epsilon \leq \lim_{m \to \infty} f_{n+m}(x) \leq f_n(x) + \frac{2}{3}\epsilon$$

$$f_n(x) - \frac{2}{3}\epsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{2}{3}\epsilon$$

$$-\frac{2}{3}\epsilon \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{2}{3}\epsilon$$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{3}\epsilon$$

$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [a;b]$.

Also ist die Funktionenfolge f_n gleichmäßig konvergent gegen f .

q.e.d.

Reihen von Funktionen

Definition

Eine Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ von Funktionen f_i : [a;b] ------> IR heißt **punktweise konvergent**, wenn für jedes $x \in [a;b]$ die Summenfolge $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$ konvergiert.

Die durch $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ definierte Funktion ist die **Grenzfunktion** $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$.

Eine Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ von Funktionen f_n : [a;b] ------> IR **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion $S = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|S(x)-S_n(x)| = \left|S(x)-\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)-\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)\right| < \epsilon \ .$$

Aufgrund der Überlegungen für die gleichmäßige Konvergenz von Folgen von Funktionen ergeben sich sofort die folgenden Sätze:

Satz

Konvergiert die Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ von Funktionen f_i : [a;b] ------> IR **gleichmäßig** und sind alle f_i stetig , so ist auch die Grenzfunktion $S = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ stetig.

Cauchysches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen

Für eine Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ von Funktionen f_i : [a;b] ------> IR sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ konvergiert gleichmäßig gegen $S = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$.

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|S_n(x) - S_{n_0}(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x) - \sum_{i=0}^{n_0} f_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n_0+1}^{n} f_i(x)\right| < \epsilon \ .$$

Definition und Satz (absolute / absolute und gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen)

Eine Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ von Funktionen f_i : [a;b] ------> IR heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{i=0}^{n} |f_i|$ konvergent ist.

Eine Reihe $S_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ von Funktionen f_i : [a;b] ------> IR heißt **absolut und gleichmäßig konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{i=0}^{n} |f_i|$ gleichmäßig konvergent ist.

Jede absolut (bzw. absolut und gleichmäßig) konvergente Reihe konvergiert (bzw. konvergiert gleichmäßig).

Beweis:

Das folgt sofort aus der Ungleichung $\left| \sum_{i=n_0+1}^{n} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{n} |f_i(x)|$ und dem **Cauchy-Kriterium für für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen** .

q.e.d.

Satz (Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen)

Sei $\sum_{i=0}^{n} a_i$ eine konvergente Reihe mit **nichtnegativen Gliedern** $a_i \geq 0$, und sei $\sum_{i=0}^{n} f_i$ eine Reihe von Funktionen f_i : [a;b] ------> IR .

Wenn $|f_i(x)| \leq a_i$ für alle $x \in [a;b]$ und fast alle i ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{n} f_i$ **absolut und gleichmäßig**.

Beweis:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach dem **Cauchyschen Konvergenzkriterium für Reihen** ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i < \epsilon \quad .$$

Außerdem gilt für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$: $|f_n(x)| \leq a_n$.

Dann folgt für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$:

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i < \epsilon \quad .$$

Wegen $\left| \sum_{i=n_0+1}^{n} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{n} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i < \epsilon$ ist das

Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz für die Reihen

$\sum_{i=0}^{n} f_i(x)$ und $\sum_{i=0}^{n} |f_i(x)|$ für alle $x \in [a;b]$ erfüllt , das heißt $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)$ konvergiert

absolut und gleichmäßig.

q.e.d.

Potenzreihen

Definition

Eine Potenzreihe ist einen Funktion $P : K \subset \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i ,$$

wobei die $a_i \in \mathbb{C}$ die **Koeffizienten** und z_0 der **Entwicklungspunkt** ist.

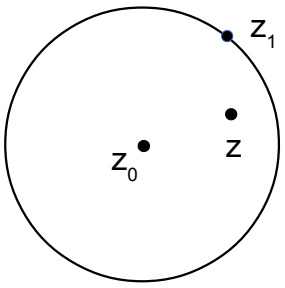
Satz

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ konvergiere in einem Punkt $z_1 \neq z_0 \in \mathbb{C}$.

(1) Dann gibt es ein $M \in [0;\infty)$ mit $|a_i||z_1 - z_0|^i \leq M$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(2) P(z) **konvergiert absolut** in jedem Punkt z der offenen Kreisscheibe $K_{z_0,|z_1-z_0|}$, und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|P(z) - P_n(z)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i (z - z_0)^i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i||z_1 - z_0|^i \leq M \frac{1}{1 - \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^{n+1} .$$



$$K_{z_0,|z_1-z_0|} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_1 - z_0| \}$$

Beweis:

Weil P(z) in z_1 konvergiert ist $|a_i(z_1-z_0)^i| = |a_i||z_1-z_0|^i$ eine Nullfolge, und damit beschränkt, das heißt es gibt eine Zahl $M \in [0;\infty)$ mit

$|a_i||z_1-z_0|^i \le M$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $z \in K_{z_0,|z_1-z_0|} = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < |z_1-z_0|\}$.

Aus $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ folgt zunächst :

$$|z-z_0| < |z_1-z_0|$$

$$q := \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1$$

$$q^i := \frac{|z-z_0|^i}{|z_1-z_0|^i} < 1 \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} .$$

Dann folgt weiter für die Abschätzung der Reihenglieder:

$$\left|a_i(z-z_0)^i\right| = \left|a_i\right|\left|z-z_0\right|^i = \left|a_i\right|\left|z_1-z_0\right|^i \frac{\left|z-z_0\right|^i}{\left|z_1-z_0\right|^i} \le M\ q^i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} .$$

Das bedeutet aber, dass die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{n} Mq^i$ eine konvergente Majorante von $\sum_{i=0}^{n} a_i(z-z_0)^i$ bzw. $\sum_{i=0}^{n} |a_i(z-z_0)^i|$ ist.

Die Reihe $\sum_{i=0}^{n} a_i(z-z_0)^i$ **konvergiert** also **absolut** und es existiert der Grenzwert

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i = P(z) .$$

Insgesamt erhält man die behauptete Abschätzung:

$$|P(z)-P_n(z)| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i||z_1-z_0|^i \le \sum_{i=n+1}^{\infty} Mq^i = M\ \frac{1}{1-q} - M\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= M\ \frac{1}{1-q}\left(1-(1-q^{n+1})\right)$$

$$= M\ \frac{1}{1-q}\ q^{n+1}$$

$$= M\ \frac{1}{1-\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}}\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^{n+1}$$

q.e.d.

Satz vom Konvergenzradius

Zu jeder Potenzreihe $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$ gibt es genau ein $\rho \in [0;\infty)$, der **Konvergenzradius**, mit folgender Eigenschaft:

P(z) ist
- absolut konvergent für z mit $|z-z_0| < \rho$.
- divergent für z mit $|z-z_0| > \rho$.

Die offene Kreisscheibe $K_{z_0\,\rho}$ heißt **Konvergenzkreis** .

Beweis:

Die Eindeutigkeit ist klar: Sei ρ_1 ein anderer Konvergenzradius, etwa $\rho_1 < \rho$. Dann ist P(z) absolut konvergent und divergent für alle z mit $\rho_1 < |z-z_0| < \rho$, was einen Widerspruch darstellt.

Zur Existenz: $\rho := \sup\{\ |z-z_0| : P(z)$ konvergiert $\}$

Die Menge $\{\ |z-z_0| : P(z)$ konvergiert $\} \neq \{\ \}$, da P(z) in z_0 konvergiert.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \rho$.

Dann gibt es ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z_1-z_0| < \rho$, so dass P(z) in z_1 konvergiert. Nach dem vorigen Satz konvergiert P(z) absolut in z .

Sei nun $|z-z_0| > \rho$, dann divergiert die Reihe nach Voraussetzung .

q.e.d.

Satz von Hadamard

Es sei $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann gilt:

(1) Wenn $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert und positiv ist, dann ist $\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|}}$.

(2) Wenn $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = 0$ ist, ist $\rho = \infty$.

(3) Wenn $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|}$ nicht existiert, ist $\rho = 0$.

Beweis: (1)

Sei $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|}}$.

Dann folgt:

$\overline{\lim} \left(\sqrt[i]{|a_i|} \right) |z - z_0| < 1$

$\overline{\lim} \left(\sqrt[i]{|a_i|} \; |z - z_0| \right) < 1$

$\overline{\lim} \left(\sqrt[i]{|a_i| \; |z - z_0|^i} \right) < 1$

Es gibt ein $q < 1$ mit $\left(\sqrt[i]{|a_i| \; |z - z_0|^i} \right) < q$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

Dann folgt $|a_i| \; |z - z_0|^i < q^i$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Das heißt, die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ hat eine konvergente geometrische Reihe als Majorante und konvergiert in z, also ist $|z - z_0| < \rho$.

Ist umgekehrt z ein Punkt mit $|z - z_0| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|}}$ folgt:

$\overline{\lim} \left(\sqrt[i]{|a_i|} \right) |z - z_0| > 1$

$\overline{\lim} \left(\sqrt[i]{|a_i|} \; |z - z_0| \right) > 1$

$\overline{\lim} \left(\sqrt[i]{|a_i| \; |z - z_0|^i} \right) > 1$

und $\left(\sqrt[i]{|a_i| \; |z - z_0|^i} \right) \geq 1$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$.

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ divergiert also, da ihre Glieder keine Nullfolge bilden.

Beweis: (2)

Wenn $\overline{\lim}\ \sqrt[i]{|a_i|} = 0$ ist, strebt für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Folge $\left(\sqrt[i]{|a_i|\ |z-z_0|^i}\right)$ gegen Null. Ist dann $0 < q < 1$, so folgt $|a_i|\ |z-z_0|^i < q^i$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$, und die Reihe $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ ist konvergent in z.

Beweis: (3)

$\overline{\lim}\ \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert genau dann nicht, wenn die Folge $\sqrt[i]{|a_i|}$ nicht beschränkt ist. Für $z \neq z_0$ ist dann auch $\left(\sqrt[i]{|a_i|\ |z-z_0|^i}\right)$ und $|a_i|\ |z-z_0|^i$ nicht beschränkt. Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ muss also divergieren.

q.e.d.

Satz

Jede Potenzreihe $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ konvergiert auf jeder **kompakten Kreisscheibe** $\overline{K_{z_0\, r}} \subset K_{z_0\, \rho}$ **absolut und gleichmäßig** .

Beweis:

Wegen $r < \rho$ gibt es ein r_1 mit $r < r_1 < \rho$, und es gibt ein z_1 mit $|z_1 - z_0| = r_1$.

Für alle $z \in \overline{K_{z_0\, r}}$ ist $|z-z_0| \le r < r_1 = |z-z_0|$, und nach dem vorletzten Satz gilt folgende Abschätzung:

$$\left|a_i (z-z_0)^i\right| = \left|a_i\right| \left|z-z_0\right|^i = \left|a_i\right| \left|z_1-z_0\right|^i \frac{\left|z-z_0\right|^i}{\left|z_1-z_0\right|^i} \le M \left(\frac{r}{r_1}\right)^i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} .$$

Die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{r_1}\right)^i$ ist wegen $\frac{r}{r_1} < 1$ konvergent und eine

Majorante von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$.

Es existiert also $P(z) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} a_i (z-z_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$.

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es nun ein n_0 , so dass für alle $n \ge n_0$ gilt: $\sum_{i=n+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{r_1}\right)^i < \epsilon$.

Dann folgt für alle $z \in \overline{K_{z_0\, r}}$ und alle $n \ge n_0$:

$$|P(z) - P_n(z)| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i - \sum_{i=0}^{n} a_i (z-z_0)^i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i (z-z_0)^i\right| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i (z-z_0)^i| \le$$

$$\le \sum_{i=n+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{r_1}\right)^i < \epsilon$$

Also ist P(z) auf $\overline{K_{z_0\, r}}$ absolut gleichmäßig konvergent.

q.e.d.

Satz

Jede Potenzreihe $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ ist auf dem Konvergenzkreis stetig.

Beweis:

Sei $z \in K_{z_0\ \rho}$ gegeben. Dann gibt es ein r mit $r < \rho$ mit $z \in \overline{K_{z_0\ r}}$. Da alle $P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i (z - z_0)^i$ auf $\overline{K_{z_0\ r}}$ stetig sind und $P_n(z)$ absolut und gleichmäßig konvergiert, ist die Grenzfunktion $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ stetig in z.

q.e.d.

Vertauschung von Grenzprozessen

Differentiation von Grenzfunktionen

Satz

Konvergiert die Folge $f_n : [a;b] \dashrightarrow IR$ **gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion $f : [a;b] \dashrightarrow IR$ und sind alle f_n stetig , so ist auch f stetig.

Beweis:

Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad .$$

Da f_{n_0} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt :

$$|y - x| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Es folgt dann für $|y - x| < \delta$:

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f(x)|$$

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|$$

$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Also ist f stetig .

q.e.d.

Satz

Die Funktionenfolge $f_n : [a;b] \dashrightarrow IR$ sei stetig in $\bar{x} \in [a;b]$ und **konvergiere gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion f. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U_\delta(\bar{x}) \subset [a;b]$ und ein n_0 , so dass für alle $x \in U_\delta(\bar{x})$ und alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|f_n(x) - f(\bar{x})| < \epsilon \quad .$$

Beweis:

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_n in der Stetigkeit in $\bar{x}$ ist auch die Grenzfunktion f stetig in $\bar{x}$. Es gibt daher zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U_\delta(\bar{x}) \subset [a;b]$, so dass für alle $x \in U_\delta(\bar{x})$ gilt:

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\epsilon}{2} \quad .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_n gibt es ein n_0, so dass für alle $x \in [a;b]$ und alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad .$$

Dann folgt für alle alle $x \in U_\delta(\bar{x})$ und alle $n \geq n_0$:

$$|f_n(x) - f(\bar{x})| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f(\bar{x})|$$

$$|f_n(x) - f(\bar{x})| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(\bar{x})|$$

$$|f_n(x) - f(\bar{x})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$|f_n(x) - f(\bar{x})| < \epsilon$$

q.e.d.

Satz

Die Funktionenfolge $f_n : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und die Folge der Ableitungen $f_n' : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Wenn dann die Folgen f_n und f_n' **gleichmäßig** gegen f und f^* **konvergieren**, ist auch f differenzierbar und es gilt $f' = f^*$.

Andere Schreibweise: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Beweis:

Sei $\bar{x} \in [a;b]$. Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f^*(\bar{x})$ ist.

Für $x \neq \bar{x}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem n ein $\xi_n \in (\bar{x};x)$ oder $\xi_n \in (x;\bar{x})$ mit

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\xi_n) \quad .$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Folge f_n' gleichmäßig gegen f^* konvergiert ,

gibt es nach dem vorigen Satz gibt es eine Umgebung $U_\delta(\bar{x}) \subset [a;b]$ und ein n_0, so dass für alle $x \in U_\delta(\bar{x})$ und alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n'(x) - f^*(\bar{x})| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Zu festem $x \in U_\delta(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$ gibt es ein $n_1 \geq n_0$, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt:

$$\left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f^*(\bar{x}) \right| &= \left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} + \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f^*(\bar{x}) \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| + \left| \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f^*(\bar{x}) \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| + \left| f'(\xi_n) - f^*(\bar{x}) \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Also ist dass $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f^*(\bar{x})$.

q.e.d.

Satz

Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ eine **reelle Potenzreihe** mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ und dem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist P im Intervall $(x_0-\rho; x_0+\rho)$ differenzierbar und es gilt

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ a_i (x-x_0)^{i-1} \quad .$$

Andere Schreibweise: $P'(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i \right)' = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i (x-x_0)^i \right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i\ a_i (x-x_0)^{i-1}$

Beweis:
Wir betrachten die Reihe $P^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ a_i (x-x_0)^{i-1}$. Nach dem **Satz vom Konvergenzradius** hat sie einen $\rho^* \geq 0$.

Es ist klar, dass $\rho^* \leq \rho$ ist, da die Potenzreihe $P^*(x)$ höchstens auf dem Intervall $(x_0-\rho; x_0+\rho)$ erklärt ist.

Wir zeigen nun, dass $\rho^* = \rho$ ist:

Sei $|x-x_0| < \rho$, das heißt $x \in (x_0-\rho; x_0+\rho)$, und sei $x \neq x_0$. Für die Potenzreihe $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ gilt folgendes:

Es gibt ein x_1 mit $|x-x_0| < |x_1-x_0| < \rho$, so dass die Reihe $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ in x_1 konvergiert und die bekannte Abschätzung

$$\left|a_i (x-x_0)^i\right| = |a_i| |x-x_0|^i = |a_i| |x_1-x_0|^i \frac{|x-x_0|^i}{|x_1-x_0|^i} \leq M\ q^i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \quad .$$

gilt, wobei M eine Schranke der Nullfolge $|a_i (x_1-x_0)^i| = |a_i| |x_1-x_0|^i$ und $q := \frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} < 1$ ist .

Zur Abschätzung der Folgenglieder der Reihe $P^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ a_i (x-x_0)^{i-1}$ folgt nun weiter:

$$\left|a_i(x-x_0)^{i-1}\right| \;=\; |a_i|\,|x-x_0|^{i-1} \;\le\; \frac{M}{|x-x_0|}\;q^i$$

$$\left|a_i(x-x_0)^{i-1}\right| \;=\; |a_i|\,|x-x_0|^{i-1} \;\le\; \frac{M}{|x-x_0|}\;\left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^i$$

$$\left|a_i(x-x_0)^{i-1}\right| \;=\; |a_i|\,|x-x_0|^{i-1} \;\le\; \frac{M}{|x_1-x_0|}\;\left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^{i-1}$$

$$\left|i\;a_i(x-x_0)^{i-1}\right| \;=\; i\;|a_i|\,|x-x_0|^{i-1} \;\le\; \frac{iM}{|x_1-x_0|}\;\left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^{i-1}$$

$$\left|i\;a_i(x-x_0)^{i-1}\right| \;=\; i\;|a_i|\,|x-x_0|^{i-1} \;\le\; \frac{iM}{|x_1-x_0|}\;q^{i-1} \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}\;.$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iM}{|x_1-x_0|}\;q^{i-1}$ konvergiert nach dem **Quotientenkriterium** , denn es ist

$$\frac{\dfrac{(i+1)M}{|x_1-x_0|}\;q^{i+1-1}}{\dfrac{iM}{|x_1-x_0|}\;q^{i-1}} \;=\; \frac{i+1}{i}\,q \;=\; \left(1+\frac{1}{i}\right)q \;\le\; q^* \;<\; 1 \quad \text{für fast alle} \quad i \in \mathbb{N}\;.$$

Demnach konvergiert auch die Reihe $P^*(x) \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} i\;a_i(x-x_0)^{i-1}$ für $|x-x_0| < \rho$ nach dem **Majorantenkriterium** . Wir haben damit gezeigt, dass $\rho^* \;=\; \rho$ ist.

Nach dem vorigen Satz erfüllen die Reihen

$$P(x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i \quad \text{und} \quad P^*(x) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} i\;a_i(x-x_0)^{i-1}$$

bzw. die Folgen der Partialsummen

$$P_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i \quad \text{und} \quad P_n^*(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i\;a_i(x-x_0)^{i-1}$$

die (absolute und) **gleichmäßige Konvergenz** auf jedem abgeschlossenen Intervall $[x_0-r\,;x_0+r] \subset (x_0-\rho\,;x_0+\rho)$.

Darum gilt $P'(\bar{x}) \;=\; P^*(\bar{x})$, also $P'(\bar{x}) \;=\; \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i(\bar{x}-x_0)^i\right)' \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} i\;a_i(\bar{x}-x_0)^{i-1}$.

q.e.d.

Vertauschung von Grenzprozessen

Integration von Grenzfunktionen

Satz

Die Funktionenfolge $f_n : [a;b] \dashrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und damit integrierbar. Wenn dann die Folge f_n **gleichmäßig** gegen f **konvergiert**, ist auch f integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Andere Schreibweise: $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Beweis:

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz und der Stetigkeit der f_n ist auch die Grenzfunktion f stetig und damit integrierbar.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a;b]$ gilt:

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a} .$$

Dann folgt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x) - f_n(x)\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

Das heißt aber $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

q.e.d.

Satz

Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ eine **reelle Potenzreihe** mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ und dem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist P im in jedem abgeschlossenen Intervall $[a;b] \subset (x_0-\rho; x_0+\rho)$ integrierbar, und es gilt :

$$\int_a^b P(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i\ dx \quad .$$

Beweis:

Es gibt ein $r > 0$ mit $[a;b] \subset [x_0-r; x_0+r] \subset (x_0-\rho; x_0+\rho)$. Dann ist die Potenzreihe $P(x)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_0-r; x_0+r]$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Da die Partialsummen $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i$ stetig auf $[x_0-r; x_0+r]$ sind, und die P_n gleichmäßig gegen P konvergieren, ist die Grenzfunktion $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ ebenfalls stetig.

Nach dem vorigen Satz gilt dann:

$$\int_a^b P(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b P_n(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i\ dx \quad .$$

q.e.d