Kurvendiskussion differenzierbarer Funktionen

Arno Fehringer , Dezember 2016

Intervallschachtelungsaxiom

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von Intervallen $\left[A_n, B_n\right]_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\left[A_{n+1}, B_{n+1}\right] \subseteq \left[A_n, B_n\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} B_n - A_n = 0$.

[IA] Jede Intervallschachtelung $\left[A_n, B_n\right]_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat genau ein Zentrum z .

Satz von Bolzano und Weierstraß

(1) Jede beschränkte Folge $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt H^* und H_* .

(2) Der Punkt H ist Häufungspunkt der Folge $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine gegen H konvergente Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt .

Beweis (1) :

Man zeigt zunächst die Existenz des **größten Häufungspunktes** H^* :

Es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_1 \leq a_n \leq B_1$. Setze $I_1 := \left[A_1, B_1\right]$.

Sei M die Mitte von $\left[A_1, B_1\right]$. Es gibt nur 3 mögliche Konstellationen :

I Sowohl $\left[A_1, M\right]$ und $\left[M, B_1\right]$ enthalten unendlich viele Folgenglieder von $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

II Nur $\left[M, B_1\right]$ enthält unendlich viele Folgenglieder .

III Nur $\left[A_1, M\right]$ enthält unendlich viele Folgenglieder .

In den Fällen I, II setze : $I_2 = \left[A_2, B_2\right] := \left[M, B_1\right]$.

Ansonsten setze : $I_2 = \left[A_2, B_2\right] := \left[A_1, M\right]$.

Fährt man in dieser Weise fort, erhält man eine Intervallschachtelung $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, die nach dem **Intervallschachtelungsaxiom** das Zentrum H^* hat .

Nach Konstruktion der Intervallschachtelung liegen also oberhalb jedes Intervalls I_n höchstens endlich viele Folgenglieder !

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I_{n_0} \in U_\epsilon(H^*)$. Dann enthält I_{n_0} und damit $U_\epsilon(H^*)$ unendlich viele a_n . Also ist H^* ein Häufungspunkt .

Jetzt zeigt man noch, dass H^* der größte Häufungspunkt ist :

Sei H mit $H^* < H$ ein noch größerer Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Setze : $\epsilon_0 := \dfrac{H - H^*}{2}$.

Dann sind die Umgebungen $U_{\epsilon_0}(H^*)$, $U_{\epsilon_0}(H)$ disjunkt mit $U_{\epsilon_0}(H^*) < U_{\epsilon_0}(H)$.

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} B_n - A_n = 0$ gibt es ein n_0 mit $I_{n_0} \subset U_{\epsilon_0}(H^*)$ und $I_{n_0} < U_{\epsilon_0}(H^*) < U_{\epsilon_0}(H)$.

Da nun oberhalb des Intervalls I_{n_0} höchstens endlich viele Folgenglieder liegen, kann H kein Häufungspunkt sein .

Also ist H^* der **größte Häufungspunkt** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Mit einer entsprechenden Konstruktion einer Intervallschachtelung zeigt man, die Existenz des **kleinsten Häufungspunktes** H_* .

Beweis (2) :

Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, welche gegen H konvergiere .

Sei $\epsilon > 0$ gegeben . Dann gibt es ein n_{k_0} , so dass für alle $n_k > n_{k_0}$ gilt :

$|a_{n_k} - H| < \epsilon$.

Da also fast alle Teilfolgenglieder a_{n_k} in $U_\epsilon(H)$ liegen, ist H ein Häufungspunkt der Folgen $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei nun umgekehrt H ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann heißt dies, dass jede Umgebung $U_\epsilon(H)$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält .

Man wähle nun zu $U_1(H)$ ein $a_{n_1} \in (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_1} \in U_1(H)$ und dann ein $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(H)$ mit $n_2 > n_1$, … usw. .

Für die so konstruierte Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt dann $\left|a_{n_k} - H\right| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also konvergiert die Folge $\left(a_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen H.

Satz

Jede beschränkte monotone Folge $a_n \in \mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis:

Sei die Folge a_n monoton wachsend. Nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** gibt es eine Teilfolge a_{n_k} mit $\lim\limits_{k \to -\infty} a_{n_k} = z$.

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_{k_0}, so dass gilt:

$$\left|a_{n_k} - z\right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n_k > n_{k_0} .$$

Wegen der Monotonie gilt dann :

$$\left|a_n - z\right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > n_{k_0} .$$

Beschränkte Mengen

Satz und Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \{\}$. Dann heißt eine Zahl

$s \in \mathbb{R}$ **untere Schranke** von A, falls für alle $a \in A$ gilt: $s \leq a$.

$S \in \mathbb{R}$ **obere Schranke** von A, falls für alle $a \in A$ gilt: $a \leq S$.

Das **Infimum** von A , inf A , ist die **größte untere Schranke** .

Das **Supremum** von A, sup A, ist die **kleinste obere Schranke** .

Gehören Infimum und Supremum zur Menge A heißen sie **Minimum** bzw. **Maximum**.

Jede nicht leere beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum und ein Supremum.

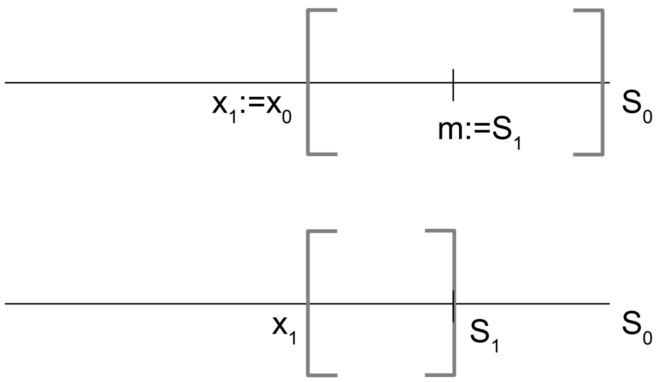
Beweis:

Sei $x_0 \in A$ und S_0 eine obere Schranke von A. Nun halbiert man das Intervall

$I_0 = [x_0;S_0]$. Die Mitte ist $m = \dfrac{x_0 + S_0}{2}$. Es können zwei Fälle auftreten:

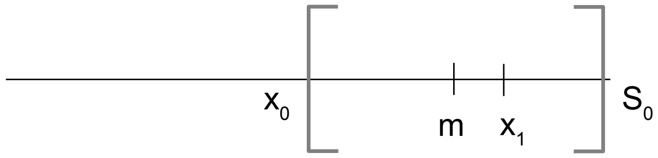
1. Fall: $A \cap (m;S_0] = \emptyset$

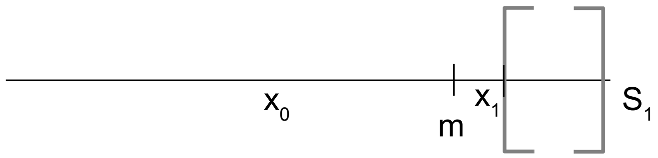
Dann ist m eine obere Schranke und wir definieren $x_1 := x_0$, $S_1 := m$ und $I_1 = [x_1;S_0]$



2. Fall: $A \cap (m;S_0] \neq \emptyset$

Dann gibt es einen Punkt $x_1 \in A$ mit $x_1 > m$. Dann definieren wir $S_1 := S_0$ und $I_1 = [x_1;S_1]$





Diese Konstruktion kann man fortsetzen, so dass man eine Intervallschachtelung $I_n = [x_n ; S_n]$ bekommt , wobei die S_n obere Schranken vom A , die $x_n \in A$ und

$$S_n - x_n \le \frac{S_0 - x_0}{2^n} \quad .$$

Die Folge der oberen Schranken S_n ist monoton fallend und ist nach dem **Satz von Bolzano und Weierstraß für monotone Folgen** konvergent gegen eine Zahl S.

Jetzt zeigt man, dass S die kleinste obere Schranke ist:

Für $x \in A$ gilt $x \le S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x \le \lim\limits_{n \to -\infty} S_n = S$. Damit ist S eine obere Schranke.

Angenommen es gäbe eine obere Schranke S‘ < S. Wegen S-S‘ > 0 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$S_n - x_n \le \frac{S_0 - x_0}{2^n} < S - S' \le S_n - S'$$

$$S_n - x_n < S_n - S' \quad .$$

$$-x_n < -S'$$

$$x_n > S'$$

Die letzte Ungleichung steht im Widerspruch dazu, dass S‘ eine obere Schranke von A ist. Das heißt, dass S die kleinste obere Schranke , also das Supremum von A ist.

Die Existenz des Infimums von A zeigt man analog.

Nullstellensatz für stetige Funktionen :

Eine stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die an den Intervallgrenzen unterschiedliche Vorzeichen hat, besitzt mindestens eine Nullstelle $x_0 \in (a,b)$.

Beweis :

Es sei zum Beispiel $f(a) < 0 < f(b)$

Setze $I_1 = [a_1, b_1] := [a,b]$. Es gilt $f(a_1) < 0 < f(b_1)$.

Für die Intervallmitte m_1 von I_1 ist dann $f(m_1) = 0$ oder $f(m_1) \neq 0$.

Falls $f(m_1) > 0$ setze $I_2 = [a_2, b_2] := [a_1, m_1]$.

Falls $f(m_1) < 0$ setze $I_2 = [a_2, b_2] := [m_1, b_1]$.

Für $I_2 = [a_2, b_2]$ gilt $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

Setzt man dieses Verfahren der Intervallhalbierung fort, so kommt man entweder zu einer Nullstelle von f oder man erhält eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n b_n]_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ und dem Zentrum x_0 .

Wegen der Stetigkeit von f gilt

$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0) \leq 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = f(x_0) \geq 0$, also $f(x_0) = 0$.

Der Fall, dass $f(b) < 0 < f(a)$ ist wird entsprechend abgehandelt .

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen :

Eine stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert z mit $f(a) < z < f(b)$, falls $f(a) < f(b)$ ist, oder jeden Wert z mit $f(b) < z < f(a)$, falls $f(b) < f(a)$ ist, an .

Beweis :

Sei zum Beispiel $f(a) < f(b)$ und sei z mit $f(a) < z < f(b)$ gegeben. Betrachte die Funktion $F = f - z$, dann ist $F(a) = f(a) - z < 0$ und $F(b) = f(b) - z > 0$, das heißt, die stetige Funktion F hat an den Intervallgrenzen unterschiedliche Vorzeichen. Nach dem Nullstellensatz gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $F(x_0) = f(x_0) - z = 0$, also $f(x_0) = z$.

Der Fall $f(b) < f(a)$ wird entsprechend abgehandelt .

Schrankensatz für stetige Funktionen :

Eine stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt .

Beweis :

Angenommen , die Funktion f ist im Intervall $I_1 = [a,b]$ nicht beschränkt. Dann gibt es mindestens eine Intervallhälfte I_2 von I_1 , in der f nicht beschränkt ist. Ebenso gibt es eine Intervallhälfte I_3 von I_2 , in der f nicht beschränkt ist. Die Fortsetzung dieser Argumentation liefert eine Intervallschachtelung $I_{n,n\in\mathbb{N}}$ mit dem Zentrum x_0 , so dass f in jedem Intervall unbeschränkt ist .

Da f stetig ist , gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, und es gibt zu der Umgebung $U_1(f(x_0))$ ein Intervall I_n mit $f(I_n) \subset U_1(f(x_0))$. Es folgt $f(x_0)-1 < f(I_n) < f(x_0)+1$, also ist f auf dem Intervall I_n doch beschränkt , was einen Widerspruch darstellt . Also ist f beschränkt .

Satz vom Maximum und Minimum für stetige Funktionen :

Eine stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt das Maximum und das Minimum an .

Beweis :

Da f beschränkt ist, existieren die kleinste obere Schranke M und die größte untere Schranke m .

Setzt man $I_1 = [a_1 b_1] := [a b]$ und halbiert das Intervall, so ist M für mindestens eine Intervallhälfte $I_2 = [a_2 b_2]$ kleinste obere Schranke .

Setzt man die Argumentation fort, so erhält man eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n b_n]_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Zentrum x_M .

Da f stetig ist, ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_M) \leq M$. Man zeigt nun, dass $f(x_M) = M$ ist .

Wäre nämlich $f(x_M) < M$, dann setze $\epsilon = \dfrac{M-f(x_M)}{2}$. Dann gibt es ein Intervall I_n mit $f(I_n) \subset U_\epsilon(f(x_M))$.

Es folgt $f(I_n) < f(x_M)+\epsilon = f(x_M) + \dfrac{M-f(x_M)}{2} = \dfrac{f(x_M)+M}{2} < M$. Also könnte M für I_n nicht die kleinste obere Schranke sein , da $\dfrac{f(x_M)+M}{2}$ eine noch kleinere wäre.

Deshalb muss $f(x_M) = M$ sein . Analog zeigt man, dass es ein x_m gibt mit $f(x_m) = m$.

Definition relativer Extrempunkte :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Falls eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ existiert mit
$f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0)$, $x \neq x_0$, heißt x_0 **relative Maximalstelle** und der Punkt $HP(x_0|f(x_0))$ **relativer Hochpunkt** .
Falls eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ existiert mit
$f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0)$, $x \neq x_0$, heißt x_0 **relative Minimalstelle** und der Punkt $HP(x_0|f(x_0))$ **relativer Tiefpunktpunkt** .
Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **relativen Extremstellen** bzw. **relativen Extrempunkten**.

Notwendige Bedingung für Extremstellen von differenzierbaren Funktionen :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x_0 eine relative Extremstelle. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis :
Sei x_0 eine relative Maximalstelle. Dann gilt für $\Delta x > 0$:

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) \geq 0$$

$$\frac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} < 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$$

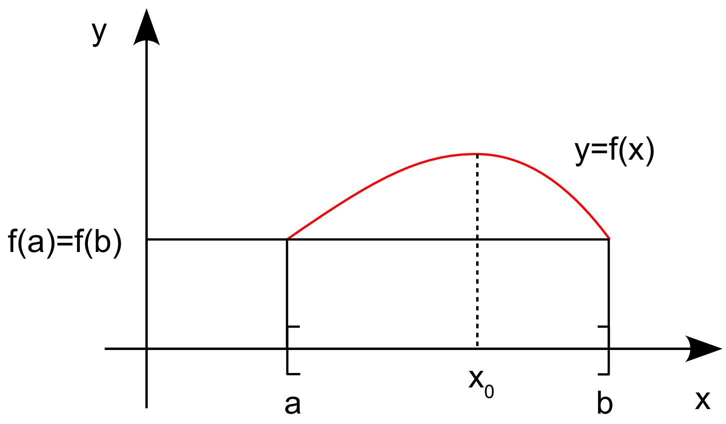
$$f'(x_0) \leq 0$$

Also folgt $f'(x_0) = 0$.

Der Beweis für eine relative Minimalstelle geht analog.

<u>Satz von Rolle</u> :

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig , $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



Beweis :

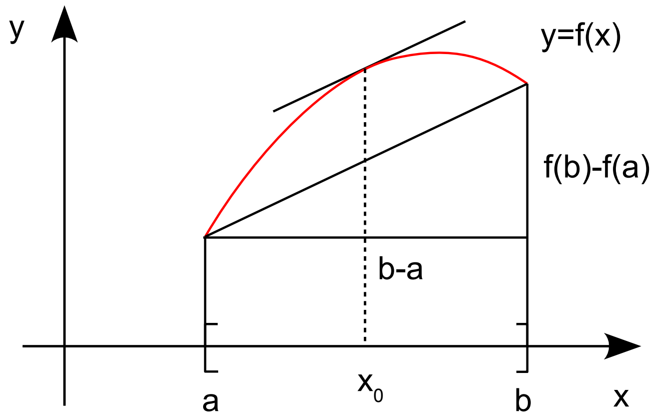
Da die Funktion f stetig auf $[a,b]$ ist, nimmt sie **Minimum** und **Maximum** an, das heißt, es existieren $x_m , x_M \in [a,b]$ mit $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ für alle $x \in [a,b]$.

Wenn f konstant ist, setzt man $x_0 = \frac{a+b}{2} \in (a,b)$, und es ist $f'(x_0) = 0$.

Wenn f nicht konstant ist, dann muss wegen $f(a) = f(b)$ für mindestens eine der Stellen x_m , x_M im Intervall (a,b) liegen. Diese Stelle setzt man gleich x_0 , und es ist $f'(x_0) = 0$.

Erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung :

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig , $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Beweis :

Betrachte die Sehne mit der Gleichung $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ und die Differenzfunktion $F(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right)$.

Dann gilt $F(a) = F(b)$ und $F'(x) = f('x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, und es gibt nach dem **Satz von Rolle** ein $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$.

Dann folgt :

$$F'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad .$$

Hinreichendes Kriterium für relative Extrema differenzierbarer Funktionen :

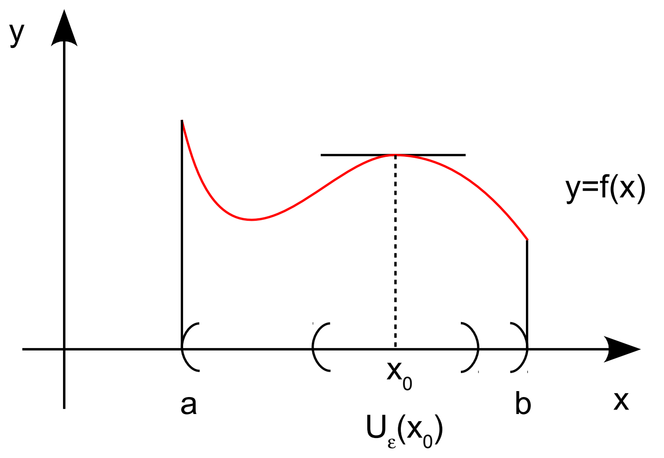
Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

(1) Falls $f'(x_0) = 0$ und eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ existiert mit

$f'(x) > 0$ für $x \in U_\epsilon(x_0)$, $x < x_0$

$f'(x) < 0$ für $x \in U_\epsilon(x_0)$, $x > x_0$,

dann ist x_0 eine **relative Maximalstelle** .

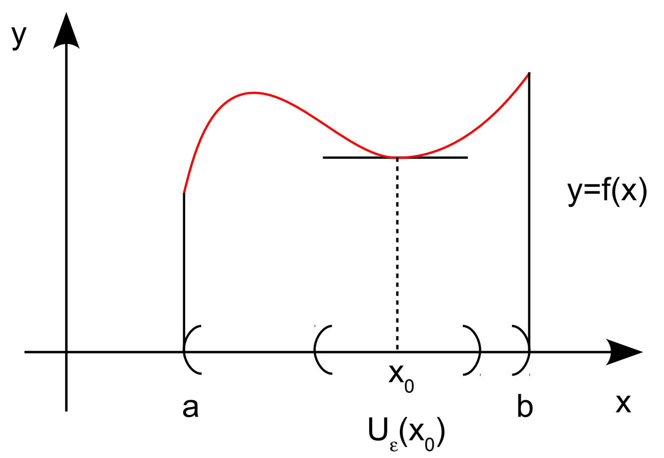


(2) Falls $f'(x_0) = 0$ und eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ existiert mit

$f'(x) < 0$ für $x \in U_\epsilon(x_0)$, $x < x_0$

$f'(x) > 0$ für $x \in U_\epsilon(x_0)$, $x > x_0$,

dann ist x_0 eine **relative Minimalstelle** .



Beweis (1) :

Sei $x_0 - \Delta x < x_0 \in U_\epsilon(x_0)$. Dann gibt es nach dem **Ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung** ein $\xi_1 \in (x_0 - \Delta x \;,\; x_0)$ mit

$$f(\xi_1) = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} > 0 \quad ,$$

also

$$\frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} > 0$$

$$f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) < 0$$

$$f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) \quad .$$

Sei $x_0 < x_0 + \Delta x \in U_\epsilon(x_0)$. Dann gibt es nach dem **Ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung** ein $\xi_2 \in (x_0 \;,\; x_0 + \Delta x)$ mit

$$f(\xi_1) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \quad ,$$

also

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad .$$

Das bedeutet, dass x_0 eine **relative Maximalstelle** ist.

Der Beweis für **(2)** geht analog .

<u>**Kurzversion des Kriteriums**</u> :

(1) Ist $f'(x_0) = 0$ und hat f' in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von + nach - , dann ist x_0 eine **relative Maximalstelle** .

(2) Ist $f'(x_0) = 0$ und hat f' in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von - nach + , dann ist x_0 eine **relative Minimalstelle** .

Definition der Monotonie :

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Funktion f heißt **monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt :

$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$.

Die Funktion f heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt :

$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$.

Die Funktion f heißt **monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt :

$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$.

Die Funktion f heißt **streng monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt :

$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$.

Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen :

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt :

$f' > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ ist **streng monoton wachsend** .

$f' < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ ist **streng monoton fallend** .

Beweis :

Sei $f' > 0$, uns sei $x_1 < x_2$.

Angenommen es ist $f(x_1) \geq f(x_2)$, also $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$. Dann gibt es nach dem **Ersten Mittelwertsatz** ein $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$, im Widerspruch zu $f' > 0$.

Also gilt $f(x_1) < f(x_2)$ und f ist **streng monoton wachsend** .

Der Beweis für $f' < 0$ geht analog .

Hinreichende Bedingungen für relative Extrema 2-mal stetig-differenzierbarer Funktionen :

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig-differenzierbare Funktion. Dann gilt :

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist **relative Maximalstelle** .

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist **relative Minimalstelle** .

Beweis :

Sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$. Da f'' stetig ist, gibt es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ mit $f''(x) < 0$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0)$.

Nach dem **Monotoniekriterium** ist f' **streng monoton fallend** auf $U_\epsilon(x_0)$.

Für $x \in (x_0-\epsilon \ , \ x_0)$ ist $f'(x) > f'(x_0) = 0$.

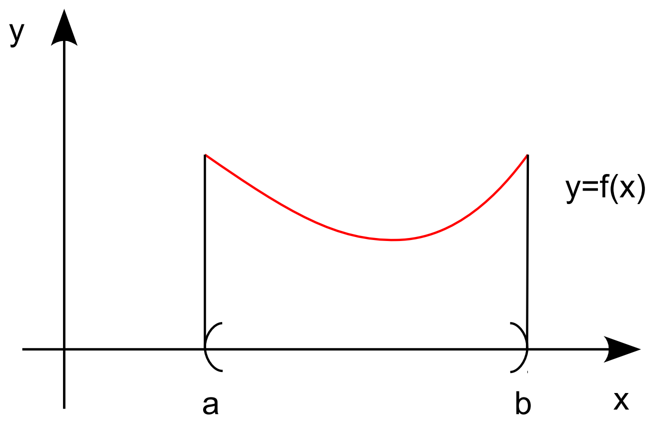
Für $x \in (x_0 \ , \ x_0+\epsilon)$ ist $0 = f'(x_0) > f'(x)$.

Also ist x_0 ist **relative Maximalstelle** .

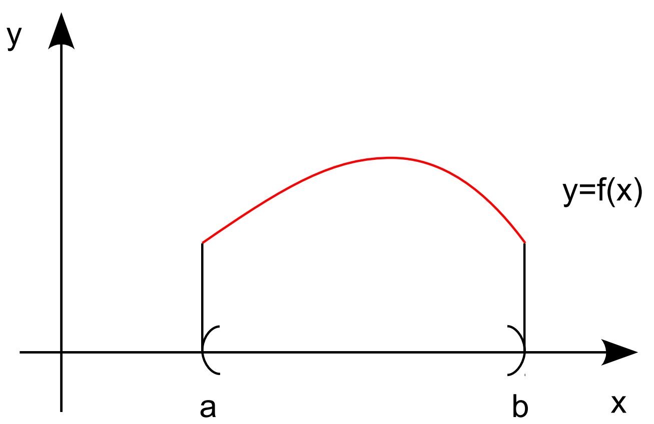
Der Beweis für den Fall, dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, geht analog .

<u>Definition der Konvexität und Konkavität differenzierbarer Funktionen</u> :

Eine differenzierbare Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex** , wenn die Ableitungsfunktion f' **monoton steigt** .



Eine differenzierbare Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konkav** , wenn die Ableitungsfunktion f' **monoton fällt** .



Definition der Wendestelle bzw. des Wendepunkts :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Es existiere eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$, so dass entweder

(1) f auf $(x_0-\epsilon, x_0)$ konvex und auf $(x_0, x_0+\epsilon)$ konkav ist

oder

(2) f auf $(x_0-\epsilon, x_0)$ konkav und auf $(x_0, x_0+\epsilon)$ konvex ist .

Dann heißt x_0 **Wendestelle** und der Punkt $WP(x_0|f(x_0))$ **Wendepunkt** .

Analoge Formulierung :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Es existiere eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$, so dass entweder

(1) f' ist auf $(x_0-\epsilon, x_0)$ **monoton steigend** und auf $(x_0, x_0+\epsilon)$ **monoton fallend**

oder

(2) f' ist auf $(x_0-\epsilon, x_0)$ **monoton fallend** und auf $(x_0, x_0+\epsilon)$ monoton **steigend**

ist .

Dann heißt x_0 **Wendestelle** und der Punkt $WP(x_0|f(x_0))$ **Wendepunkt** .

Notwendige Bedingung für Wendestellen 2-mal stetig differenzierbarer Funktionen :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar und x_0 **Wendestelle** .
Dann ist $f''(x_0) = 0$.

Beweis :
Angenommen es wäre $f''(x_0) \neq 0$, etwa $f''(x_0) > 0$, dann gäbe es eine Umgebung $U_\delta(x_0) \subset U_\epsilon(x_0)$ mit $f'' > 0$ auf $U_\delta(x_0)$, was sowohl im Widerspruch zu $f'' < 0$ auf $(x_0-\delta, x_0)$ aus **(1)** als auch zu $f'' < 0$ auf $(x_0, x_0+\delta)$ aus **(2)** stünde .

Hinreichendes Kriterium für Wendestellen 2-mal stetig differenzierbarer Funktionen :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.
Falls $f''(x_0) = 0$ und $U_\epsilon(x_0)$ existiert mit eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ existiert mit

(1) $f'' < 0$ auf $(x_0-\epsilon, x_0)$ und $f'' > 0$ auf $(x_0, x_0+\epsilon)$

oder

(2) $f'' > 0$ auf $(x_0-\epsilon, x_0)$ und $f'' < 0$ auf $(x_0, x_0+\epsilon)$,

dann ist x_0 **Wendestelle** .

Beweis :
Da f'' stetig ist, ist notwendiger Weise $f''(x_0) = 0$. Denn angenommen es wäre $f''(x_0) \neq 0$, zum Beispiel $f''(x_0) > 0$, dann gäbe es eine Umgebung $U_\delta(x_0) \subset U_\epsilon(x_0)$ mit $f'' > 0$ auf $U_\delta(x_0)$, was sowohl im Widerspruch zu $f'' < 0$ auf $(x_0-\delta, x_0)$ aus **(1)** als auch zu $f'' < 0$ auf $(x_0, x_0+\delta)$ aus **(2)** stünde .

Also muss $f''(x_0) = 0$ sein . Die Bedingungen des vorigen Kriteriums sind also erfüllt und x_0 ist **Wendestelle** .
Für den Fall, dass $f'''(x_0) < 0$ ergibt sich eine analoge Begründung .

Kurzversion des Kriteriums :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.

Ist $f''(x_0) = 0$ und hat f'' in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von - nach + oder von + nach - , dann ist x_0 eine **Wendestelle** .

Hinreichendes Kriterium für Wendestellen 3-mal stetig differenzierbarer Funktionen :

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 3-mal stetig differenzierbar.

Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 **Wendestelle** .

Beweis :

Sei $f'''(x_0) \neq 0$, etwa $f'''(x_0) > 0$. Da f''' stetig ist, gibt es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ mit $f''' > 0$ auf $U_\epsilon(x_0)$.

Nach dem **Monotoniekriterium** ist f'' streng monoton wachsend auf $U_\epsilon(x_0)$.

Für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ ist dann $f''(x) < f''(x_0) = 0$ und

für alle $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ ist dann $f''(x) > f''(x_0) = 0$.

f'' macht also auf $U_\epsilon(x_0)$ bei x_0 eine Vorzeichenwechsel von $-$ nach + , und deshalb ist x_0 **Wendestelle** .

Für den Fall, dass $f'''(x_0) < 0$ ergibt sich eine analoge Begründung .