

Approximation der Binomialverteilung $B_{n;k}(k)$ durch die Gaußfunktion

Arno Fehring , März 2017

Inhalt

Die Stirlingsche Formel	S. 2 - 17
Die Approximation der Binomialverteilung durch die Gaußfunktion	S. 18 - 24
Die Normiertheit der Gaußfunktion	S. 25 - 28

Quellen

- Büchter, A. ; Henn, H. : Elementare Stochastik, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2005
- Kössler, W. : Stochastik für Informatiker, Skript WS 2016/17, HU Berlin , [Stand 16.03.2017]
- Krengel, U. : Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Vieweg Verlag, 5. Aufl. 2000

Die Stirlingsche Formel

Es gilt die Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

Gemeint ist die **Asymptotische Gleichheit**, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$.

Speziell ist :

$$\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis :

Statt der vorgegebenen vorgegebenen Formel, kann man zu äquivalenten Formeln übergehen :

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

$$\ln(n!) \sim \ln\left(\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right)$$

$$\ln(n!) \sim \ln(\sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n})$$

$$\ln(n!) \sim \ln\left(\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)$$

$$\ln(n!) \sim \ln(\sqrt{2\pi}) + \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right) + \ln(e^{-n})$$

$$\ln(n!) \sim \ln(\sqrt{2\pi}) + \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln(n) - n$$

$$\ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \sim \ln(\sqrt{2\pi})$$

Setze $d_n := \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$

Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \ln(\sqrt{2\pi})$ ist .

Jetzt betrachtet man die Differenzenfolge

$$d_n - d_{n+1} = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n - \left(\ln((n+1)!) - \left(n + \frac{1}{2} + 1\right) \ln(n+1) + n+1\right)$$

$$d_n - d_{n+1} = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n - \ln((n+1)!) + \left(n + \frac{1}{2} + 1\right) \ln(n+1) - n - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n - \ln((n+1)!) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + \ln(n+1) - n - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \ln\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(n+1) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(n+1) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = -\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(n+1) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \left(\frac{2n+1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2(n+1)}{2n}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+1+1}{2n+1-1}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) - 1$$

Jetzt verwendet man die die **Taylorreihe für den Logarithmus** :

$$\ln^{(0)}(x) = \ln(x)$$

$$\ln^{(1)}(x) = + x^{-1}$$

$$\ln^{(2)}(x) = - x^{-2}$$

$$\ln^{(3)}(x) = + 2x^{-3}$$

$$\ln^{(4)}(x) = - 3 \cdot 2 x^{-4}$$

$$\ln^{(5)}(x) = + 4 \cdot 3 \cdot 2 x^{-5} \quad , \text{ usw.}$$

$$\ln^{(i)}(x) = (-1)^{i+1} (i-1)! x^{-i}$$

Es ist $\ln^{(0)}(1) = 0$ und $\ln^{(i)}(1) = (-1)^{i+1} (i-1)!$, so dass für die Taylorentwicklung folgt :

$$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln^{(i)}(1)}{i!} x^i$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} (i-1)!}{i!} x^i$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln^{(i)}(1)}{i!} x^i$$

$$\ln(1-x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} (i-1)!}{i!} (-x)^i$$

$$\ln(1-x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (-x)^i$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (-x)^i$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i - \frac{(-1)^{i+1}}{i} (-x)^i$$

$$\text{Es ist } \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i - \frac{(-1)^{i+1}}{i} (-x)^i = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i \text{ gerade} \\ 2 \frac{x^i}{i} & , \text{ falls } i \text{ ungerade} \end{cases} \quad , \text{ also folgt :}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i \text{ ungerade}}^{\infty} 2 \frac{x^i}{i}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}}$$

Setzt man nun $\frac{1}{2n+1} = x$ in der Gleichung der Differenzenfolge, so folgt:

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{x} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{x} \frac{1}{2} 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{x} \left(x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} \right) - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2i+1} - 1$$

$$d_n - d_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2i+1}$$

Die Rücksubstitution $x = \frac{1}{2n+1}$ ergibt:

$$d_n - d_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2i+1}$$

$$d_n - d_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}}$$

Jetzt folgen die Abschätzungen nach oben und unten für die Differenzenfolge :

$$d_n - d_{n+1} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}}$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2i}}$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^i$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^i \right)$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^i - 1 \right)$$

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^i$ ist eine **Geometrische Reihe** mit dem Faktor $\frac{1}{(2n+1)^2}$

und dem Grenzwert $\frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}}$.

Dann folgt :

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} - 1 \right)$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2 - 1} - 1 \right)$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left(\frac{(2n+1)^2 - (2n+1)^2 + 1}{(2n+1)^2 - 1} \right)$$

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(2n+1)^2 - 1} \right)$$

$$\underline{d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}}$$

Es folgt die Abschätzung nach unten :

$$d_n - d_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}}$$

$$d_n - d_{n+1} > \sum_{i=1}^1 \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}}$$

$$\underline{d_n - d_{n+1} > \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}}}$$

Insgesamt erhält man die Ungleichungskette

$$\boxed{\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}} .$$

Jetzt folgen Abschätzungen für die untere und obere Schranke :

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(4n^2 + 4n + 1)}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} = \frac{1}{3} \frac{1}{4n(n+1)+1}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} = \frac{1}{12n(n+1)+3}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} = \frac{12}{12 \cdot 12n(n+1)+36}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} = \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 12n + 36}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} > \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 12n + 24n + 13}, \quad \text{da } 24n + 13 > 36$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} > \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 14n + 13}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} > \frac{12}{(12n + 1)(12n + 13)}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} > \frac{1}{12n + 1} - \frac{1}{12n + 13}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} > \frac{1}{12n + 1} - \frac{1}{12(n+1) + 1}$$

$$\frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{3(4n^2 + 4n + 1 - 1)}$$

$$\frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{3(4n^2 + 4n)}$$

$$\frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{12n(n + 1)}$$

$$\frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n + 1)}$$

Insgesamt erhält man die Ungleichungskette

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

, speziell also

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} .$$

Jetzt folgen weitere Umformungen :

$$\begin{aligned} \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \\ -\frac{1}{12n+1} + \frac{1}{12(n+1)+1} &> -d_n + d_{n+1} > -\frac{1}{12n} + \frac{1}{12(n+1)} \\ -\frac{1}{12n} + \frac{1}{12(n+1)} < -d_n + d_{n+1} < -\frac{1}{12n+1} + \frac{1}{12(n+1)+1} \\ \left(d_n - \frac{1}{12n}\right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}\right) < 0 < \left(d_n - \frac{1}{12n+1}\right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}\right) \end{aligned}$$

Wegen

$$\left(d_n - \frac{1}{12n}\right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}\right) < 0 \text{ ist } d_n - \frac{1}{12n} < d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)} ,$$

die Folge $\left(d_n - \frac{1}{12n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ also **monoton wachsend** .

Wegen

$$0 < \left(d_n - \frac{1}{12n+1}\right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}\right) \text{ ist } d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - \frac{1}{12n+1} ,$$

die Folge $\left(d_n - \frac{1}{12n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ also **monoton fallend** .

Außerdem gilt $d_n - \frac{1}{12n} < d_n - \frac{1}{12n+1}$,

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n - \frac{1}{12n+1}\right) - \left(d_n - \frac{1}{12n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{12n+1} + \frac{1}{12n} = 0 .$$

Die Folge der Intervalle $\left[d_n - \frac{1}{12n} ; d_n - \frac{1}{12n+1}\right]_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine **Intervallschachtelung** mit dem **Zentrum** C .

Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen C :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n - \frac{1}{12n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{12n} = C + 0 = C .$$

Aus der rechten Ungleichung von $d_n - \frac{1}{12n} < C < d_n - \frac{1}{12n+1}$ folgt

$$C + \frac{1}{12n+1} < d_n , \text{ aus der linken folgt } d_n < C + \frac{1}{12n} ,$$

insgesamt also die Ungleichungsketten

$$C + \frac{1}{12n+1} < d_n < C + \frac{1}{12n}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < e^{d_n} < e^{C + \frac{1}{12n}} .$$

Wegen $d_n := \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$ folgt weiter

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < e^{\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n} < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < \frac{e^{\ln(n!)}}{e^{\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n)}} e^n < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < \frac{e^{\ln(n!)}}{e^{\ln(n) \left(n + \frac{1}{2}\right)}} e^n < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < \frac{e^{\ln(n!)}}{\left(e^{\ln(n)}\right)^{n + \frac{1}{2}}} e^n < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < \frac{n!}{n^{n + \frac{1}{2}}} e^n < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < \frac{n!}{n^n n^{\frac{1}{2}}} e^n < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < n! n^{-n} n^{-\frac{1}{2}} e^n < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < n! \frac{n^{-n}}{e^{-n}} n^{-\frac{1}{2}} < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} < n! \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} < e^{C + \frac{1}{12n}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} \left(\frac{n}{e}\right)^n n^{\frac{1}{2}} < n! < e^{C + \frac{1}{12n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n n^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{C + \frac{1}{12n+1}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} < n! < e^{C + \frac{1}{12n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

$$e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n}}$$

Jetzt muss man noch zeigen, dass $e^C = \sqrt{2\pi}$ ist !

Hilfsrechnungen :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx, \quad n \geq 2$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) dx$$

Produktintegration

$$I_n = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$u(x) := \sin^{n-1}(x), \quad v'(x) := \sin(x)$$

$$u'(x) = (n-1) \sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x), \quad v(x) = -\cos(x)$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) dx = -\sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x) \cdot (-\cos(x)) dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = -\sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x) \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x) \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x) \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) - \sin^n(x) \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n + (n-1) I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

Speziell :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2}$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4}$$

...

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \quad n \geq 1}$$

Hier bedeutet $(2n-1)!!$ das Produkt über alle ungeraden Zahlen bis $2n-1$ und $(2n)!!$ das Produkt über alle ungeraden Zahlen bis $2n$.

Analog folgt :

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot 1$$

$$\underline{I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad , \quad n \geq 1}$$

Wegen der **Monotonie der Sinusfunktion** im Intervall $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ folgt für

$$0 < x < \frac{\pi}{2} :$$

$$\sin(0) < \sin(x) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 < \sin(x) < 1$$

$$\sin^2(x) < \sin(x) < 1$$

$$\sin^3(x) < \sin^2(x) < \sin(x)$$

$$\sin^4(x) < \sin^3(x) < \sin^2(x)$$

...

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x)$$

Daraus ergeben sich Ungleichungen für die Integrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x) dx$$

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

Wegen $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ und $I_{2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$

folgt

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} = \frac{(2n-1)!! \cdot (2n+1)!!}{(2n)!!^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!^2 \cdot (2n+1)}{(2n)!!^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}}{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \frac{2n+1}{2n}$$

und weiter

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

$$1 < \frac{(2n-1)!!^2 \cdot (2n+1)}{(2n)!!^2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{2n} .$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!^2 \cdot (2n+1)}{(2n)!!^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2 \cdot (2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 \cdot (2n)!!^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^4}{((2n-1)!! \cdot (2n)!!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^4}{((2n-1)!! \cdot (2n)!!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^4}{((2n)!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n \cdot n!)^4}{((2n)!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} \cdot (n!)^4}{((2n)!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} \cdot (n!)^2 \cdot (n!)^2}{((2n)!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{4n} \cdot \frac{(n!)^2}{((2n)!)^2} \cdot (n!)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Wegen $e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n}}$ kann $n!$ wie folgt dargestellt werden :

$$n! = e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1}} e^{\alpha_n} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

$$n! = e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1} + \alpha_n} e \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

$$\underline{n! = e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{a_n} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{12n+1} + \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0}$$

$$\underline{(n!)^2 = e^{2C} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n e^{2a_n} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{12n+1} + \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.}$$

Entsprechend kann dann $(2n)!$ dargestellt werden als

$$\underline{(2n)! = e^c \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} e^{b_n} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 .}$$

Der Quotient $\frac{n!}{(2n)!}$ ist :

$$\frac{n!}{(2n)!} = \frac{e^c \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{a_n}}{e^c \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} e^{b_n}}$$

$$\frac{n!}{(2n)!} = \frac{e^c \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{a_n}}{e^c 2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2} \sqrt{n} e^{b_n}}$$

$$\frac{n!}{(2n)!} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{a_n}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2} e^{b_n}}$$

$$\frac{n!}{(2n)!} = \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{a_n - b_n}$$

$$\underline{\frac{(n!)^2}{((2n)!)^2} = \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{-2n} \frac{1}{2} e^{2(a_n - b_n)}}$$

Einsetzen der Ergebnisse in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{4n} \cdot \frac{(n!)^2}{((2n)!)^2} \cdot (n!)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{4n} \cdot \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{-2n} \frac{1}{2} e^{2(a_n - b_n)} \cdot e^{2c} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n e^{2a_n} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{4a_n - 2b_n} \cdot e^{2C} \cdot n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{4a_n - 2b_n} \cdot e^{2C} \cdot \frac{n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{4a_n - 2b_n} \cdot e^{2C} \cdot \frac{n}{2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{n} \cdot e^{-4a_n + 2b_n}$$

$$e^{2C} = \frac{\pi}{2} \cdot 4 \cdot 1$$

$$e^{2C} = 2\pi$$

$$(e^C)^2 = 2\pi$$

$$e^C = \sqrt{2\pi}$$

Dies war zu zeigen !

Es folgt nun weiter :

$$e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < e^C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n}}$$

$$\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{12n}}$$

$$e^{\frac{1}{12n+1}} < \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} < e^{\frac{1}{12n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

q.e.d.

Die Approximation der Binomialverteilung durch die Gaußfunktion

Bei einem Zufallsexperiment sei die Wahrscheinlichkeit für „Treffer“ gegeben durch p und die Wahrscheinlichkeit für „Nichttreffer“ dementsprechend durch $1-p$.

Wiederholt man das Experiment n -mal so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für k „Treffer“, $0 \leq k \leq n$, durch

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung vom Umfang n zur Wahrscheinlichkeit p** und wir mit $B_{n;p}(k)$ bezeichnet.

Man schreibt für die Wahrscheinlichkeiten auch entsprechend

$$b_{n;p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert und **Standardabweichung** sind $E = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Asymptotische Darstellung der Binomialverteilung mit Hilfe der **Stirlingschen Formel**

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} :$$

$$b_{n;p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{k} \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{n-k}} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi} \ n^n \ e^{-n} \ \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} \ k^k \ e^{-k} \ \sqrt{k} \ \sqrt{2\pi} \ (n-k)^{n-k} \ e^{-(n-k)} \ \sqrt{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi} \ n^n \ e^{-n} \ \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} \ k^k \ e^{-k-(n-k)} \ \sqrt{k} \ \sqrt{2\pi} \ (n-k)^{n-k} \ \sqrt{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi} \ n^n \ e^{-n} \ \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} \ k^k \ e^{-k-n+k} \ \sqrt{k} \ \sqrt{2\pi} \ (n-k)^{n-k} \ \sqrt{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi} \ n^n \ e^{-n} \ \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} \ k^k \ e^{-n} \ \sqrt{k} \ \sqrt{2\pi} \ (n-k)^{n-k} \ \sqrt{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{n^n \ \sqrt{n}}{k^k \ \sqrt{k} \ \sqrt{2\pi} \ (n-k)^{n-k} \ \sqrt{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k} \ \sqrt{n-k}} \frac{n^n}{k^k \ (n-k)^{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k \ (n-k)^{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^k \ n^{n-k}}{k^k \ (n-k)^{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^k}{k^k} \frac{n^{n-k}}{(n-k)^{n-k}} \ p^k (1-p)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

Das Interesse gilt nun den Werten für k , für die $\frac{k}{n}$ ungefähr p ist.

Falls $\lim_{k \rightarrow np} k = np$ folgt $\lim_{k \rightarrow np} \frac{k}{np} = 1$, also $k \sim np$, $n-k \sim n(1-p)$.

Einsetzen ergibt :

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{np \cdot n(1-p)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{np(1-p)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\underline{b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \chi(n,k)} \quad \text{mit} \quad \chi(n,k) := \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

Wie ist das Grenzverhalten von $\chi(n,k) = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$ für große n ?

Dazu ersetzt man k durch die kontinuierliche Variable nt und betrachtet die Funktion

$$\chi(t) = \left(\frac{np}{nt}\right)^{nt} \left(\frac{n(1-p)}{n-nt}\right)^{n-nt}, \text{ bzw.}$$

$$\chi(t) = \left(\frac{p}{t}\right)^{nt} \left(\frac{1-p}{1-t}\right)^{n(1-t)}.$$

Logarithmieren ergibt

$$\ln \chi(t) = \ln \left(\frac{p}{t}\right)^{nt} + \ln \left(\frac{1-p}{1-t}\right)^{n(1-t)}$$

$$\ln \chi(t) = nt \ln\left(\frac{p}{t}\right) + n(1-t) \ln\left(\frac{1-p}{1-t}\right)$$

$$\ln \chi(t) = nt \ln\left(\frac{t}{p}\right)^{-1} + n(1-t) \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right)^{-1}$$

$$\ln \chi(t) = -nt \ln\left(\frac{t}{p}\right) - n(1-t) \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right)$$

$$-\ln \chi(t) = nt \ln\left(\frac{t}{p}\right) + n(1-t) \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right)$$

$$-\ln \chi(t) = n \left(t \ln\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t) \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right) \right)$$

$$\underline{-\ln \chi(t) = n g(t)} \quad \text{mit} \quad g(t) := t \ln\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t) \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right)$$

Betrachte $g(t)$ und die Ableitungen $g'(t)$, $g''(t)$:

$$g(t) = t \ln\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t) \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right)$$

$$g'(t) = 1 \ln\left(\frac{t}{p}\right) + t \frac{1}{\frac{t}{p}} \frac{1}{p} + -1 \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right) + (1-t) \frac{1}{\frac{1-t}{1-p}} \frac{-1}{1-p}$$

$$g'(t) = \ln\left(\frac{t}{p}\right) + 1 - \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right) - 1$$

$$g'(t) = \ln\left(\frac{t}{p}\right) - \ln\left(\frac{1-t}{1-p}\right)$$

$$g''(t) = \frac{1}{\frac{t}{p}} \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1-t}{1-p}} \frac{-1}{1-p}$$

$$g''(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}$$

$$g''(t) = \frac{1-t + t}{t(1-t)}$$

$$g''(t) = \frac{1}{t(1-t)}$$

Es ist

$$g(p) = 0, \quad g'(p) = 0, \quad g''(p) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Die **Taylorformel** für $g(t)$ lautet

$$g(t) = \frac{g(p)}{0!} (t-p)^0 + \frac{g'(p)}{1!} (t-p)^1 + \frac{g''(p)}{2!} (t-p)^2 + R(t),$$

mit dem Restglied

$$R(t) = \frac{g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3 \text{ und einem gewissen } \tau = p + v(t-p), \quad v \in (0;1).$$

Speziell folgt

$$g(t) = \frac{g''(p)}{2} (t-p)^2 + \frac{g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3$$

$$g(t) = \frac{1}{2 p(1-p)} (t-p)^2 + \frac{g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3.$$

Einsetzen ergibt

$$-\ln \chi(t) = n g(t)$$

$$-\ln \chi(t) = n \left(\frac{1}{2 p(1-p)} (t-p)^2 + \frac{g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3 \right)$$

$$-\ln \chi(t) = \frac{n (t-p)^2}{2 p(1-p)} + \frac{n g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3$$

$$-\ln \chi(t) - \frac{n (t-p)^2}{2 p(1-p)} = \frac{n g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3$$

$$\left| -\ln \chi(t) - \frac{n (t-p)^2}{2 p(1-p)} \right| = \left| \frac{n g'''(\tau)}{3!} (t-p)^3 \right|$$

Unter der Annahme, dass $t \rightarrow p$, strebt die rechte Seite der Gleichung und damit auch die linke Seite gegen Null :

$$\left| -\ln \chi(t) - \frac{n(t-p)^2}{2p(1-p)} \right| \longrightarrow 0$$

$$-\ln \chi(t) - \frac{n(t-p)^2}{2p(1-p)} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(t) + \frac{n(t-p)^2}{2p(1-p)} \longrightarrow 0$$

Wegen $t = \frac{k}{n}$ und $\chi(t) = \chi(n; k)$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{n \left(\frac{k}{n} - p \right)^2}{2p(1-p)} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{n \left(\frac{k-np}{n} \right)^2}{2p(1-p)} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{\frac{1}{n} (k-np)^2}{2p(1-p)} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{(k-np)^2}{2\sigma^2} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{1}{2} \frac{(k-np)^2}{\sigma^2} \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2 \longrightarrow 0$$

$$\ln \chi(n, k) + \ln e^{\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2} \longrightarrow 0$$

$$\ln \left(\chi(n, k) e^{\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2} \right) \longrightarrow 0$$

$$\ln \left(\frac{\chi(n, k)}{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2}} \right) \longrightarrow 0$$

$$e^{\ln \left(\frac{\chi(n, k)}{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2}} \right)} \longrightarrow e^0$$

$$\frac{\chi(n, k)}{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2}} \longrightarrow 1$$

$$\chi(n, k) \sim e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2}$$

Weiter folgt :

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \chi(n, k)$$

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2}$$

$$\sigma b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sigma} \right)^2}$$

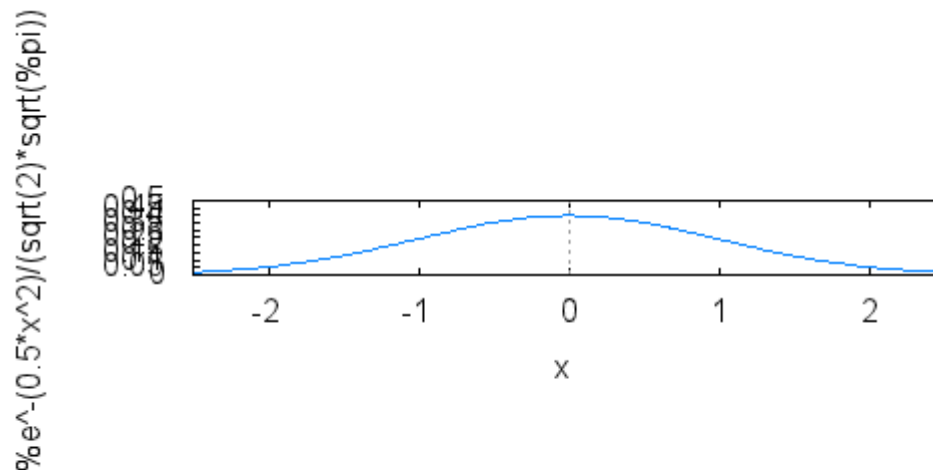
Die Funktion

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

heißt **Gaußfunktion** oder **Gaußsche Glockenkurve** .

wxMaxima 13.04.2

`wxplot2d([(1/sqrt(2*%pi))*exp(-0.5*x^2) ], [x,-2.5,2.5], [y,0,0.5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 0.1" ] )$`



Damit hat man die **asymptotische Gleichheit der Binomialverteilung**

$$b_{n;p}(k) \sim \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{k-np}{\sigma}\right) .$$

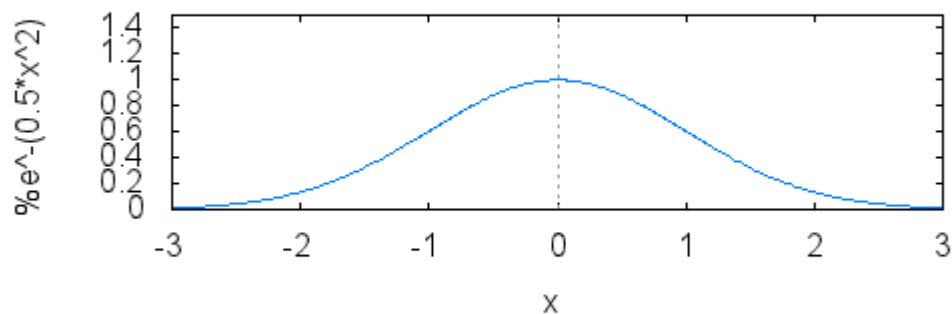
Die **Gaußfunktion** $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist **normiert**, das heißt $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$.

Beweis :

Man zeigt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$

wxMaxima 13.04.2

`wxplot2d([exp(-0.5*x^2)], [x,-3,3], [y,0,1.5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 0.25"] )$`



Hierzu betrachtet man den **Rotationskörper**, der entsteht, wenn man den Graphen der Umkehrfunktion von $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ um die y-Achse rotiert, und bestimmt man das Volumen V .

Die Umkehrfunktion von $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in [0; \infty)$, erhält man durch Umformung:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\ln y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$-2 \ln y = x^2$$

$$\sqrt{-2 \ln y} = x$$

Die Umkehrfunktion ist $x = \sqrt{-2 \ln y}$, $y \in [0; 1]$.

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy$$

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = \int_{\epsilon}^1 \pi \sqrt{-2 \ln y}^2 dy$$

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = \int_{\epsilon}^1 \pi (-2 \ln y) dy$$

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = -2\pi \int_{\epsilon}^1 \ln y dy$$

Eine Stammfunktion von $\ln y$ ist $y \ln y - y$.

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = -2\pi [y \ln y - y]_{\epsilon}^1$$

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = -2\pi [1 \ln 1 - 1 - (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)]$$

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = -2\pi [-1 - (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)]$$

$$\int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy = 2\pi [1 + (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)]$$

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \pi x^2 dy$$

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi [1 + (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)]$$

Was ist der Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}}$?

Nach der Regel von de l'Hospital erhält man :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln' \epsilon}{\left(\frac{1}{\epsilon}\right)'}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{1}{\epsilon^2}}$$

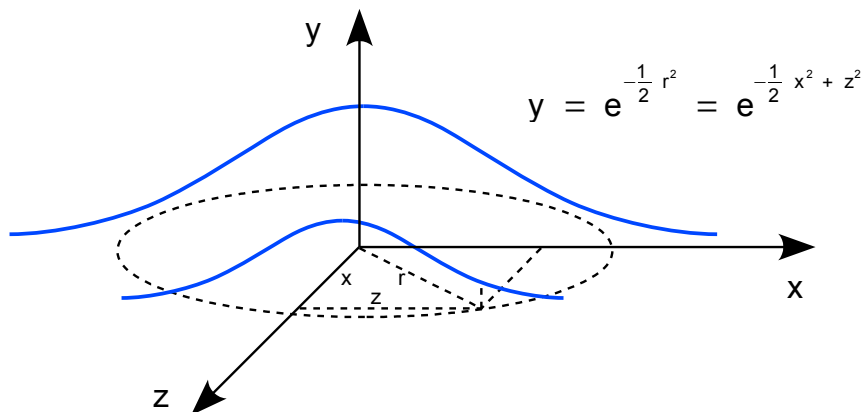
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = 0$$

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi [1 + (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)]$$

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy = 2\pi$$

Andererseits kann man das Volumen V des Rotationskörper auch über ein Doppelintegral bestimmen :



Der Rotationskörper ist durch den Graphen der Funktion $y = e^{-\frac{1}{2} x^2 + z^2}$ und die Ebene $z = 0$ begrenzt.

Das Volumen ist :

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2 + z^2} dx \right) dz$$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) dz$$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2} z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) dz$$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) dz$$

$$V = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

$$V = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right)^2$$

Jetzt vergleicht man die Volumina und erhält

$$2\pi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right)^2 ,$$

$$\underline{\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx .}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 .$$

q.e.d.