Endliche und periodische Dezimalbrüche

Arno Fehringer , Mai 2017

Quellen:

Fehringer, Arno : Grundlegendes zur Zahlentheorie (AF) , 2012 , pdf-Dokument download bei URL: http://mathematikgarten.npage.de/ [08.05.2017]

Padberg, Friedhelm : Elementare Zahlentheorie, Spektrum Akademischer Verlag , 2. Aufl. 1990

Einige nützliche Sätze zur Kongruenz und Teilbarkeit

Satz 1 (über die Division bei Kongruenzen) :

Wenn $z \cdot a \equiv z \cdot b \mod n$ und $(z;n) := ggT(z;n) = d$ gilt, dann folgt

$$a \equiv b \mod \frac{n}{d} \quad .$$

Ist speziell $(z;n) = 1$, dann folgt

$$a \equiv b \mod n \quad .$$

Beweis :

Wegen $z \cdot a \equiv z \cdot b$ gilt :

$$z \cdot a = q_a \cdot n + r$$

$$z \cdot b = q_b \cdot n + r$$

$$z \cdot (a - b) = (q_a - q_b) \cdot n \qquad | \ :d$$

$$\frac{z}{d} \cdot (a - b) = (q_a - q_b) \cdot \frac{n}{d}$$

Die linke Seite wird von $\frac{n}{d}$ geteilt, $\frac{n}{d} \mid \frac{z}{d} \cdot (a-b)$.

Da die natürlichen Zahlen $\frac{n}{d}$, $\frac{z}{d}$ teilerfremd sind , das heißt $\left(\frac{z}{d};\frac{n}{d}\right) = 1$, folgt

$$\frac{n}{d} \mid a-b \quad .$$

Es sei $a = v_a \cdot \frac{n}{d} + r_a$, $b = v_b \cdot \frac{n}{d} + r_b$,

also ist

$$a - b = (v_a - v_b) \cdot \frac{n}{d} + r_a - r_b$$, und wegen $\frac{n}{d} \mid a-b$ muss $r_a - r_b = 0$

sein, also $r_a = r_b$ und damit $a \equiv b \mod \frac{n}{d}$.

q.e.d.

Satz 2 :

$$a \equiv b \mod n \quad \Rightarrow \quad (a;n) = (b;n)$$

Beweis :

1. Fall : $n < a < b$

Man bestimmt mit dem **Euklidischen Algorithmus** jeweils die größten gemeinsamen Teiler $(a;n)$, $(b;n)$:

$a = v_1 n + r_1$ $\qquad$ $b = w n + r_1$, da $a \equiv b \mod n$

$n = v_2 r_1 + r_2$ $\quad$ ――― = ――― $\quad$ $n = v_2 r_1 + r_2$

usw. $\qquad$ usw.

Wegen der einsetzenden Zeilengleichheit liefert der Algorithmus die gleichen Ergebnisse, also $(a;n) = (b;n)$.

2. Fall : $a < n < b$

$n = v_1 a + r_1$ $\qquad$ $b = v n + a$

$a = v_2 r_1 + r_2$ $\quad$ = $\quad$ $n = v_1 a + r_1$

usw. $\qquad$ usw.

Also ist $(a;n) = (b;n)$.

3. Fall : $a < b < n$

$b = 0n + a$, da $a \equiv b \mod n$, also $b = a$, also $(a;n) = (b;n)$.

q.e.d.

Die Eulersche ϕ-Funktion

Die **Eulersche ϕ-Funktion** ordnet jeder natürlichen Zahl n die Anzahl der zu n teilerfremden vorhergehenden Zahlen zu :

$$\begin{aligned} \phi \; : \; \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \#\{\, m \mid m<n \,,\, (m;n)=1 \,\} \end{aligned}$$

Ist $n \in \mathbb{P}$ dann ist $\phi(p) = p-1$.

Beispiele :

$\phi(1) = 1 \qquad \#\{ 1 \}$

$\phi(2) = 1 \qquad \#\{ 1 \}$

$\phi(3) = 2 \qquad \#\{ 1 \,;\, 2 \}$

$\phi(4) = 2 \qquad \#\{ 1 \,;\, 3 \}$

$\phi(5) = 4 \qquad \#\{ 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \,;\, 4 \}$

$\phi(6) = 2 \qquad \#\{ 1 \,;\, 5 \}$

$\phi(7) = 6 \qquad \#\{ 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \,;\, 4 \,;\, 5 \,;\, 6 \}$

usw.

Satz 3 (Multiplikativität der Eulerschen Eulerschen ϕ-Funktion) :
Für $m,n \in \mathbb{N}$, $(m;n) = 1$ ist $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.

Beweis :
Man schreibe die Zahlen $1 , \ldots , mn$ in eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \;.\;\;.\;\;.\; & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & & n+n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & & 2n+n-1 & 3n \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ (m-n)n+1 & (m-n)n+2 & \;.\;\;.\;\;.\; & (m-n)n+n-1 & mn \end{array}$$

Es gibt $\phi(n)$ Zahlen $j < n$ mit $(j;n) = 1$

Betrachte die Zahlen in der Spalte j :

$$\begin{array}{r} j \\ n+j \\ 2n+j \\ . \\ . \\ . \\ (m-n)n+j \end{array}$$

Für alle Zahlen $in+j$ der Spalte gilt $in+j \equiv j \mod n$, und nach **Satz 2** folgt $(in+j;n) = (j;n) = 1$.

Die Teilerfremdheit zu n gilt also für alle Zahlen der Spalte j . Es gibt $\phi(n)$ solche Spalten .

Jetzt betrachtet man in der Spalte j zu $i \neq k$ die Zahlen $in+j$ und $kn+j$ und zeigt , dass $in+j \not\equiv kn+j \mod m$, $i, k \in \{0 ; ... ; m-1\}$.

Angenommen, es gälte $in+j \equiv kn+j \mod m$.

Dann folgt :

$(in+j) - (kn+j) = vm$

$in - kn = vm$

$in \equiv kn \mod m$

Wegen $(m;n) = 1$ folgt nach **Satz 1** :

$i \equiv k \mod m$

Wegen $i, k \leq m-1$ folgt $i = k$ im Widerspruch zur Voraussetzung $i \neq k$.

Also gilt $in+j \not\equiv kn+j \mod m$, $i, k \in \{0 ; ... ; m-1\}$.

Die Zahlen $in+j$, $i, \in \{0 ; ... ; m-1\}$, in der Spalte j haben als Reste bezüglich der Division durch m genau die Reste $0 ;... ; m-1$. Es gibt darunter genau $\phi(m)$ Zahlen mit $(in+j;m) = 1$, und wegen $(in+j;n) = 1$ auch $(in+j;mn) = 1$, da ja $(m;n) = 1$ ist .

Unter den Zahlen $1, \ldots, mn$ gibt es also genau $\phi(m) \cdot \phi(n)$ Zahlen $in+j$ mit $(in+j;mn) = 1$.

Nach Definition der **Eulerschen ϕ-Funktion** ist also $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.

q.e.d.

Satz 4 :

$$p \in \mathbb{P} \ , \quad n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(p^n) = (p-1)p^{n-1}$$

Beweis :

Es ist $\phi(p) = (p-1)$, da genau die Zahlen $1 ; \ldots ; p-1$ zu p teilerfremd sind .

Sei $n > 1$.

Von den p^n Zahlen $1, \ldots, p^n$ haben genau die Zahlen $p, 2p, 3p, \ldots, p^{n-1}p$ einen gemeinsamen Teiler mit p^n . Das sind p^{n-1} Zahlen.

Deshalb gibt es $p^n - p^{n-1} = (p-1)p^{n-1}$ Zahlen, die zu p^n teilerfremd sind, also ist $\phi(p^n) = (p-1)p^{n-1}$.

q.e.d.

Folgerung 1 :

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(n) = \prod_{i=1}^{s} (p-1)p_i^{\alpha_i - 1}$$

Satz 5 (Eulerscher Satz) :

Für $(a;n) = 1$ gilt : $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$

Beweis :

Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $\phi(n)$ Zahlen $r_1 ,\ldots , r_{\phi(n)} < n$ mit $(r_i;n) = 1$, $i \in \{1 ; \ldots ; \phi(n)\}$.

Wegen $(a;n) = 1$ gilt auch für die Zahlen $ar_1 , \ldots , ar_{\phi(n)}$ $(ar_i;n) = 1$, $i \in \{1 ; \ldots ; \phi(n)\}$.

Außerdem gilt $ar_i \not\equiv ar_j \mod m$, $i , j \in \{1 ; \ldots ; \phi(n)\}$, $i \neq j$!

Denn angenommen, es gelte $ar_i \equiv ar_j \mod n$.

Dann folgt wegen $(a;n) = 1$ und **Satz 1** , dass $r_i \equiv r_j \mod n$, und wegen $r_i , r_j < n$ außerdem $r_i = r_j$, also $i = j$ im Widerspruch zu $i \neq j$.

Folglich muss jetzt jede der $\phi(n)$ Zahlen $ar_1 ,\ldots , ar_{\phi(n)}$ zu genau einer der Zahlen $r_1 ,\ldots , r_{\phi(n)}$ kongruent modulo n sein .

Damit folgt :

$$ar_1 \cdot \ldots \cdot ar_{\phi(n)} \equiv r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\phi(n)} \mod n$$
$$a^{\phi(n)} r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\phi(n)} \equiv r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\phi(n)} \mod n$$

Wegen $(r_i;n) = 1$, $i \in \{1 ; \ldots ; \phi(n)\}$, ist auch $(r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\phi(n)};n) = 1$.

Die Division der Kongruenz durch $r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\phi(n)}$ ergibt nach **Satz 1** :

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$$

q.e.d.

Folgerung 2 (Kleiner Satz von Fermat) :

$p \in \mathbb{P} \;,\; (a;p) = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1 \mod p$

Folgerung 3 :

$a^p \equiv a \mod p$ für alle $a \in \mathbb{N}$

Beweis 3 :

1. Fall : $(a;p) = 1$

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$
$$a^{p-1} = v \cdot p + 1$$
$$a^p = va \cdot p + a$$
$$a^p \equiv a \mod p$$

2. Fall : $(a;p) \neq 1$, also $(a;p) = p$

$$(a;p) = p$$
$$p \mid a$$
$$a = w \cdot p$$
$$\left.\begin{array}{l} a \equiv 0 \mod p \\ a^p \equiv 0 \mod p \end{array}\right\} \quad a^p \equiv a \mod p$$

q.e.d.

Endliche Dezimalbrüche

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$$

$$3 : 8 = 0{,}375$$

$$\begin{array}{l} 3 : 8 \\ -\underline{0} \\ \boxed{3}0 \\ -\underline{24} \\ \quad\boxed{6}0 \\ \quad -\underline{56} \\ \qquad\boxed{4}0 \\ \qquad -\underline{40} \\ \qquad\quad\boxed{0} \end{array}$$

Reste < 8

Detailiertere Darstellung

$$\begin{aligned} 3 &= 0 \cdot 8 + 3 \\ 10 \cdot 3 &= 3 \cdot 8 + 6 && \mid \cdot 10^2 \\ 10 \cdot 6 &= 7 \cdot 8 + 4 && \mid \cdot 10^1 \\ 10 \cdot 4 &= 5 \cdot 8 + 0 && + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 10^2 \cdot 10 \cdot 3 && = && 10^2 \cdot 3 \cdot 8 + 10^2 \cdot 6 \\ + & 10^1 \cdot 10 \cdot 6 && && + 10^1 \cdot 7 \cdot 8 + 10^1 \cdot 4 \\ + & 10 \cdot 4 && && + 5 \cdot 8 + 0 \end{aligned}$$

Gleiche Terme werden weg gestrichen

$$\begin{aligned} & 10^2 \cdot 10 \cdot 3 && = && 10^2 \cdot 3 \cdot 8 + \cancel{10^2 \cdot 6} \\ + & \cancel{10^1 \cdot 10 \cdot 6} && && + 10^1 \cdot 7 \cdot 8 + \cancel{10^1 \cdot 4} \\ + & \cancel{10 \cdot 4} && && + 5 \cdot 8 + 0 \end{aligned}$$

$$10^3 \cdot 3 = (3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5) \cdot 8 + 0$$

Wegen $8 \nmid 3$ folgt $8 \mid 10^3$, $\boxed{10^3 \equiv 0 \mod 8}$.

$$10^3 \cdot 3 = 375 \cdot 8$$

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{10^3} = 0{,}375$$

Wegen $8 = 2^3$ und $10^3 = 2^3 5^3$, kann man auf 10^3 erweitern .

Endliche Dezimalbrüche

Für $(M;n) = 1$ betrachte $\frac{M}{n} = \left[\frac{M}{n}\right] + \frac{m}{n}$, $m < n$, $(m;n) = 1$.

Beim Divisionsalgorithmus trete nach s Schritten zum ersten Mal der Rest 0 auf.

$$m = 0 \cdot n + m$$

$$10 \cdot m = q_1 \cdot n + r_1 \qquad | \cdot 10^{s-1}$$

$$10 \cdot r_1 = q_2 \cdot n + r_2 \qquad | \cdot 10^{s-2}$$

.
.
.

$$10 \cdot r_{s-2} = q_{s-1} \cdot n + r_{s-1} \qquad | \cdot 10^{1}$$

$$10 \cdot r_{s-1} = q_s \cdot n + 0 \qquad +$$

Die Gleichungen werden multipliziert, addiert und gleiche Terme auf beiden Seiten jeweils weggestrichen, so dass folgt

$$10^s \cdot m = \left(10^{s-1}q_1 + 10^{s-2}q_2 + \ldots + q_s\right) \cdot n \quad .$$

Wegen $n \nmid m$ folgt $n \mid 10^s$, $\boxed{10^s \equiv 0 \mod n}$.

Die Aussage $n \mid 10^s$ bedeutet , dass die Primzahlzerlegung von n nur Potenzen von 2 und 5 enthalten kann .

$$\frac{m}{n} = \frac{10^{s-1}q_1 + 10^{s-2}q_2 + \ldots + q_s}{10^s}$$

$$\frac{m}{n} = 0,q_1 \ldots q_s$$

Bemerkung :

Die Zahl s ist die kleinste Zahl, so dass $10^s \equiv 0 \mod n$ gilt , und sie ist die Anzahl der Nachkommastellen der Dezimaldarstellung von $\frac{m}{n}$.

Satz :

Wenn umgekehrt die Primzahldarstellung von n nur Potenzen von 2 und 5 enthält, etwa $n = 2^s 5^t$, $\max(s,t) = s$, dann hat der Bruch $\frac{m}{n}$, $m < n$, $(m;n) = 1$, in der Dezimaldarstellung genau s Nachkommastellen .

Beweis :

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^s 5^t}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m\ 5^{s-t}}{2^s 5^t 5^{s-t}}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m\ 5^{s-t}}{2^s 5^s}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m\ 5^{s-t}}{10^s}$$

Wegen $\frac{m}{n} = \frac{m\ 5^{s-t}}{10^s} < 1$ ist auch $m\ 5^{s-t} < 10^s$ und habe die Darstellung $q_1\ \ldots\ q_s$.

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1\ \ldots\ q_s}{10^s}$$

$$\frac{m}{n} = 0{,}q_1\ \ldots\ q_s$$

q.e.d.

Reinperiodische Dezimalbrüche

Für $(M;n) = 1$ betrachte $\frac{M}{n} = \left[\frac{M}{n}\right] + \frac{m}{n}$, $m < n$, $(m;n) = 1$.

In der Primzahldarstellung von n sollen keine Potenzen von 2 und 5 vorkommen , das heißt $(n;10) = 1$.

$\frac{16}{21}$, $16 < 21$, $(16;21) = 1$, $(21;10) = 1$

$$\begin{aligned}
16 &= 0 \cdot 21 + 16 \\
10 \cdot 16 &= 7 \cdot 21 + 13 && \mid \cdot 10^5 \\
10 \cdot 13 &= 6 \cdot 21 + 4 && \mid \cdot 10^4 \\
10 \cdot 4 &= 1 \cdot 21 + 19 && \mid \cdot 10^3 \\
10 \cdot 19 &= 9 \cdot 21 + 1 && \mid \cdot 10^2 \\
10 \cdot 1 &= 0 \cdot 21 + 10 && \mid \cdot 10^1 \\
10 \cdot 10 &= 4 \cdot 21 + 16 && +
\end{aligned}$$

Danach wiederholen sich die Reste und damit die Ziffern, das heißt

$$\frac{16}{21} = 0,\overline{761904} \quad .$$

Die Gleichungen werden multipliziert, addiert und gleiche Terme auf beiden Seiten jeweils weggestrichen, so dass folgt :

$$\begin{aligned}
& 10^5 \cdot 10 \cdot 16 & = \; & 7 \cdot 10^5 \cdot 21 + \cancel{10^5 \cdot 13} \\
& + \cancel{10^4 \cdot 10 \cdot 13} & & + 6 \cdot 10^4 \cdot 21 + \cancel{10^4 \cdot 4} \\
& + \cancel{10^3 \cdot 10 \cdot 4} & & + 1 \cdot 10^3 \cdot 21 + \cancel{10^3 \cdot 19} \\
& + \cancel{10^2 \cdot 10 \cdot 19} & & + 9 \cdot 10^2 \cdot 21 + \cancel{10^2 \cdot 1} \\
& + \cancel{10^1 \cdot 10 \cdot 1} & & + 0 \cdot 10^1 \cdot 21 + \cancel{10^1 \cdot 10} \\
& + \cancel{10 \cdot 10} & & + 4 \cdot 21 + 16
\end{aligned}$$

$$10^6 \cdot 16 = (7 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4) \cdot 21 + 16$$

$$10^6 \cdot 16 - 16 = (7 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4) \cdot 21$$

$$(10^6 - 1) \cdot 16 = 761904 \cdot 21$$

Wegen $21 \nmid 16$ folgt $21 \mid 10^6 - 1$, also $\boxed{10^6 \equiv 1 \mod 21}$.

$$\frac{16}{21} = \frac{761904}{10^6 - 1}$$

$$\frac{16}{21} = \frac{761904}{999999}$$

Reinperiodische Dezimalbrüche

Für $(M;n) = 1$ betrachte $\frac{M}{n} = \left[\frac{M}{n}\right] + \frac{m}{n}$, $m < n$, $(m;n) = 1$.

In der Primzahldarstellung von n sollen keine Potenzen von 2 und 5 vorkommen , das heißt $(n;10) = 1$.

$$\begin{aligned}
m &= 0 \cdot n + m \\
10 \cdot m &= q_1 \cdot n + r_1 && \mid \cdot 10^{5-1} \\
10 \cdot r_1 &= q_2 \cdot n + r_2 && \mid \cdot 10^{s-2} \\
&\vdots \\
10 \cdot r_{s-2} &= q_{s-1} \cdot n + r_{s-1} && \mid \cdot 10^{1} \\
10 \cdot r_{s-1} &= q_s \cdot n + m && +
\end{aligned}$$

Nach s Schritten tritt erstmals wieder der Rest m auf !

Denn angenommen, es gäbe $1 \leq i < j \leq s$ mit $r_i = r_j$, das heißt, es gäbe einen ersten Rest r_i , der sich erstmals nach j Schritten wiederholte, dann folgte :

$$\begin{aligned}
10 \cdot r_{i-1} &= q_i \cdot n + r_i \\
10 \cdot r_{j-1} &= q_j \cdot n + r_j \\
10 \cdot (r_{i-1} - r_{j-1}) &= (q_i - q_j) \cdot n
\end{aligned}$$

Wegen $(n;10) = 1$ folgt $n \mid r_{i-1} - r_{j-1}$.

Wegen f $1 < r_i , r_j < n$ olgt $r_{i-1} - r_{j-1} = 0$, also $r_{i-1} = r_{j-1}$.

Es wäre also r_{i-1} der erste Rest, der sich bereits nach $j-1$ Schritten wiederholte im Widerspruch zur Annahme .

Der Rest m ist also der erste Rest, der sich erstmals nach s Schritten wiederholt .

Mit den Resten wiederholen sich auch die Ziffern , das heißt

$$\frac{m}{n} = 0,\overline{q_1 q_2 \; . \; . \; . q_s}$$

Die Gleichungen werden multipliziert, addiert und gleiche Terme auf beiden Seiten jeweils weggestrichen, so dass folgt :

$$
\begin{array}{rcl}
10^{s-1} \cdot 10 \cdot m & = & q_1 \cdot 10^{s-1} \cdot n + \cancel{10^{s-1} \cdot r_1} \\
+ \cancel{10^{s-2} \cdot 10 \cdot r_1} & & + \; q_2 \cdot 10^{s-2} \cdot n + \cancel{10^{s-2} \cdot r_2} \\
 & \vdots & \\
+ \cancel{10^{1} \cdot 10 \cdot r_{s-2}} & & + \; q_{s-1} \cdot 10^{1} \cdot n + \cancel{10^{1} \cdot r_{s-1}} \\
+ \cancel{10 \cdot r_{s-1}} & & + \; q_s \cdot n + m
\end{array}
$$

$$10^s \cdot m = (q_1 \cdot 10^5 + q_2 \cdot 10^4 + \ldots + q_s) \cdot n + m$$

$$(10^s - 1) \cdot m = q_1 q_2 \ldots q_s \cdot n$$

Wegen $n \nmid m$ folgt $n \nmid 10^s - 1$, also

$$\boxed{10^s \equiv 1 \mod n}$$

Aus der Umformung der Gleichung erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1 q_2 \ . \ . \ . \ q_s}{10^s - 1}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1 q_2 \ . \ . \ . \ q_s}{9 \ 9 \ . \ . \ . \ 9}$$

Die Periodenlänge bei reinperiodischen Dezimalbrüchen

Für $(m;n) = 1$, $m < n$, $(n;10) = 1$ ist $\frac{m}{n} = 0,\overline{q_1 q_2 \ . \ . \ . q_s}$, wobei s die kleinste Zahl ist, so dass beim Divisionsalgorithmus gilt $r_s = m$, dass sich also der Rest m erstmals nach s Schritten wiederholt .

Außerdem gilt $10^s \equiv 1 \mod n$.

Nach **Satz 5 (Eulerscher Satz)** gilt ebenfalls
$10^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Da s die kleinste derartige Zahl ist, gilt sicher $s \leq \phi(n)$.

Weiter ist

$$\phi(n) = q \cdot s + r$$
$$10^{\phi(n)} = 10^{q \cdot s + r}$$
$$10^{\phi(n)} = \left(10^s\right)^q \cdot 10^r$$

Wegen $10^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$ und $10^s \equiv 1 \mod n$ ist $\left(10^s\right)^q \equiv 1 \mod n$ und deshalb muss $10^r \equiv 1 \mod n$ sein .

Weil $r < s$ und s minimal folgt $r = 0$, also $\phi(n) = q \cdot s$, und damit $s \mid \phi(n)$.

Damit hat man gezeigt :

Die Periodenlänge s des Bruches $\frac{m}{n} = 0,\overline{q_1 q_2 \ . \ . \ . q_s}$ ist ein Teiler der **Eulerschen ϕ-Funktion** .

Beispiel :

Der Bruch $\frac{16}{21} = 0,\overline{761904}$ hat die Periodenlänge $s = 6$.

$\phi(21) = \phi(3 \cdot 7) = \phi(3) \cdot \phi(7) = (3-1)\cdot(7-1)$

$\phi(21) = 12$

$6 \mid 12$

$\frac{1}{n}$	Periodenlänge s	$\phi(n)$
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$	1	2
$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$	6	12
$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$	1	6
$\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$	2	10
$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$	6	12
$\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}$	16	16
$\frac{1}{19} = 0,\overline{052631578947368421}$	18	18
$\frac{1}{21} = 0,\overline{761904}$	6	12
$\frac{1}{23} = 0,\overline{0434782608695652173913}$	22	22
$\frac{1}{27} = 0,\overline{037}$	3	18

Gemischtperiodische Dezimalbrüche

Für $(M;N) = 1$ betrachte $\frac{M}{N} = \left[\frac{M}{N}\right] + \frac{m}{N}$ mit $m < N$, $(m;N) = 1$, $(N;10) > 1$.

In der Primzahldarstellung von n können also Potenzen von 2 und 5 vorkommen , etwa $N = 2^{\alpha}5^{\beta}n$, α , β nicht beide gleich Null, $(n;10) = 1$.

1. Fall : $\alpha = \beta$

$$\frac{m}{N} = \frac{m}{2^{\alpha}5^{\alpha}n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} < 2^{\alpha}5^{\alpha} \; , \; \left[\frac{m}{n}\right] < 2^{\alpha}5^{\alpha} = 10^{\alpha}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{m}{10^{\alpha}n}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^{\alpha}}\frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^{\alpha}}\left(\left[\frac{m}{n}\right] + \frac{m'}{n}\right) \quad , \quad m' < n \; , \; (m';n) = 1$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^{\alpha}}\left(\left[\frac{m}{n}\right] + 0,\overline{q_1 q_2 \; . \; . \; . q_s}\right)$$

$$\frac{m}{N} = \frac{\left[\frac{m}{n}\right]}{10^{\alpha}} + \frac{1}{10^{\alpha}}\, 0,\overline{q_1 q_2 \; . \; . \; . q_s}$$

$$\frac{m}{N} = 0,\ a_1 \; . \; . \; . \; a_{\alpha} + 0,0 \; . \; . \; . \; 0\ \overline{q_1 q_2 \; . \; . \; . q_s}$$

$$\frac{m}{N} = 0,\ a_1 \; . \; . \; . \; a_{\alpha}\ \overline{q_1 q_2 \; . \; . \; . q_s}$$

2. Fall : $\alpha \neq \beta$, etwa $\alpha > \beta$

$$\frac{m}{N} = \frac{m}{2^{\alpha}5^{\beta}n} < 1$$

$$\frac{m}{N} = \frac{m\ 5^{\alpha-\beta}}{2^{\alpha}5^{\beta}5^{\alpha-\beta}n} < 1$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^{\alpha}}\ \frac{m\ 5^{\alpha-\beta}}{n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m\ 10^{\alpha-\beta}}{n} < 10^{\alpha} \quad , \quad \left[\frac{m\ 10^{\alpha-\beta}}{n}\right] < 10^{\alpha}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^{\alpha}}\left(\left[\frac{m\ 5^{\alpha-\beta}}{n}\right] + \frac{m'}{n}\right) \quad , \quad m' < n \quad , \quad (m';n) = 1$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^{\alpha}}\left(\left[\frac{m\ 5^{\alpha-\beta}}{n}\right] + 0,\overline{q_1 q_2\ .\ .\ .q_s}\right)$$

$$\frac{m}{N} = \frac{\left[\frac{m\ 5^{\alpha-\beta}}{n}\right]}{10^{\alpha}} + \frac{1}{10^{\alpha}}\ 0,\overline{q_1 q_2\ .\ .\ .q_s}$$

$$\frac{m}{N} = 0,\ a_1\ .\ .\ .\ a_{\alpha} + 0,\ 0\ .\ .\ .\ 0\ \overline{q_1 q_2\ .\ .\ .q_s}$$

$$\frac{m}{N} = 0,\ a_1\ .\ .\ .\ a_{\alpha}\ \overline{q_1 q_2\ .\ .\ .q_s}$$

3. Fall : $\alpha \neq \beta$, $\beta > \alpha$

Die Behandlung ist analog zum 2. Fall .

Beispiel :

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{2^1 5^4 7}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1 \cdot 2^3}{2^4 5^4 7}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1 \cdot 2^3}{10^4 7}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^4} \; \frac{1 \cdot 2^3}{7}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^4} \; \frac{8}{7}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^4} \left(1 + \frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^4} \; \frac{1}{7}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^4} \; \overline{0{,}142857}$$

$$\frac{m}{N} = 0{,}0001 + 0{,}0000\overline{142857}$$

$$\frac{m}{N} = 0{,}0001\overline{142857}$$