04
Integralrechnung

Arno Fehringer

Potenzsummen

$$1 + ... + 1 = k$$

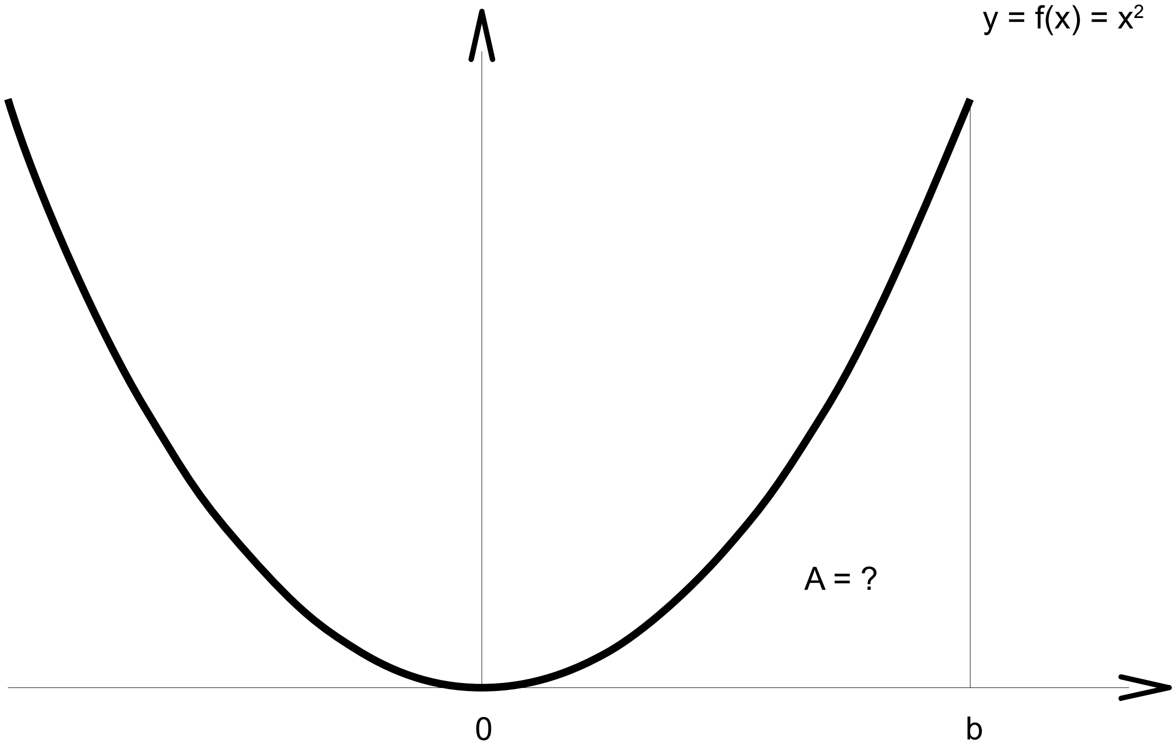
$$1 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$$

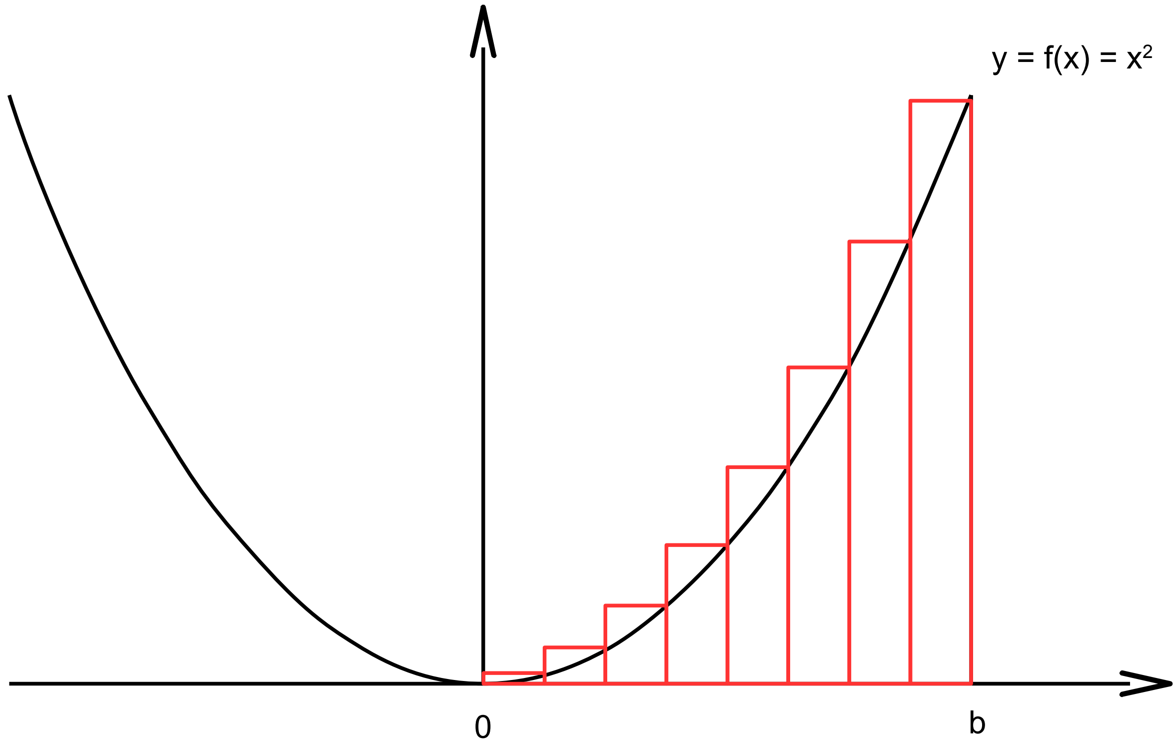
$$1^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$$

$$1^3 + ... + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2$$

$$1^4 + ... + k^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{2} = \frac{1}{5}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{30}k$$

Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x) = x^2$ von 0 bis b





Die Zerlegung des Intervalls [0 ; b] in 2^n Teilintervalle der Breite $\frac{b}{2^n}$ liefert die Stellen

$0=1\frac{b}{2^n}$, ... , $2^n\frac{b}{2^n}=b$ und eine Überdeckung der Fläche durch 2^n Rechtecke.

Annäherung von oben:
Die 2^n - te Näherung von oben für den Flächeninhalt erhält man, indem man die Flächeninhalte der Rechtecke aufsummiert:

$$\overline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\left(1\frac{b}{2^n}\right)^2 + ... + \frac{b}{2^n}\left(2^n\frac{b}{2^n}\right)^2$$

$$\overline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\left[\left(1\frac{b}{2^n}\right)^2 + ... + \left(2^n\frac{b}{2^n}\right)^2\right]$$

$$\overline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\left[1^2\frac{b^2}{(2^n)^2} + ... + (2^n)^2\frac{b^2}{(2^n)^2}\right]$$

$$\overline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\frac{b^2}{(2^n)^2}\left[1^2 + ... + (2^n)^2\right]$$

$$\overline{A_{2^n}} = \frac{b^3}{(2^n)^3}\left[1^2 + ... + (2^n)^2\right]$$

Setzt man vorübergehend $k := 2^n$, so erhält man:

$$\overline{A_k} = \frac{b^3}{k^3}\left[1^2 + \dots + k^2\right]$$

Die in Klammer stehende Summe der ersten k Quadratzahlen kann man wie folgt schreiben:

$$1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$$

Nun erhält man

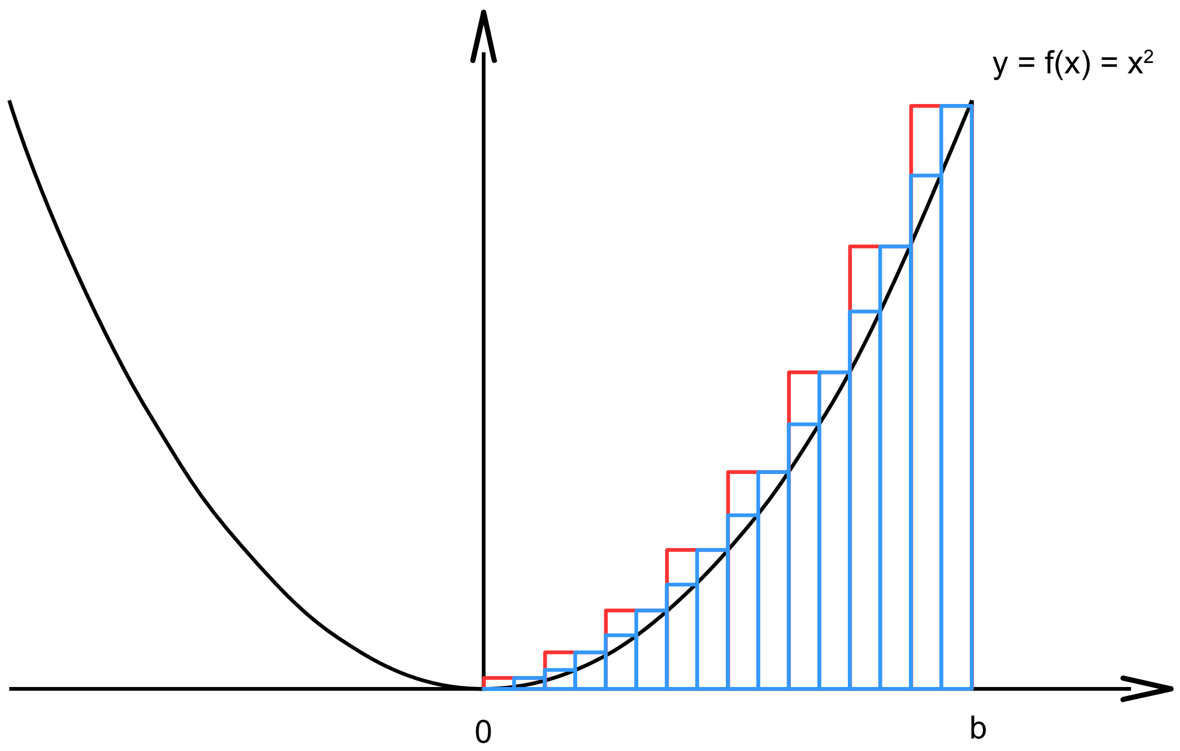
$$\overline{A_k} = \frac{b^3}{k^3}\left(\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k\right)$$

$$\overline{A_k} = b^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{k} + \frac{1}{6}\frac{1}{k^2}\right)$$

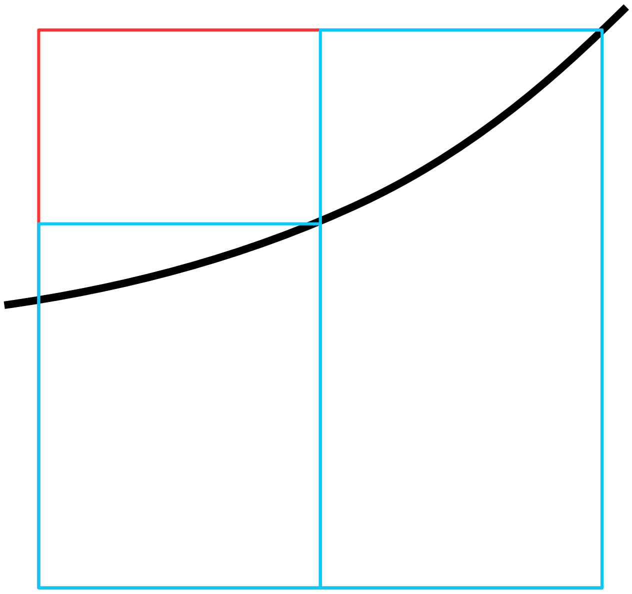
Hier sieht man schon, dass der Grenzwert für $k \to \infty$ gleich

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A_k} = \frac{1}{3}b^3$$

Die Folge $\overline{A_k}$ ist monoton fallend, das heißt $\overline{A_{2^{n+1}}} < \overline{A_{2^n}}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$:



Betrachten wir für $i \in \{1,...,k=2^n\}$ in der k-ten Stufe der Näherung die entsprechende Rechteckfläche:



$(i-1)\frac{b}{2^n}$ $\qquad$ $2i-1\frac{b}{2^{n+1}}$ $\qquad$ $i\frac{b}{2^n}$

$(2i-2)\frac{b}{2^{n+1}}$ $\qquad$ $2i\frac{b}{2^{n+1}}$

Jetzt folgt die Abschätzung gegenüber den beiden Rechteckflächen der k+1 -ten Stufe:

$$\frac{b}{2^n}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2 = \frac{b}{2^{n+1}}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2 + \frac{b}{2^{n+1}}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2$$

$$\frac{b}{2^n}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2 = \frac{b}{2^{n+1}}\left(2i\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2 + \frac{b}{2^{n+1}}\left(2i\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2$$

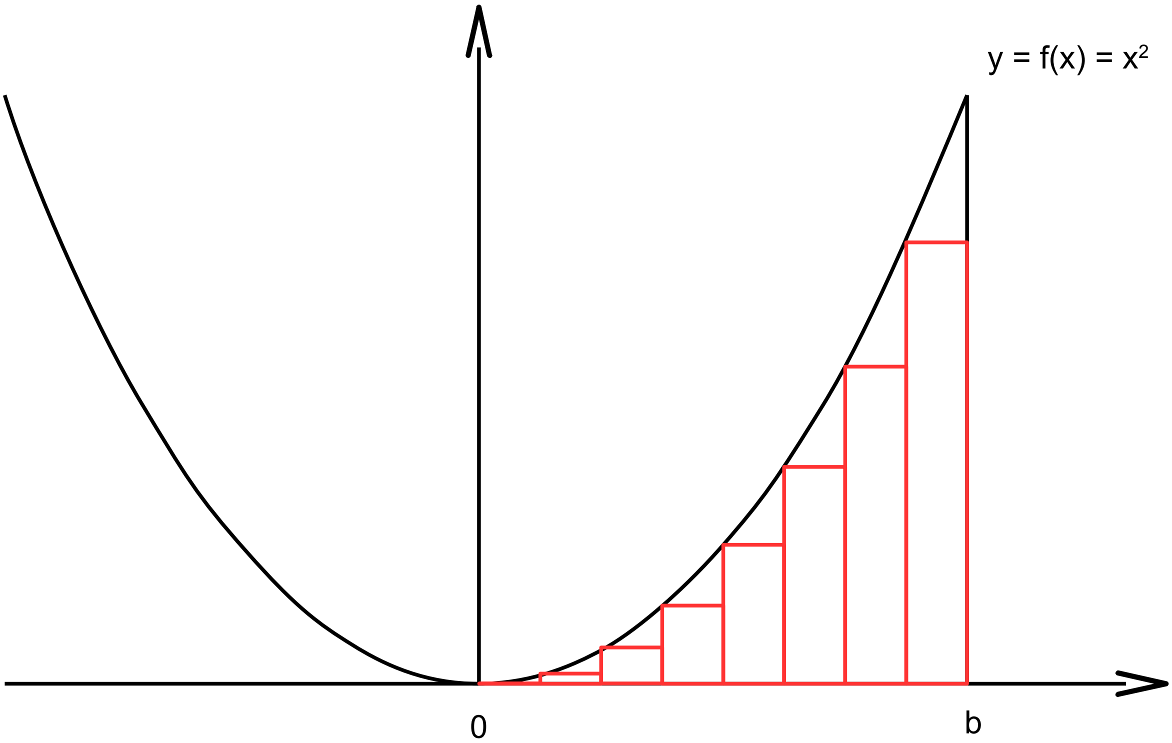
$$\frac{b}{2^n}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2 > \frac{b}{2^{n+1}}\left((2i-1)\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2 + \frac{b}{2^{n+1}}\left(2i\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2^n}\frac{b}{2^n}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2 > \sum_{i=1}^{2^n}\frac{b}{2^{n+1}}\left((2i-1)\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2 + \frac{b}{2^{n+1}}\left(2i\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2^n}\frac{b}{2^n}\left(i\frac{b}{2^n}\right)^2 > \sum_{j=1}^{2^{n+1}}\frac{b}{2^{n+1}}\left(j\frac{b}{2^{n+1}}\right)^2$$

$$\overline{A_{2^n}} > \overline{A_{2^{n+1}}}$$

Annäherung von unten:
Die 2^n - te Näherung von unten für den Flächeninhalt erhält man, indem man die Flächeninhalte der entsprechenden Rechtecke aufsummiert:



$$\underline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\left(1\frac{b}{2^n}\right)^2 + \;....\; + \frac{b}{2^n}\left((2^n-1)\frac{b}{2^n}\right)^2$$

$$\underline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\left[\left(1\frac{b}{2^n}\right)^2 + \;....\; + \left((2^n-1)\frac{b}{2^n}\right)^2\right]$$

$$\underline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\left[1^2\frac{b^2}{(2^n)^2} + \;....\; + (2^n-1)^2\frac{b^2}{(2^n)^2}\right]$$

$$\underline{A_{2^n}} = \frac{b}{2^n}\frac{b^2}{(2^n)^2}\left[1^2 + \;....\; + (2^n-1)^2\right]$$

$$\underline{A_{2^n}} = \frac{b^3}{(2^n)^3}\left[1^2 + \;....\; + (2^n-1)^2\right]$$

Setzt man wieder vorübergehend $k := 2^n$, so erhält man:

$$\underline{A_k} = \frac{b^3}{k^3}\left[1^2 + \;....\; + (k-1)^2\right]$$

Die Summe der ersten k-1 Quadratzahlen kann man wie folgt schreiben:

$$1^2 + ... + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(2(k-1)+1)}{6}$$

$$1^2 + ... + (k-1)^2 = \frac{(k^2-k)(2k-1)}{6}$$

$$1^2 + ... + (k-1)^2 = \frac{2k^3-3k^2+k}{6}$$

$$1^2 + ... + (k-1)^2 = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$$

Nun erhält man

$$\underline{A}_k = \frac{b^3}{k^3}\left(\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k\right)$$

$$\underline{A}_k = b^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{k} + \frac{1}{6}\frac{1}{k^2}\right)$$

Auch hier sieht man, dass der Grenzwert für $k \to \infty$ gleich

$$\lim_{k\to\infty} \underline{A}_k = \frac{1}{3}b^3 \quad \text{ist.}$$

Die Folge $\underline{A}_k$ ist monoton steigend, das heißt $\underline{A}_{2^{n+1}} < \underline{A}_{2^{n+1}}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, was man analog zeigen kann, und es es gilt

$$\underline{A}_{2^n} < \overline{A}_{2^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

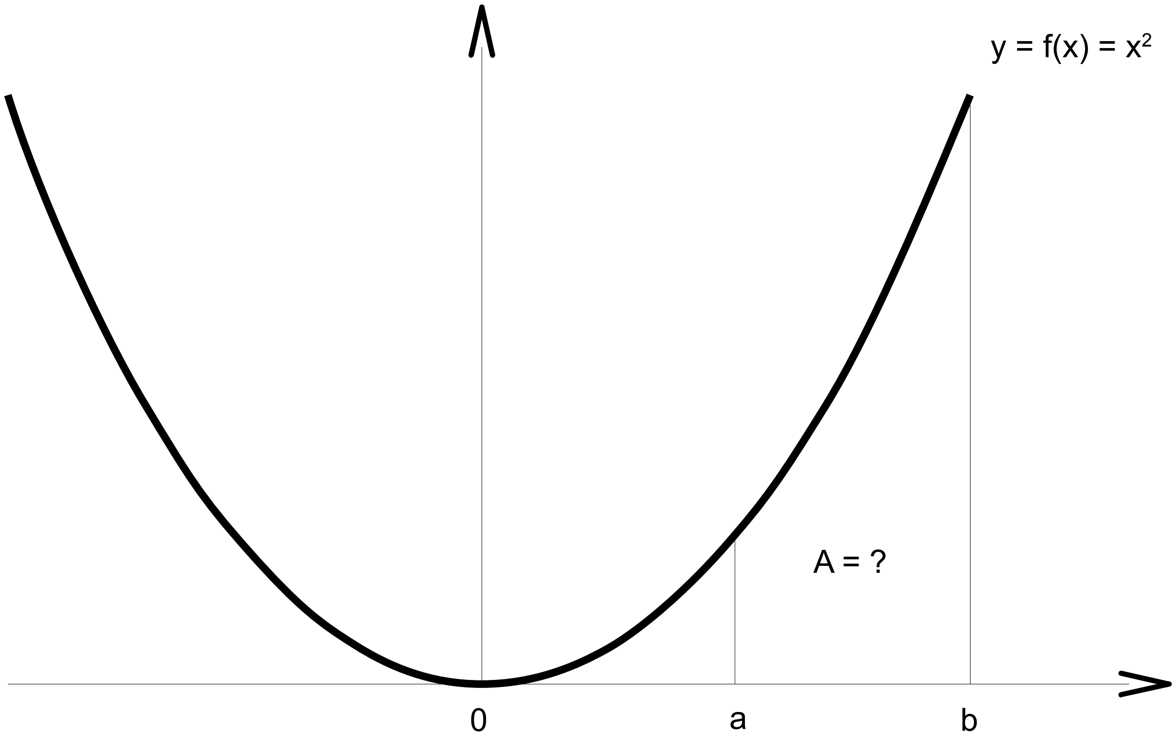
Wir haben also für den gesuchten Flächeninhalt A unter der Kurve eine Intervallschachtelung $[\underline{A}_{2^n};\ \overline{A}_{2^n}]$ vorliegen, das heißt

$$\underline{A}_{2^n} < A < \overline{A}_{2^n} .$$

Der Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x) = x^2$ von 0 bis b ist:

$$\boxed{A = \frac{1}{3}b^3}$$

Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x) = x^2$ von a bis b



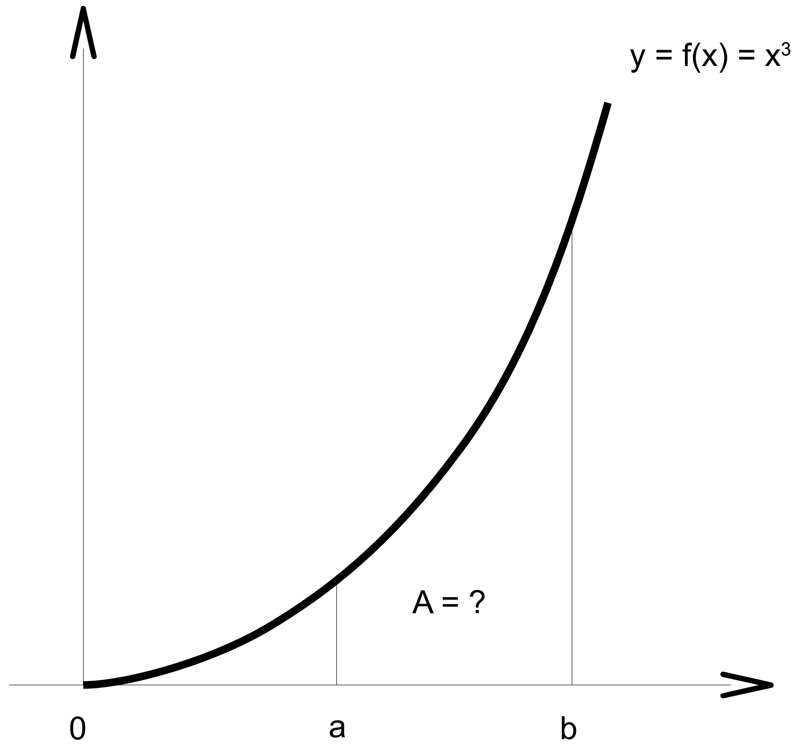
$$A = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$$

Schreib- und Sprechweise:

$$\boxed{\int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3}$$

„ Integral a b von x^2 de ix “

Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x) = x^3$ von a bis b



Entsprechende Überlegungen zusammen mit der Formel für die ersten k Kubikzahlen

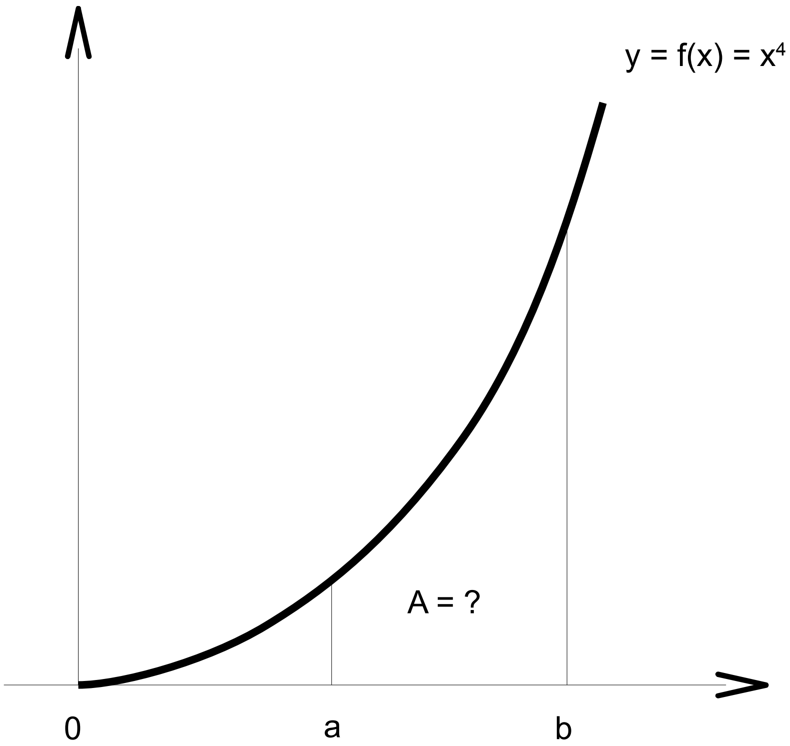
$$1^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2$$

ergibt:

$$A = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$$

$$\boxed{\int_a^b x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_a^b = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4}$$

<u>Flächeninhalt unter der Kurve</u> $y = f(x) = x^4$ von a bis b



Entsprechende Überlegungen zusammen mit der Formel

$$1^4 + \,....\, + k^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{2} = \frac{1}{5}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{30}k$$

ergibt:

$$A = \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{5}a^5$$

$$\boxed{\int_a^b x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5 \Big|_a^b = \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{5}a^5}$$

Vorläufiges Ergebnis und Vermutung

Für i = 2, 3, 4 gilt:

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} b^{n+1} - \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

Vermutung:

Hält man die obere Integrationsgrenze variabel, etwa durch x_0 , so ergibt sich

$$\int_a^{x_0} x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x_0^{n+1} \Big|_a^{x_0} = \frac{1}{n+1} x_0^{n+1} - \frac{1}{n+1} a^{n+1} ,$$

und es leuchtet ein Zusammenhang zwischen der Integrandenfunktion f und der Flächenfunktion heraus, dass nämlich die **Ableitung der Flächenfunktion an der Stelle x_0 gleich der Integrandenfunktion an der Stelle x_0** ist.

Allgemein:

$$\int_a^{x_0} f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^{x_0} = F(x_0) - F(a) \qquad \Rightarrow \qquad F'(x_0) = f(x_0)$$

Der Beweis, dass die Vermutung richtig ist, folgt später.

Stetige Funktionen

Bevor wir den Zusammenhang zwischen Integranden- und Flächenfunktion näher untersuchen, betrachten wir stetige Funktionen und erinnern an die

Definition
Eine Funktion $f : [a; b] \longrightarrow IR$ heißt **stetig in** $\mathbf{x} \in [a;b]$, wenn gilt:

Für alle Folgen x_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Man schreibt auch kurz $\lim\limits_{\bar{x}\to x} f(\bar{x}) = f(x)$. Die Funktion heißt **stetig**, wenn sie in jedem $x \in [a;b]$ stetig ist.

Satz
Gegeben sei eine Funktion $f : [a; b] \longrightarrow IR$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig in x.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1)

Sei x_n eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt:

$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Angenommen es gäbe ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x(\delta)$ existiert mit

$| x(\delta) - x | < \delta$, aber $| f(x(\delta)) - f(x) | \geq \varepsilon_0$. Falls nun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq n_0$, aber $| f(x_n) - f(x) | \geq \varepsilon_0$.

Das heißt aber, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$, im Widerspruch zur Stetigkeit von f.

q.e.d.

Satz

Sei $f : [a; b] \text{----------}> \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f sogar **gleichmäßig stetig**. Das heißt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a; b]$ gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon .$$

Beweis:

Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ Werte $x(\delta)$, $y(\delta)$ existierten , mit

$$| x(\delta) - y(\delta) | < \delta , \quad \text{aber} \quad | f(x(\delta)) - f(y(\delta)) | \geq \varepsilon_0 .$$

Speziell würden für $\delta = \frac{1}{n}$ Folgen x_n , y_n existieren mit $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Nach dem **Satz von Bolzano – Weierstraß** gäbe es eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Wegen $|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n}$ gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x$ und

$$|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0 .$$

Wegen der Stetigkeit von f ist aber $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x)$,

also $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}) = 0$ im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0$.

q.e.d.

Integrierbarkeit stetiger (positiver) Funktionen

Sei f : [a; b] -------> IR stetig und $f \geq 0$. Dann existiert für jedes $x_0 \in [a;b]$

das Integral $\int_a^{x_0} f(x)\ dx$, und damit

die Flächeninhaltsfunktion (**Integralfunktion**) F : [a; b] -------> IR mit

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)\ dx \quad .$$

Beweis:

Die Vorgehensweise ist analog zu der bei den Polynomfunktionen x^2 , x^3 , x^4 durchgeführten. Die Ober- und Untersummen der 2^n – ten Näherung des Flächeninhalts legt man wie folgt fest:

$$\overline{A_{2^n}} = \sum_{j=1}^{2^n} f(\overline{x_j})\ \frac{x_0-a}{2^n} \quad , \quad \underline{A_{2^n}} = \sum_{j=1}^{2^n} f(\underline{x_j})\ \frac{x_0-a}{2^n}$$

Hierbei bedeuten die Stellen $\overline{x_j}$, $\underline{x_j}$ Maximal- bzw. Minimalstelle im Intervall $I_j = \left[(j-1)\frac{x_0-a}{2^n} \ ; \ j\frac{x_0-a}{2^n}\right]$, welche von der stetigen Funktion auch angenommen werden.

Wir zeigen zuerst, dass die **Obersummen** $\overline{A_{2^n}}$ **eine monoton fallende Folge** darstellt. Die Begründung dafür, dass die **Untersummen** $\underline{A_{2^n}}$ **eine monoton steigende Folge** darstellt läuft analog.

Für jedes Intervall $I_j = \left[(j-1)\frac{x_0-a}{2^n} \ ; \ j\frac{x_0-a}{2^n}\right]$ ist

$$f(\overline{x_j})\ \frac{x_0-a}{2^n} = f(\overline{x_j})\ \frac{x_0-a}{2^{n+1}} + f(\overline{x_j})\ \frac{x_0-a}{2^{n+1}}$$

.

$$f(\overline{x_j})\ \frac{x_0-a}{2^n} \geq f(\overline{x_{jl}})\ \frac{x_0-a}{2^{n+1}} + f(\overline{x_{jr}})\ \frac{x_0-a}{2^{n+1}}$$

Hierbei bedeuten $\overline{x_{jl}}$, $\overline{x_{jr}}$ die Maximalstellen von f in der linken bzw. rechten Intervallhälfte von I_j .

Für die Obersummen der 2^n – ten bzw. der 2^{n+1} – ten Näherung ergibt sich die Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{2^n} f(\overline{x_j})\,\frac{x_0-a}{2^n} \;\geq\; \sum_{j=1}^{2^n} f(\overline{x_{jl}})\,\frac{x_0-a}{2^{n+1}} \;+\; f(\overline{x_{jr}})\,\frac{x_0-a}{2^{n+1}}$$

$$\overline{A_{2^n}} \;\geq\; \underline{A_{2^{n+1}}}$$

Das heißt, dass die Folge $\overline{A_{2^n}}$ monoton fallen ist.

Wir zeigen nun, dass die Intervalle $\left[\,\underline{A_{2^{n+1}}}\;;\;\overline{A_{2^n}}\,\right]$ eine **Intervallschachtelung** darstellen, dessen Zentrum dann das Integral $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ und damit die Flächeninhaltsfunktion F definiert.

Es ist $\overline{A_{2^n}} \;-\; \underline{A_{2^n}} \;=\; \sum_{j=1}^{2^n}\left[f(\overline{x_j}) \;-\; f(\overline{x_j})\right]\,\dfrac{x_0-a}{2^n}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x,y \in [a;b]$ gilt:

$$|y - x| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(y) - f(x)| < \varepsilon\,/\,(x_0 - a)\ .$$

Es gibt weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\dfrac{x_0-a}{2^n} < \delta$ für alle $n \geq n_0$.

Da $\overline{x_j}$, $\underline{x_j} \in \left[(j-1)\dfrac{x_0-a}{2^n}\;;\; j\dfrac{x_0-a}{2^n}\right]$ ist, folgt

$$|\overline{x_j} \;-,\; \underline{x_j}| \leq \frac{x_0-a}{2^n} < \delta\ ,\ \text{also}\quad f(\overline{x_j}) \;-,\; f(\underline{x_j}) < \varepsilon\,/\,(x_0 - a)\ .$$

Für die Abschätzung der Differenz der Ober- und Untersummen ergibt sich:

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} = \sum_{j=1}^{2^n} \left[f(\overline{x_j}) - f(\overline{x_j}) \right] \frac{x_0 - a}{2^n}$$

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} < \sum_{j=1}^{2^n} \frac{\in}{x_0 - a} \, \frac{x_0 - a}{2^n}$$

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} < 2^n \frac{\in}{x_0 - a} \, \frac{x_0 - a}{2^n}$$

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0 \quad .$$

Damit ist $\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}}$ eine Nullfolge und $\left[\underline{A_{2^{n+1}}} \; ; \; \overline{A_{2^n}} \right]$ eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum z.

Wir definieren nun das Integral durch $\int_a^{x_0} f(x) \, dx := z$

und die Flächeninhaltsfunktion F : [a; b] -------> IR durch $F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x) \, dx$ für alle $x_0 \in [a;b]$.

q.e.d.

Eigenschaften der Integralfunktion

Das Integral einer stetigen Funktion $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ hat aufgrund des Zusammenhangs mit dem Flächeninhalt folgende Eigenschaften:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \;.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{für alle} \quad a \leq c \leq b \;.$$

$$\int_a^b v\,f(x)\,dx = v\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für alle} \quad v \geq 0 \;.$$

Ist $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g \geq 0$ ebenfalls stetig, so gilt:

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \;.$$

Ist $f(x) \leq g(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f : [a; b] -------> IR stetig und $f \geq 0$.

Dann gilt für die Flächeninhaltsfunktion (Integralfunktion) $F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)\, dx$:

$F'(x_0) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in [a;b]$.

Beweis:

In jedem Intervall $[x_0 \;;\; x_0+h]$ hat die Funktion f eine Minimal- und eine Maximalstelle $\underline{x}$ und $\overline{x}$, so dass gilt:

$$f(\underline{x})h \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq f(\overline{x})h$$

$$f(\underline{x}) \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq f(\overline{x})$$

Wegen $\lim\limits_{h\to 0} f(\underline{x}) = \lim\limits_{h\to 0} f(\overline{x}) = f(x_0)$ folgt $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

q.e.d.

Definition:

Eine Funktion F : [a; b] -------> IR heißt **Stammfunktion** der stetigen Funktion f : [a; b] -------> IR mit $f \geq 0$, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a;b]$.

Folgerung 1:

Falls F Stammfunktion von f ist, sind auch alle Funktionen F+c mit einer beliebigen Konstanten c aus IR Stammfunktionen.
Sind umgekehrt F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so gilt $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f – f = 0$, das heißt $F_1 - F_2$ = konstant = c und $F_1 = F_2 + c$.

Folgerung 2:

Will man nun für eine stetige Funktion f das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx$ bestimmen, braucht man nicht unbedingt die Flächeninhaltsfunktion F zu kennen, sondern es genügt, irgendeine Stammfunktion $\overline{F}$ von f zu kennen. Dann gilt nämlich $F = \overline{F} + c$ und es folgt :

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx &= \int_{a}^{x_2} f(x)\ dx - \int_{a}^{x_1} f(x)\ dx \\
&= F(x_2) - F(x_1) \\
&= F(x_2) + c - F(x_1) - c \\
&= \overline{F}(x_2) - \overline{F}(x_1) \\
&= \overline{F}(x)\ \Big|_{x_1}^{x_2}
\end{aligned}$$

Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Sei f : [a; b] -------> IR stetig und $f \leq 0$. Dann definiert man für jedes $x_0 \in [a;b]$ das Integral $\int_a^{x_0} f(x)\, dx$ durch:

$$\int_a^{x_0} f(x)\, dx = -\int_a^{x_0} (-f)(x)\, dx$$

Hat f im Intervall [a; b] eine Nullstelle x_N , also $f(x_N) = 0$ und ist

$f(x) \geq 0$ für $x \in [a;x_N]$

$f(x) \leq 0$ für $x \in [x_N;b]$

wird definiert:

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = \int_a^{x_N} f(x)\, dx - \int_{x_N}^{b} (-f)(x)\, dx \ .$$

Entsprechendes wird definiert, wenn

$f(x) \leq 0$ für $x \in [a;x_N]$

$f(x) \geq 0$ für $x \in [x_N;b]$

ist:

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = -\int_a^{x_N} (-f)(x)\, dx + \int_{x_N}^{b} f(x)\, dx \ .$$

Folgerung 2 aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für allgemeine stetige Funktionen

Die stetige Funktion f : [a; b] -------> IR habe im Intervall [a; b] eine Nullstelle x_N und es gelte

$$f(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x \in [a; x_N]$$

$$f(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x \in [x_N; b] \ .$$

Dann ist $\int_a^b f(x)\ dx = \bar{F}(b) - \bar{F}(a) = \bar{F}(x) \Big|_a^b$, für $\bar{F}$ ist Stammfunktion von f.

Beweis:

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^{x_N} f(x)\ dx - \int_{x_N}^b (-f)(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = F_L(x_N) - F_L(a) - \left(F_R(b) - F_R(x_N)\right)$$

Hierbei sind F_L und F_R die jeweiligen Flächeninhaltsfunktionen von f auf $[a; x_N]$ und -f auf $[x_N; b]$ mit den bekannten Eigenschaften.

Man kann diese Funktionen nehmen und sie stetig und differenzierbar zu einer Stammfunktion F von f auf $[a; b]$ zusammensetzen:

$$F(x) = \begin{cases} F_L(x) & \text{für} \quad x \in [a; x_N] \\ -F_R(x) + F_L(x_N) & \text{für} \quad x \in [x_N; b] \end{cases}$$

F ist stetig:
Der linksseitige Grenzwert an der Stelle x_N ist $F_L(x_N)$.
Der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle x_N ist $F_L(x_N)$, da . $F_R(x_N) = 0$ Ist.

F ist differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$:

Für $x \neq x_N$ ist $F'(x) = F_L'(x) = f(x)$ bzw. $F'(x) = -F_R'(x) = f(x)$

Der linksseitige Grenzwert bei x_N ist $F'(x_N) = f(x_N) = 0$.

Der rechtsseitige Grenzwert bei x_N ist $F'(x_N) = -F_R'(x_N) = f(x_N) = 0$.

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f auf [a;b], und das Integral kann jetzt geschrieben werden als

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_L(x_N) - F_L(a) - \left(F_R(b) - F_R(x_N)\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_L(x_N) - F_L(a) - F_R(b) + F_R(x_N)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x_N) - F(a) - F_R(b) + F_R(x_N)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Die letzte Gleichung folgt wegen $F(b) = -F_R(b) + F_L(x_N) = -F_R(b) + F(x_N)$ und $F_R(x_N) = 0$.

Ist nun $\bar{F}$ irgend eine Stammfunktion von f, unterscheidet sich diese von F nur durch eine Konstante c und es folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)+c - F(a)-c$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)+c - \left(F(a)+c\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \bar{F}(b) - \bar{F}(a) = \bar{F}(x)\Big|_a^b$$

q.e.d.

Folgerung:

Die Eigenschaften der Integralfunktion bleiben durch die allgemein Definition des Integrals erhalten:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0 \ .$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \quad \text{für alle} \quad a \le c \le b \ .$$

Zusatz:

$$0 = \int_a^a f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^a f(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad \int_c^a f(x)\ dx = -\int_a^c f(x)\ dx$$

$$\int_a^b v f(x)\ dx = v \int_a^b f(x)\ dx \quad \text{für alle} \quad v \ge 0 \ .$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \ .$$

Ist $f(x) \le g(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx$$

Beweis einiger Eigenschaften des Integrals

Behauptung:
Die stetige Funktion f : [a; b] -------> IR habe im Intervall [a; b] eine Nullstelle x_N und es gelte

$$f(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x \in [a; x_N]$$

$$f(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x \in [x_N; b] \quad .$$

Dann ist $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$ für alle $a \leq c \leq b$.

Beweis:

1. Fall: $a \leq c \leq x_N$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{x_N} f(x)\ dx - \int_{x_N}^b (-f)(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^{x_N} f(x)\ dx - \int_{x_N}^b (-f)(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

2. Fall: $x_N \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{x_N} f(x)\ dx - \int_{x_N}^b (-f)(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{x_N} f(x)\ dx - \left(\int_{x_N}^c (-f)(x)\ dx + \int_c^b (-f)(x)\ dx \right)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{x_N} f(x)\ dx - \int_{x_N}^c (-f)(x)\ dx - \int_c^b (-f)(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx - \int_c^b (-f)(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Behauptung:
Seien f , g : [a; b] -------> IR stetige Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx\ .$$

Beweis:

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = (F+G)(b) - (F+G)(a)$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = F(b) - F(a) + G(b)-G(a)$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

Behauptung:
Seien f , g : [a; b] -------> IR stetige Funktionen und $f \leq g$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx\ .$$

Beweis:
Seien $x_f < x_g$ die Nullstellen von f und g und zum Beispiel der Vorzeichenwechsel jeweils +/- . Dann gilt auf den Intervallen Folgendes:

$[a;x_f]$: $\displaystyle\int_a^{x_f} f(x)\ dx \leq \int_a^{x_f} g(x)\ dx$

$[x_f;x_g]$: $\displaystyle\int_{x_f}^{x_g} f(x)\ dx = \int_{x_f}^{x_g} (-f)(x)\ dx \leq \int_{x_f}^{x_g} g(x)\ dx$

$$\int_{x_f}^{x_g} (-f)(x)\ dx \geq \int_{x_f}^{x_g} (-g)(x)\ dx$$

$[x_g;x_b]$: $\displaystyle -\int_{x_f}^{x_g} (-f)(x)\ dx \leq -\int_{x_f}^{x_g} (-g)(x)\ dx$

$$\int_{x_f}^{x_g} f(x)\ dx \leq \int_{x_f}^{x_g} g(x)\ dx$$

Also folgt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei f : [a; b] -------> IR stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a;b]$, so dass

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)}\ .$$

Beweis:

Da f auf dem kompakten Intervall stetig ist, werden Minimum m und Maximum M angenommen, und es folgt wegen der Monotonie des Integrals

$$\int_a^b m\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b M\ dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{(b-a)} \le M$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a;b]$ mit

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{(b-a)} = f(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$$

q.e.d.

Produktregel

Seien $f, g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

Beweis:

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Substitutionsregel

Sei $f : [A; B] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $T : [a; b] \longrightarrow [A; B]$ eine bijektive differenzierbare Abbildung mit $T' > 0$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_A^B f(y)\,dy = \int_a^b (F \circ T)(x)T'(x)\,dx}$$

Beweis:

$$\int_A^B f(y)\,dy = F(b) - F(A)$$

$$\int_A^B f(y)\,dy = F(T(b)) - F(T(a))$$

$$\int_A^B f(y)\,dy = (F \circ T)(b) - (F \circ T)(a)$$

$$\int_A^B f(y)\,dy = \int_a^b (F \circ T)(x)T'(x)\,dx$$