

Rotationskörper

Arno Fehringer

Juni 2017

Quellen :

Havil, Julian : Verblüfft?! Mathematische Beweise unglaublicher Ideen. Springer-Verlag, 2009

Hicketier, Gustav : Bogen, Fläche, Rotationskörper der Cissoide. Inaugural-Dissertation, Universität Jena 1869. **Bayrische Staatsbibliothek**

Url: <http://reader.digitale-sammlungen.de/resolve/display/bsb10479485.html> [11.06.2017]

Lambacher Schweizer : Analysis. Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1967 1. Aufl.

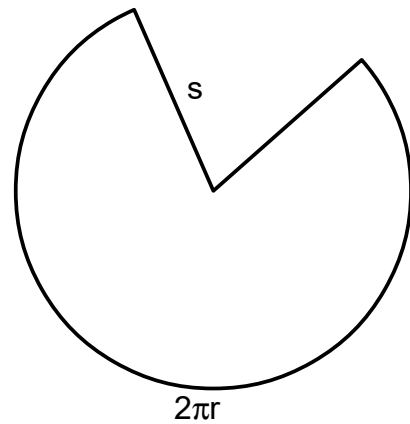
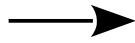
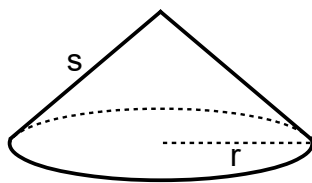
Loria, Gino : Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Teubner Verlag 1902

Societe Hollandaise des Sciences : Oeuvres Completes de Christian Huygens, Tome deuxieme . La Haye: Martinus Nijhoff 1889, S. 168

Url: <https://archive.org/details/oeuvrescomplte02huyg> [27.06.2017]

Zeidler, E. (Hsg.) : Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Springer Fachmedien, 2003 2. Aufl.

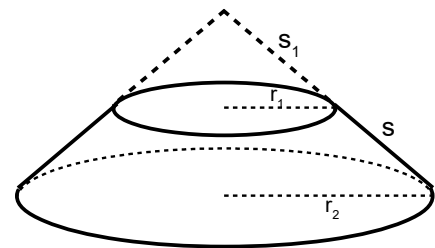
Mantel des Kegels



$$M = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s$$

$$M = \pi r s$$

Mantel des Kegelstumpfs



$$M = \pi r_2 (s_1 + s) - \pi r_1 s_1$$

$$\frac{s_1 + s}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$1 + \frac{s}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{s}{s_1} = \frac{r_2}{r_1} - 1$$

$$\frac{s}{s_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_1}$$

$$\frac{s_1}{s} = \frac{r_1}{r_2 - r_1}$$

$$\underline{\underline{s_1 = \frac{r_1 s}{r_2 - r_1}}}$$

$$s_1 + s = \frac{r_1 s}{r_2 - r_1} + s$$

$$s_1 + s = \frac{r_1 s}{r_2 - r_1} + \frac{s(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1}$$

$$s_1 + s = \frac{r_1 s + s(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1}$$

$$\underline{\underline{s_1 + s = \frac{r_2 s}{r_2 - r_1}}}$$

$$M = \pi r_2 (s_1 + s) - \pi r_1 s_1$$

$$M = \pi r_2 \frac{r_2 s}{r_2 - r_1} - \pi r_1 \frac{r_1 s}{r_2 - r_1}$$

$$M = \pi \frac{r_2^2 s}{r_2 - r_1} - \pi \frac{r_1^2 s}{r_2 - r_1}$$

$$M = \pi \left(\frac{r_2^2}{r_2 - r_1} - \frac{r_1^2}{r_2 - r_1} \right) s$$

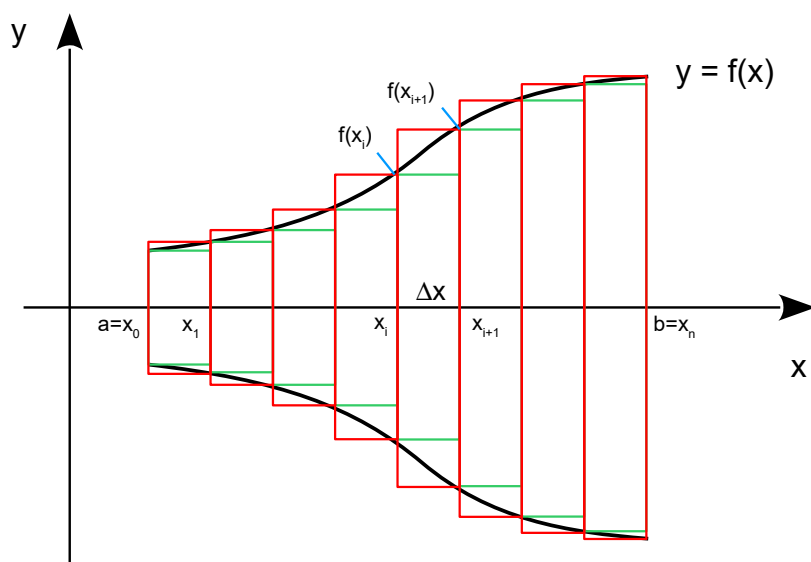
$$M = \pi \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \right) s$$

$$\boxed{M = \pi (r_2 + r_1) s}$$

Volumen eines Rotationskörpers

Die Kurve mit der stetigen Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a ; b]$ sei monoton wachsend, verlaufe oberhalb der x-Achse und werde um die x-Achse gedreht, so dass ein Rotationskörper entsteht.

Es soll das **Volumen** V **des Körpers** bestimmt werden!



Für $n \in \{ 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots \}$ teilt man das Intervall $[a ; b]$ und den Körper in gleiche Intervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und betrachtet die Volumina der entsprechenden Zylinder.

Als n-te Näherung von oben bzw. von unten des Volumens erhält man

$$\underline{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \Delta x, \quad \bar{V}_n = \sum_{i=1}^n \pi f(x_i)^2 \Delta x.$$

Die Folgen $(\underline{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\bar{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind monoton wachsend bzw. monoton fallend, es gilt

$\underline{V}_n \leq \bar{V}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Differenzenfolge ist eine Nullfolge :

$$\bar{V}_n - \underline{V}_n = \sum_{i=1}^n \pi f(x_i)^2 \Delta x - \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \Delta x$$

$$\bar{V}_n - \underline{V}_n = \pi \left(f(x_n)^2 - f(x_0)^2 \right) \Delta x$$

$$\bar{V}_n - \underline{V}_n = \pi \left(f(b)^2 - f(a)^2 \right) \Delta x$$

$$\bar{V}_n - \underline{V}_n = \pi \left(f(b)^2 - f(a)^2 \right) \frac{b-a}{n}, \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{V}_n - \underline{V}_n) = 0.$$

Damit liegt eine Intervallschachtelung vor , und man definiert das **Volumen des Rotationskörpers** zu

$$V := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{V}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \Delta x \quad \text{bzw.} \quad V := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f(x_i)^2 \Delta x \quad ,$$

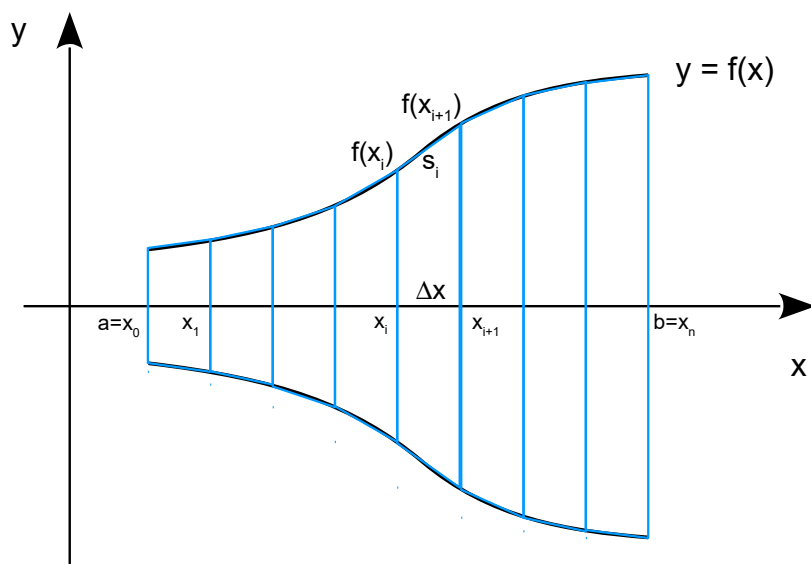
also
$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx \quad .$$

Mantel eines Rotationskörpers

Die differenzierbare Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a ; b]$ sei monoton wachsend, verlaufe oberhalb der x-Achse. Die Ableitung f' existiere auf dem Intervall $[a ; b]$ und sei stetig.

Die Kurve wird um die x-Achse gedreht, so dass ein Rotationskörper entsteht.

Es soll der **Mantel** M **des Körpers** bestimmt werden!



Für $n \in \{2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots\}$ teilt man das Intervall $[a ; b]$ und den Körper in gleiche Intervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und betrachtet die Mäntel der entsprechenden Kegelstümpfe :

Für alle $i \in \{0 \dots, n-1\}$ ist der Mantel des i-ten Kegelstumpfes gleich

$$\pi (f(x_i) + f(x_{i+1})) s_i \quad \text{mit} \quad s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x .$$

Nach dem **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** gibt es zu jedem

$$i \in \{0 \dots, n-1\} \quad \text{ein} \quad \xi_i \in (x_i ; x_{i+1}) \quad \text{mit} \quad \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} = f'(\xi_i) .$$

Für die Seitenlänge bzw. den Mantel des i-ten Kegelstumpfes erhält man

$$s_i = \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x , \quad \pi (f(x_i) + f(x_{i+1})) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x .$$

Die Summe über alle Mäntel kann man als n-te Näherung des Mantels des Rotationskörpers betrachten :

$$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x$$

Wegen der Monotonie gilt $f(x_i) \leq f(x_{i+1})$ und

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \leq M_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_{i+1}) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x .$$

Subtrahiert man jetzt den Term $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x$,

so erhält man zunächst

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_i) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \leq M_n - I_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x .$$

Die rechte Seite der Ungleichungskette kann man wie folgt abschätzen :

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \bar{m} \Delta x ,$$

wobei $\bar{m}$ das Maximum der auf dem Intervall $[a ; b]$ stetigen Funktion f' ist .

Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x &\leq 2\pi \bar{m} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \Delta x \\ \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x &\leq 2\pi \bar{m} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \Delta x - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x \right) . \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$ strebt die rechte Seite gegen

Null, das heißt , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi (f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x = 0$

Die linke Seite der Ungleichungskette kann man wie folgt abschätzen :

$$0 \geq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_i) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \geq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_i) - f(\xi_i)) \underline{m} \Delta x ,$$

wobei $\underline{m}$ das Minimum der auf dem Intervall $[a ; b]$ stetigen Funktion f' ist .

$$0 \geq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_i) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \geq 2\pi \underline{m} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) - f(\xi_i)) \Delta x$$

$$0 \geq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_i) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \geq 2\pi \underline{m} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x \right)$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$ strebt die rechte Seite gegen Null,

das heißt , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_i) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x = 0$

Dann strebt aber der mittlere Term $M_n - I_n$ der Gleichungskette

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_i) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x \leq M_n - I_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi(f(x_{i+1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x .$$

ebenfalls gegen Null, und wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

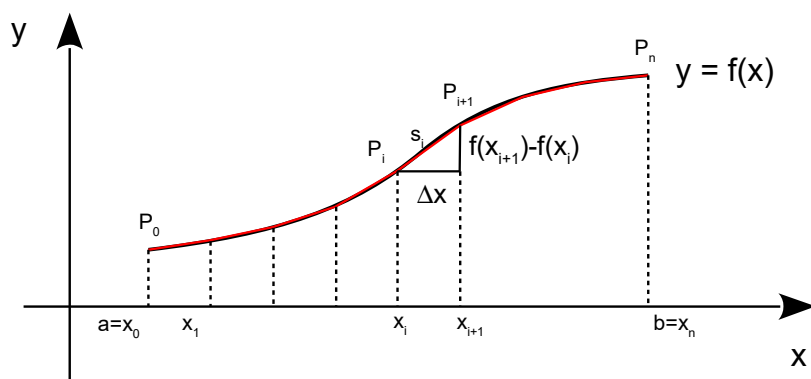
Der **Mantel des Rotationskörpers** ist somit

$$M = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

Bogenlänge einer Kurve

Die differenzierbare Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a ; b]$ sei monoton wachsend. Die Ableitung f' existiere auf dem Intervall $[a ; b]$ und sei stetig.

Es soll die **Bogenlänge L der Kurve** bestimmt werden!



Für $n \in \{ 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots \}$ teilt man das Intervall $[a ; b]$ in gleiche Intervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und betrachtet hierzu die Punkte $P_i(x_i | f(x_i))$, $i = 1, \dots, n$, auf der Kurve sowie den Streckenzug $\overline{P_0 \dots P_n}$.

Die Länge des Streckenzugs ist

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \right)^2} \Delta x$$

Nach dem **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** gibt es zu jedem

$$i \in \{0 \dots, n-1\} \text{ ein } \xi_i \in (x_i ; x_{i+1}) \text{ mit } \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} = f'(\xi_i) .$$

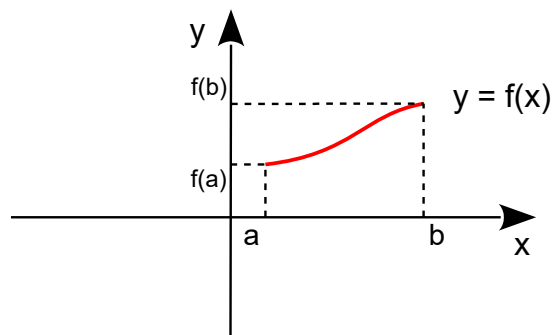
Für die n-te Näherung der Bogenlänge bzw. für die **Bogenlänge der Kurve** erhält man

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x , \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x , \text{ also}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

Allgemeinere Betrachtungen zu Rotationskörpern : Linien-, Flächen-, Volumenschwerpunkt, Guldinsche Regeln

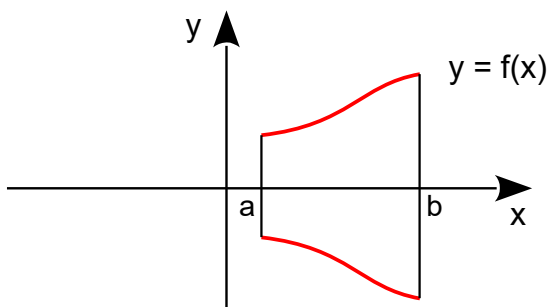
Gegeben sei der oberhalb der x-Achse verlaufende Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a ; b]$



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

$$L = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

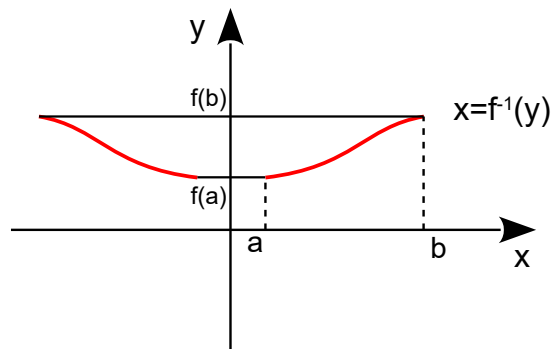
Rotation um die x-Achse



$$M_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

Rotation um die y-Achse



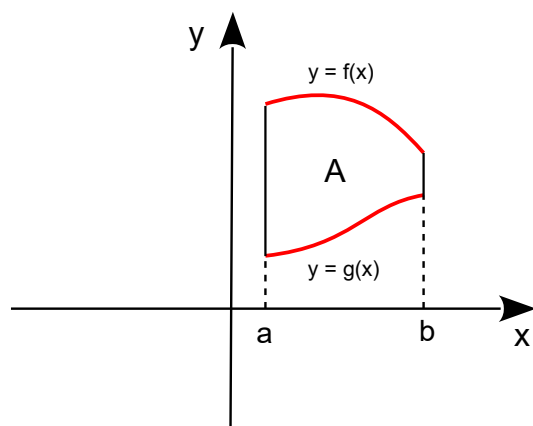
$$M_y = \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

$$\left[M_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2} y' \, dx \right]$$

$$M_y = \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

$$V_y = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi x^2 \, dy$$

Gegeben sei das Flächenstück A , welches durch die stetig differenzierbaren Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ auf dem Intervall $[a; b]$ begrenzt wird.



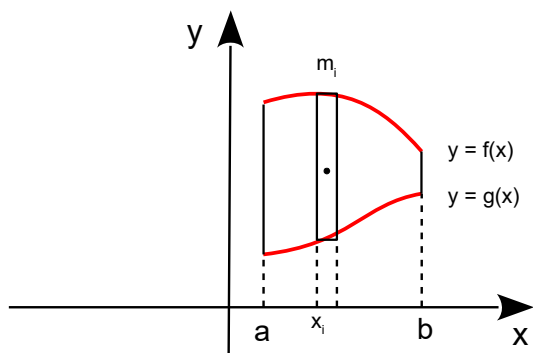
$$A = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx$$

$$V_x = \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) \, dx$$

Denkt man sich das Gebilde als Massenstück m mit der homogenen **(Flächen)dichte** ρ , so gilt: $m = \rho A$.

Das Drehmoment des Gebildes bei Drehung um die x-Achse sei D_x .

Zerlegt man das Gebilde in n lauter gleich breite Streifen, kann man D_x näherungsweise bestimmen:



$$m_i = \rho A_i = \rho (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$$

$$(D_x)_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + g(x_i)) \cdot m_i$$

$$(D_x)_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + g(x_i)) \cdot \rho (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$$

$$(D_x)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + g(x_i)) (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$$

$$(D_x)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f^2(x_i) - g^2(x_i)) \Delta x$$

Die Grenzwertbildung $n \longrightarrow \infty$ liefert für das Drehmoment

$$D_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} (f^2(x) - g^2(x)) dx .$$

$$D_x = \rho \frac{1}{2\pi} \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

$$D_x = \rho \frac{1}{2\pi} V_x$$

Wenn die Masse des Gebildes im **Flächenschwerpunkt** $S(x_s|y_s)$ konzentriert sein soll, gilt bei Drehung um die x-Achse :

$$D_x = y_s \cdot m$$

$$D_x = y_s \cdot \rho A$$

Kombiniert man die beiden Gleichungen für das Drehmoment, so folgt :

$$\rho \frac{1}{2\pi} V_x = y_s \cdot \rho A$$

$$V_x = 2\pi y_s \cdot A$$

2. Guldinsche Regel [Paul Guldin ; 1577 – 1643]

Das Rotationsvolumen ist gleich dem Weg des Flächenschwerpunktes multipliziert mit der Querschnittsfläche .

Man kann jetzt außerdem die Ordinate y_s des Flächenschwerpunktes $S(x_s|y_s)$ definieren :

$$V_x = 2\pi y_s \cdot A$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2\pi} V_x}{A}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx}$$

$$y_s := \frac{\int_a^b \frac{1}{2} (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx}$$

Das Drehmoment D_y des Gebildes bei Drehung um die y-Achse erhält man in analoger Weise :

$$(D_y)_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i$$

$$(D_y)_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \rho \left(f(x_i) - g(x_i) \right) \Delta x$$

$$(D_y)_n = \rho \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left(f(x_i) - g(x_i) \right) \Delta x$$

Die Grenzwertbildung $n \longrightarrow \infty$ liefert für das Drehmoment

$$D_y = \rho \int_a^b x \cdot \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Andererseits erhält man das Drehmoment D_y über

$$D_y = x_s \cdot m$$

$$D_y = x_s \cdot \rho A$$

Die Kombination der Gleichungen liefert die Abszisse x_s des Flächenschwerpunktes :

$$x_s \cdot \rho A = \rho \int_a^b x \cdot \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

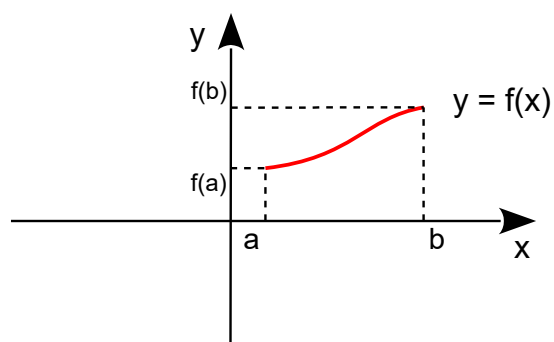
$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \left(f(x) - g(x) \right) dx}{A}$$

$$x_s := \frac{\int_a^b x \cdot \left(f(x) - g(x) \right) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx}$$

Die Symmetrie verlangt, dass die **2. Guldinsche Regel** auch bei Rotation um die y-Achse gilt :

$$V_y = 2\pi x_s \cdot A$$

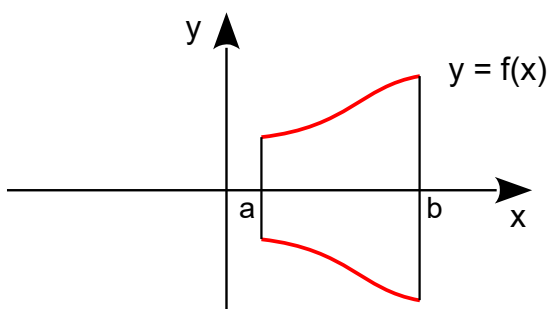
Gegeben sei der oberhalb der x-Achse verlaufende Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a ; b]$



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

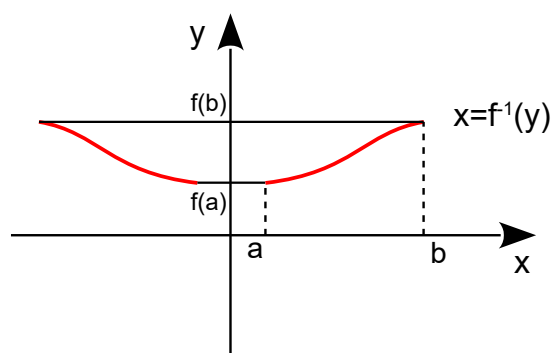
$$L = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

Rotation um die x-Achse



$$M_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

Rotation um die y-Achse



$$M_y = \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

$$\left[\begin{array}{l} M_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2} y' \, dx \\ M_y = \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} \, dx \end{array} \right]$$

Denkt man sich die Linie als Massenstück m mit der homogenen **(Linien)dichte** ρ , so gilt: $m = \rho L$.

Das Drehmoment des Gebildes bei Drehung um die x-Achse sei D_x .

Zerlegt man das Intervall $[a; b]$ in n gleich breite Intervalle der Breite Δx und addiert man die Drehmomente der Strecken s_i des entsprechenden Streckenzugs, so erhält man zunächst die Näherung

$$(D_x)_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot m_i$$

$$(D_x)_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot \rho \Delta s_i$$

$$(D_x)_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot \rho \sqrt{\Delta x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

$$(D_x)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \right)^2}$$

$$(D_x)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x$$

Die Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty$ liefert für das Drehmoment

$$D_x = \rho \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$D_x = \frac{\rho}{2\pi} \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$D_x = \frac{\rho}{2\pi} M_x$$

Wenn die Masse des Gebildes im **Linienschwerpunkt** $S(x_s|y_s)$ konzentriert sein soll, gilt bei Drehung um die x-Achse:

$$D_x = y_s \cdot m$$

$$D_x = y_s \cdot \rho L$$

Kombiniert man die beiden Gleichungen für das Drehmoment, ergibt sich

$$\frac{\rho}{2\pi} M_x = y_s \cdot \rho L$$

$$M_x = 2\pi y_s \cdot L$$

1. Guldinsche Regel [Paul Guldin ; 1577 – 1643]

Der Mantel des Rotationskörpers ist gleich dem Weg des Linienschwerpunktes multipliziert mit der Länge .

Damit kann man die Ordinate y_s des **Linien Schwerpunktes** $S(x_s|y_s)$ definieren :

$$y_s = \frac{\frac{1}{2\pi} M_x}{L}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

$$y_s := \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

Das Drehmoment D_y der Linie bei Drehung um die y-Achse erhält man in analoger Weise :

$$(D_y)_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \cdot m_i$$

$$(D_y)_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \cdot \rho \Delta s_i$$

$$(D_y)_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \cdot \rho \sqrt{\Delta y^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$(D_y)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \sqrt{\Delta y^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$(D_y)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta y}\right)^2} \Delta y$$

$$(D_y)_n = \rho \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \sqrt{1 + (x'(\eta_i))^2} \Delta y$$

Die Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty$ liefert für das Drehmoment

$$D_y = \rho \int_{f(a)}^{f(b)} x \sqrt{1 + (x')^2} \Delta y$$

$$D_y = \rho \int_{f(a)}^{f(b)} x \sqrt{1 + (x')^2} \Delta y$$

$$D_y = \frac{\rho}{2\pi} \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + (x')^2} \Delta y$$

$$D_y = \frac{\rho}{2\pi} M_y$$

Andererseits gilt

$$D_y = x_s \cdot m$$

$$D_y = x_s \cdot \rho L \quad ,$$

und es folgt die Abszisse x_s des **Linienschwerpunktes** $S(x_s|y_s)$:

$$x_s \cdot \rho L = \frac{\rho}{2\pi} M_y$$

$$x_s = \frac{\frac{1}{2\pi} M_y}{L}$$

$$x_s = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{f(a)}^{f(b)} 2\pi x \sqrt{1 + x'^2} dy}{\int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + x'^2} dy}$$

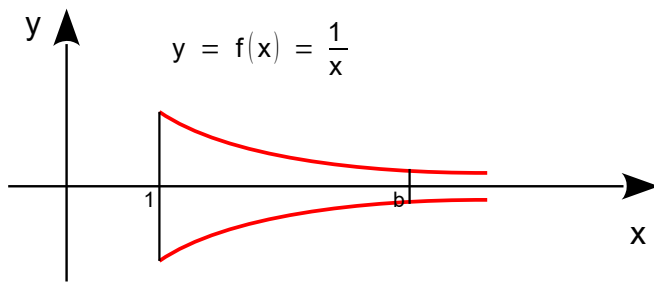
$$x_s := \frac{\int_{f(a)}^{f(b)} x \sqrt{1 + x'^2} dy}{\int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + x'^2} dy}$$

Aus Symmetriegründen gilt die **1. Guldinsche Regel** auch bei Rotation um die y-Achse :

$$M_y = 2\pi x_s \cdot L$$

Torricellis Trompete

[Torricelli 1608 – 1647, ital. Mathematiker]



Rotation um die x-Achse

$$V_x = \int_1^{b \rightarrow \infty} \pi y^2 dx$$

$$V_x = \int_1^{b \rightarrow \infty} \pi \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx$$

$$V_x = \int_1^{b \rightarrow \infty} \pi \frac{1}{x^2} dx$$

$$V_x = \int_1^{b \rightarrow \infty} \pi x^{-2} dx$$

$$V_x = \pi x^{-1} \Big|_1^{b \rightarrow \infty}$$

$$V_x = \lim_{b \rightarrow \infty} \pi - \frac{1}{b}$$

$$V_x = \pi$$

$$M_x = \int_a^{b \rightarrow \infty} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$M_x = \int_a^{b \rightarrow \infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x} \right)^2} dx$$

$$M_x > \int_a^{b \rightarrow \infty} 2\pi \frac{1}{x} dx \quad \text{wegen} \quad \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x} \right)^2} > 1$$

$$M_x > 2\pi \ln(x) \Big|_1^{b \rightarrow \infty}$$

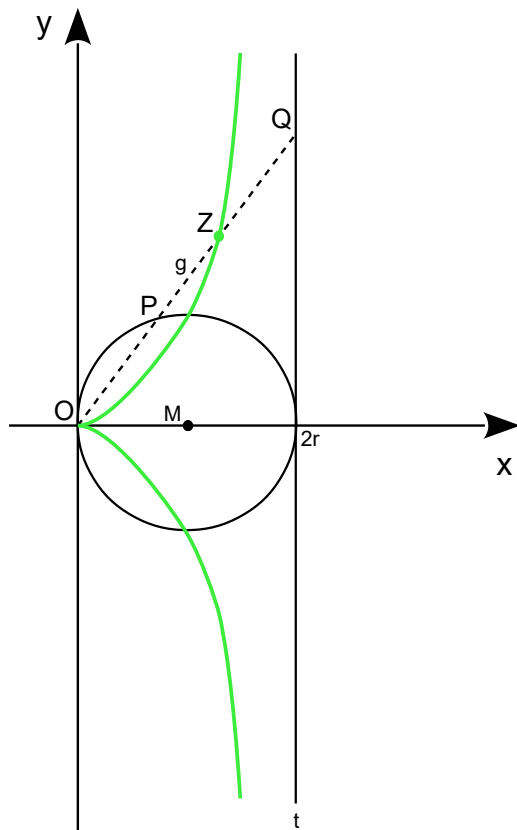
$$M_x = \infty$$

Zissoide [gr. κισσοζ = kissos = Efeu , οειδης = ähnlich]

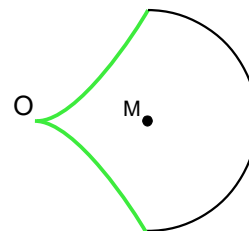
Konstruktion :

Gegeben seien Mittelpunkt $M(r|0)$, Kreis $K_{M,r}$, Tangente $t \parallel y$

Sei g irgend eine Gerade durch $O(0|0)$, $g \cap K_{M,r} = \{P\}$, $g \cap t = \{Q\}$. Dann ist der Punkt $Z \in g$ mit $|OZ| = |PQ|$ ein Punkt der **Zissoide** .



Der vom Kreis und der Zissoide begrenzte Teil erinnert an ein Efeublatt



Gleichung :

$$K_{M,r} : (x-r)^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad g : y = mx$$

$$P(x_P|y_P) :$$

$$(x-r)^2 + (mx)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2rx + r^2 + m^2x^2 = r^2$$

$$x^2 - 2rx + m^2x^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 2rx = 0$$

$$(1 + m^2)x - 2r = 0$$

$$x_P = \frac{2r}{1 + m^2} \Rightarrow y_P = \frac{2rm}{1 + m^2} \quad , \quad P(x_P|y_P) = P\left(\frac{2r}{1 + m^2} \mid \frac{2rm}{1 + m^2}\right)$$

$$Q(x_Q|y_Q) : Q(x_Q|y_Q) = P(2r \mid 2rm)$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(2r - \frac{2r}{1+m^2}\right)^2 + \left(2rm - \frac{2rm}{1+m^2}\right)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{2r(1+m^2) - 2r}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2rm(1+m^2) - 2rm}{1+m^2}\right)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{2r + 2rm^2 - 2r}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2rm + 2rm^3 - 2rm}{1+m^2}\right)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{2rm^2}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2rm^3}{1+m^2}\right)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{2rm^2}{1+m^2}\right)^2 + \left(m \frac{2rm^2}{1+m^2}\right)^2}$$

$$Z \in g \text{ mit } |OZ| = |PQ| :$$

$$Z(x|mx) = Z\left(x = \frac{2rm^2}{1+m^2} \mid mx\right)$$

$$x = \frac{2rm^2}{1+m^2}$$

$$y = mx$$

$$x(1+m^2) = 2rm^2$$

$$x + xm^2 = 2rm^2$$

$$x + xm^2 = 2rm^2$$

$$x = 2rm^2 - xm^2$$

$$x = (2r - x)m^2$$

$$\frac{x}{2r - x} = m^2$$

$$y^2 = m^2 x^2$$

$$y^2 = \frac{x}{2r - x} x^2$$

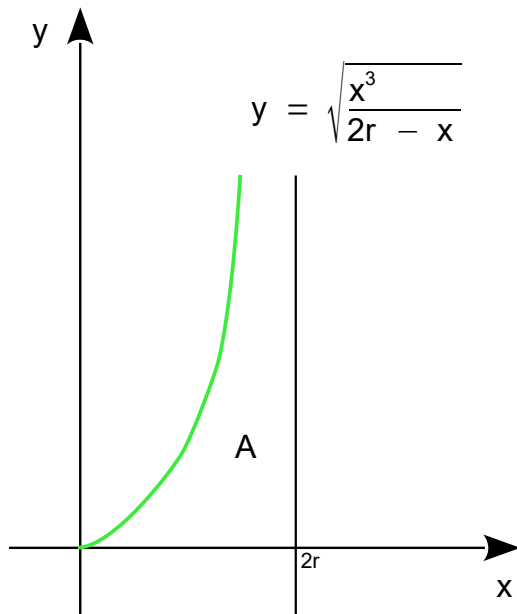
$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

Gleichung der **Zissoide**

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2r - x}}$$

Die halbe Zissoide $y = \sqrt{\frac{x^3}{2r - x}}$ eine Senkrechte Asymptote $x = 2r$, da

$$\lim_{x \rightarrow 2r} \sqrt{\frac{x^3}{2r - x}} = \lim_{x \rightarrow 2r} \sqrt{\frac{x^2}{\frac{2r}{x} - 1}} = \infty \text{ ist.}$$



Flächeninhalt :

$$A = \int_0^{b \rightarrow 2r} y \, dx$$

$$A = \int_0^{b \rightarrow 2r} \sqrt{\frac{x^3}{2r - x}} \, dx$$

$$A = \int_0^{b \rightarrow 2r} \sqrt{\frac{x^4}{2rx - x^2}} \, dx$$

$$A = \int_0^{b \rightarrow 2r} \frac{x^2}{\sqrt{2rx - x^2}} \, dx$$

$$A = \int_0^{b \rightarrow 2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - r^2 + 2rx - x^2}} \, dx$$

$$A = \int_0^{b \rightarrow 2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} \, dx$$

Hierzu bedient man sich wesentlich der **Tabelle unbestimmter Integrale** aus dem **Teubner-Taschenbuch der Mathematik**.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = ?$$

$$z := r - x \Rightarrow x = r - z, \quad x' = -1$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = \int \frac{(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} x' dz$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = \int \frac{-(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

$$\int \frac{-(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = \int \frac{-r^2 + 2rz - z^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

$$\int \frac{-(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = \int \frac{-r^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz + \int \frac{2rz}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz - \int \frac{z^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

$$\int \frac{-(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = -r^2 \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz + 2r \int \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz - \int \frac{z^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

$$-r^2 \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = -r^2 \left[\arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \right]$$

$$2r \int \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = 2r \left[-\sqrt{r^2 - z^2} \right]$$

$$- \int \frac{z^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = - \left[-\frac{z}{2} \sqrt{r^2 - z^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \right]$$

$$\int \frac{-(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = -\frac{3r^2}{2} \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) + \left(-2r + \frac{z}{2}\right) \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = \int \frac{-(r - z)^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = -\frac{3r^2}{2} \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) + \left(-2r + \frac{z}{2}\right) \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = -\frac{3r^2}{2} \arcsin\left(\frac{r-x}{r}\right) + \left(-2r + \frac{r-x}{2}\right)\sqrt{r^2 - (r-x)^2}$$

$$\int_0^{2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = -\frac{3r^2}{2} \arcsin\left(\frac{r-x}{r}\right) + \left(-2r + \frac{r-x}{2}\right)\sqrt{r^2 - (r-x)^2} \Big|_0^{2r}$$

$$\int_0^{2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = -\frac{3r^2}{2} \arcsin(-1) - \left(-\frac{3r^2}{2} \arcsin(1)\right)$$

$$\int_0^{2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = -\frac{3r^2}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3r^2}{2} \frac{\pi}{2}\right)$$

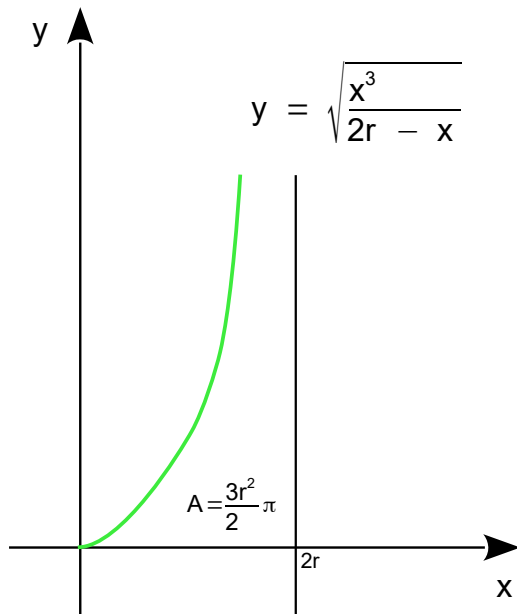
$$\int_0^{2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = \frac{3r^2}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{3r^2}{2} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = \frac{3r^2}{2} \pi$$

$$\int_0^{2r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r - x)^2}} dx = \frac{3r^2}{2} \pi$$

$$A = \frac{3r^2}{2} \pi$$

Volumen V_y bei Rotation der Fläche $A = \frac{3r^2}{2} \pi$ zwischen Zissoide, x-Achse und Asymptote um die y-Achse :



Hierzu kann man die **2. Guldinsche Regel** $V_y = 2\pi x_s \cdot A$ verwenden, wobei x_s die x-Koordinate des Flächenschwerpunktes $S(x_s|y_s)$ ist.

Sie ist definiert als $x_s = \frac{\int_0^{2r} x \cdot y \, dx}{A}$.

Hierzu bedient man sich wesentlich der **Tabelle unbestimmter Integrale** aus dem **Teubner-Taschenbuch der Mathematik**.

$$\int x \cdot y \, dx = ?$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int x \cdot \sqrt{\frac{x^3}{2r - x}} \, dx$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int x \cdot \sqrt{\frac{x^4}{2rx - x^2}} \, dx$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int x \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2rx - x^2}} \, dx$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int x \cdot \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - r^2 + 2rx - x^2}} \, dx$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int x \cdot \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - (r-x)^2}} \, dx$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{r^2 - (r-x)^2}} \, dx$$

$$z := r-x \quad \Rightarrow \quad x = r-z, \quad x' = -1$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int \frac{-(r-z)^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int \frac{-r^3 + 3r^2z - 3rz^2 + z^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz$$

$$\int x \cdot y \, dx = \int \frac{-r^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz + \int \frac{3r^2z}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz + \int \frac{-3rz^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz + \int \frac{z^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz$$

$$\int x \cdot y \, dx = -r^3 \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz + 3r^2 \int \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz - 3r \int \frac{z^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz + \int \frac{z^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz$$

$$-r^3 \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz = -r^3 \left[\arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \right]$$

$$3r^2 \int \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz = 3r^2 \left[-\sqrt{r^2 - z^2} \right]$$

$$-3r \int \frac{z^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz = -3r \left[-\frac{z}{2} \sqrt{r^2 - z^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \right]$$

$$\int \frac{z^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz = \frac{\sqrt{(r^2 - z^2)^3}}{3} - r^2 \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$\int x \cdot y \, dx = \left(-r^3 - \frac{3r^3}{2} \right) \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) + \left(-3r^2 + \frac{3rz}{2} - r^2 \right) \sqrt{r^2 - z^2} + \frac{\sqrt{(r^2 - z^2)^3}}{3}$$

$$\int x \cdot y \, dx = \left(-r^3 - \frac{3r^3}{2} \right) \arcsin\left(\frac{r-x}{r}\right) + \left(-3r^2 + \frac{3r(r-x)}{2} - r^2 \right) \sqrt{r^2 - (r-x)^2} + \frac{\sqrt{(r^2 - (r-x)^2)^3}}{3}$$

$$\int x \cdot y \, dx = \left(-\frac{5r^3}{2} \right) \arcsin\left(\frac{r-x}{r}\right) + \left(-4r^2 + \frac{3r(r-x)}{2} \right) \sqrt{r^2 - (r-x)^2} + \frac{\sqrt{(r^2 - (r-x)^2)^3}}{3}$$

$$\int_0^{2r} x \cdot y \, dx = \left(-\frac{5r^3}{2} \right) \arcsin\left(\frac{r-x}{r}\right) + \left(-4r^2 + \frac{3r(r-x)}{2} \right) \sqrt{r^2 - (r-x)^2} + \frac{\sqrt{(r^2 - (r-x)^2)^3}}{3} \Big|_0^{2r}$$

$$\int_0^{2r} x \cdot y \, dx = -\frac{5r^3}{2} \arcsin(-1) - \left(-\frac{5r^3}{2} \arcsin(1) \right)$$

$$\int_0^{2r} x \cdot y \, dx = -\frac{5r^3}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{5r^3}{2} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int_0^{2r} x \cdot y \, dx = \frac{5r^3}{4} \pi + \frac{5r^3}{4} \pi$$

$$\int_0^{2r} x \cdot y \, dx = \frac{5r^3}{2} \pi$$

$$x_s = \frac{\int_0^{2r} x \cdot y \, dx}{A}, \quad A = \frac{3r^2}{2} \pi$$

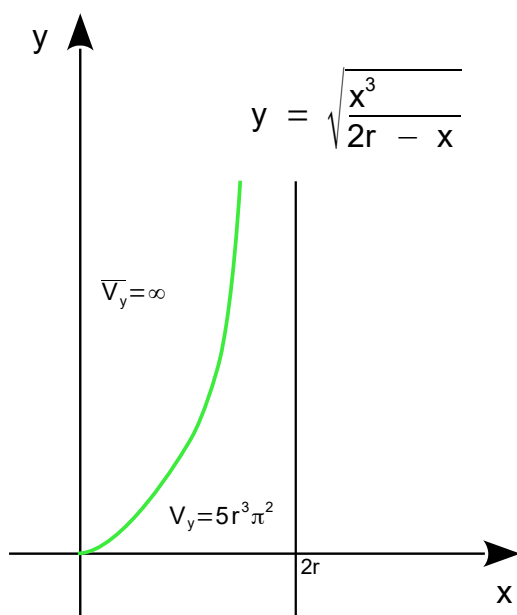
$$x_s = \frac{\frac{5r^3}{2} \pi}{\frac{3r^2}{2} \pi}$$

$$\boxed{x_s = \frac{5}{3} r}, \quad x_s = \frac{5}{6} 2r$$

$$V_y = 2\pi x_s \cdot A$$

$$V_y = 2\pi \frac{5r}{3} \cdot \frac{3r^2}{2} \pi$$

$$\boxed{V_y = 5r^3 \pi^2} \Rightarrow \overline{V_y} = \infty$$



Bemerkung :

In einem Brief vom 12. April 1658 an **Ch. Huygens** beschrieb **R. F. de Sluse** den Rotationskörper der Kissoide als

„*levi opera deducitur mensura vasculi*, pondere non magni, quod interim helluo nullus ebibat“, als „leichtgewichtiges Trinkgefäß, das nicht einmal der härteste Trinker leeren könnte“ .

[Vgl.: Societe Hollandaise des Sciences : Oeuvres Completes de Christian Huygens, Tome deuxieme . La Haye: Martinus Nijhoff 1889, S. 168]