

Die 3 klassischen Mittelwerte

Arno Fehringer,

Febr. 2018

Einige Voraussetzungen

Kongruenzaxiom sws :

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen .

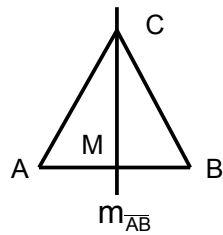
Winkelsummensatz im Dreieck :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Dreieckungleichung :

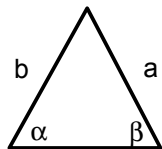
$$a + b \geq c, \quad b + c \geq a, \quad c + a \geq b$$

Charakterisierung der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$



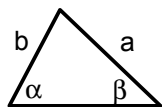
$$C \in m_{\overline{AB}} \Leftrightarrow |CA| = |CB|$$

Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke



$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

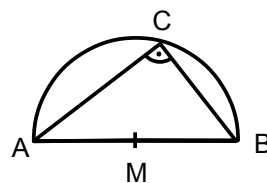
Seiten und Winkel



$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

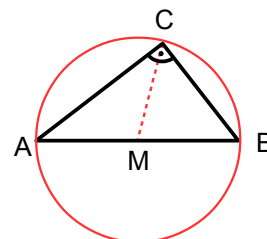
Satz des Thales

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.



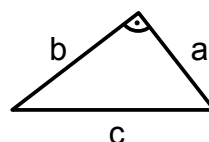
Satz vom Umkreis

Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert die Hypotenuse .



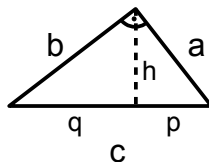
Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$



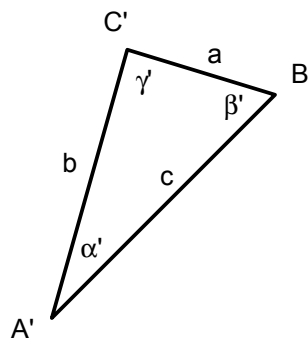
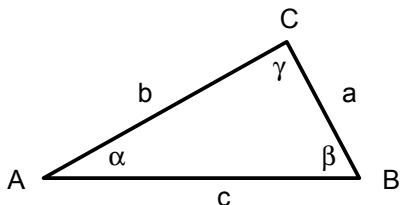
Euklidische Flächensätze : Kathetensätze, Höhensatz

$$\begin{aligned} a^2 &= pc \\ b^2 &= qc \\ h^2 &= pq \end{aligned}$$



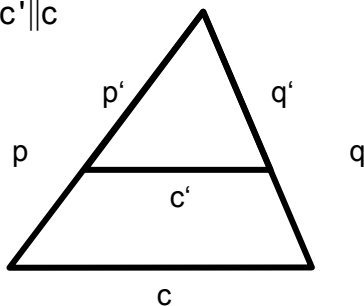
Kongruenzsatz sss :

Zwei Dreiecke Δ_1 , Δ_2 sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen .



Strahlensätze

$c' \parallel c$



1. Strahlensatz

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$$

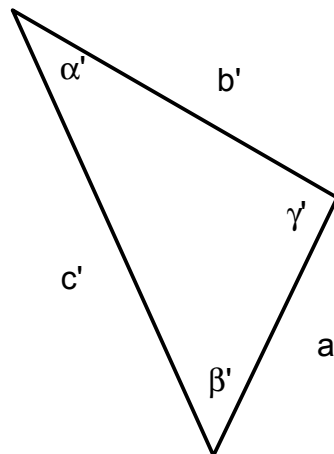
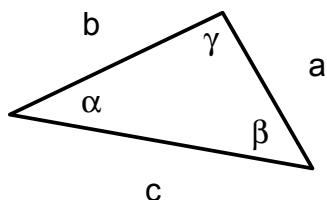
2. Strahlensatz

$$\frac{p'}{p} = \frac{c'}{c} \quad \frac{q'}{q} = \frac{c'}{c}$$

Winkelgleichheit ähnlicher Dreiecke

Gegeben seien die ähnlichen Dreiecke Δabc , $\Delta a'b'c'$ mit

$a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$. Dann stimmen die Dreiecke in allen drei Winkeln überein.

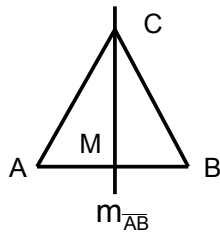


Beweise

Charakterisierung der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$

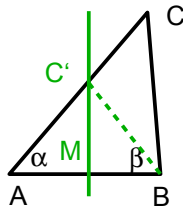
$$C \in m_{\overline{AB}} \Leftrightarrow |CA| = |CB|$$

Sei $C \in m_{\overline{AB}}$. Dann ist $\triangle AMC \cong \triangle BMC$ (**Kongruenzaxiom sws**), d. h.
 $|CA| = |CB|$.



Sei $C \notin m_{\overline{AB}}$. Dann gibt es $C' \in m_{\overline{AB}}$ mit $|AC'| = |BC'|$, und es folgt:

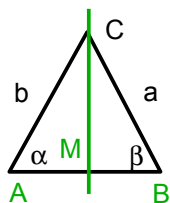
$$|AC| = |AC'| + |C'C| = |BC'| + |C'C| > |BC|$$



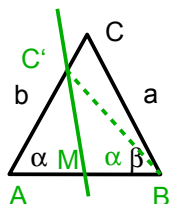
Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Sei $a = b$. Dann ist $C \in m_{\overline{AB}}$ und $\triangle AMC \cong \triangle BMC$, also $\alpha = \beta$.



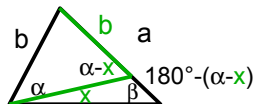
Sei $\alpha = \beta$. Angenommen $C \notin m_{\overline{AB}}$. Dann schneidet $m_{\overline{AB}}$ die Seite b in C' und $\alpha < \beta$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $C \in m_{\overline{AB}}$ und $a = b$.



Seiten und Winkel

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Sei $a > b$.



$$x + 180^\circ - (\alpha - x) + \beta = 180^\circ$$

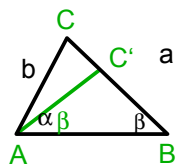
$$x + 180^\circ - \alpha + x + \beta = 180^\circ$$

$$x - \alpha + x + \beta = 0^\circ$$

$$2x + \beta = \alpha$$

$$\alpha > \beta$$

Sei $\alpha > \beta$.



$$a = |BC| = |BC'| + |C'C| = |AC'| + |C'C| > |AC| = b$$

Satz des Thales

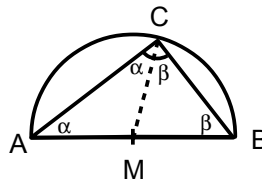
Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

Wegen der Gleichschenkligkeit der Dreiecke und dem Winkelsummensatz für Dreiecke gilt

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

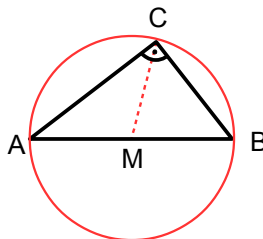
$$2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$(\alpha + \beta) = 90^\circ$$



Satz vom Umkreis

Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit $\angle C = 90^\circ$ halbiert die Hypothese $\overline{AB}$.



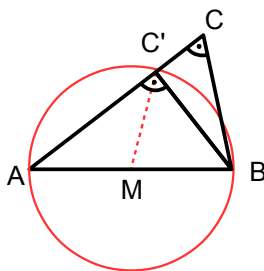
Sei $|AB| = c$ und M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Dann sind $A, B \in K_{M, \frac{c}{2}}$.

Angenommen, $C \notin K_{M, \frac{c}{2}}$, sondern zum Beispiel außerhalb.

Dann gibt es ein $C' \in K_{M, \frac{c}{2}}$, so dass nach dem Satz von Thales das Dreieck $\triangle ABC'$ rechtwinklig ist mit $\angle C' = 90^\circ$.

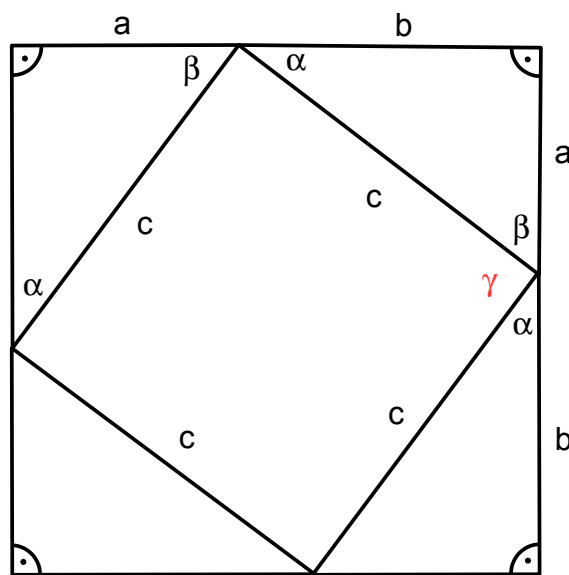
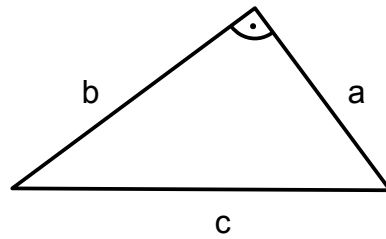
Dann hätte aber das Dreieck $\triangle BCC'$ zwei rechte Winkel. Widerspruch! Also ist $C \in K_{M, \frac{c}{2}}$.



Satz des Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Winkelsummensatz

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Winkel an Geraden

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$90^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$

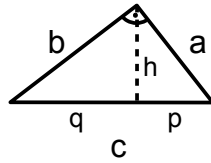
Flächenbetrachtung

$$(a + b)^2 = c^2 + \frac{4 \cdot ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Euklidische Flächensätze : Kathetensätze, Höhensatz



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c = p + q$$

$$a^2 = p^2 + h^2$$

$$b^2 = q^2 + h^2$$

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = (p + q)^2$$

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$h^2 = pq \quad \text{Höhensatz}$$

$$a^2 = p^2 + h^2$$

$$a^2 = p^2 + pq$$

$$a^2 = p(p + q)$$

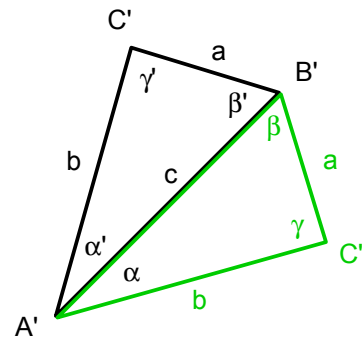
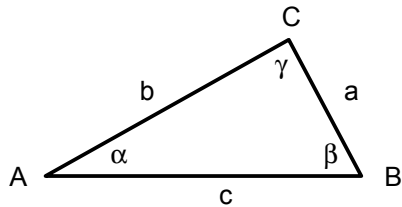
$$a^2 = pc \quad \text{Kathetensatz}$$

Analog :

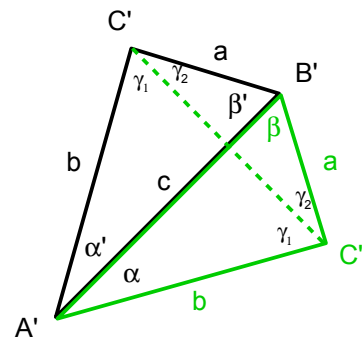
$$b^2 = qc \quad \text{Kathetensatz}$$

Kongruenzsatz sss :

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen .



Konstruiere nach dem **Kongruenzaxiom sws** das Dreieck $\triangle A'B'C''$ mit $\angle A' = \alpha$. Dann sind $\angle B' = \beta$, $\angle C'' = \gamma$.



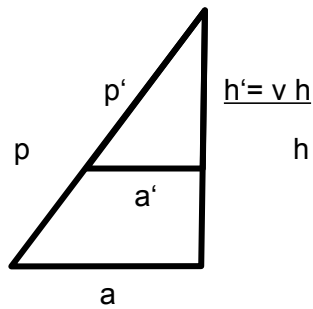
Betrachte die gleichschenkligen Dreiecke $\triangle C'C''A'$, $\triangle C'C''B'$. Es folgt dann :

$$\angle C' = \gamma' = \gamma_1 + \gamma_2 \quad , \quad \angle C'' = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \quad , \quad \text{also} \quad \gamma' = \gamma \quad .$$

Nach dem **Kongruenzaxiom sws** ist dann $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A'B'C''$, und es gilt :

$$\alpha' = \alpha \quad , \quad \beta' = \beta \quad .$$

Strahlensätze



Flächenbetrachtung

$$\frac{a'h'}{2} + \frac{a+a'}{2}(h-h') = \frac{ah}{2}$$

$$a'h' + (a+a')(h-h') = ah$$

$$a'h' + ah - ah' + a'h - a'h' = ah$$

$$-ah' + a'h = 0$$

$$a'h = ah'$$

$$a' = \frac{h'}{h}a$$

$$\underline{a' = va}$$

Satz des Pythagoras

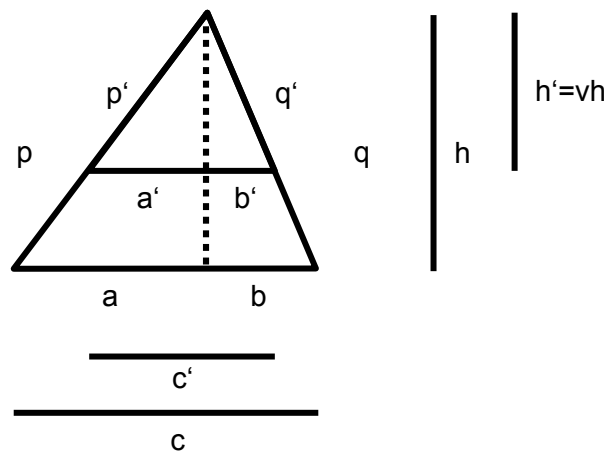
$$p'^2 = h'^2 + a'^2$$

$$p'^2 = (vh)^2 + (va)^2$$

$$p'^2 = v^2(h^2 + a^2)$$

$$p'^2 = v^2p^2$$

$$\underline{p' = vp}$$



$$p' = vp$$

$$q' = vq$$

$$a' = va$$

$$b' = vb$$

$$a' + b' = va + vb$$

$$a' + b' = v(a + b)$$

$$\underline{c' = vc}$$

1. Strahlensatz

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$$

2. Strahlensatz

$$\frac{p'}{p} = \frac{c'}{c}$$

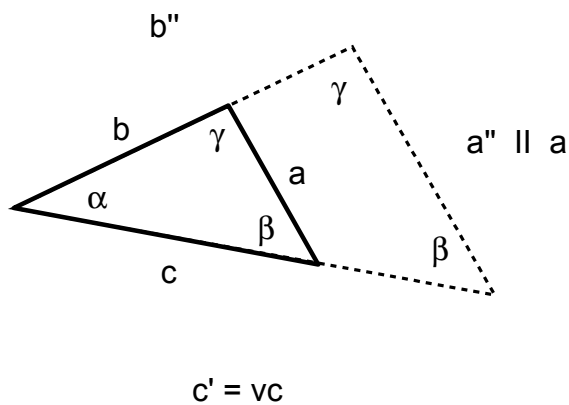
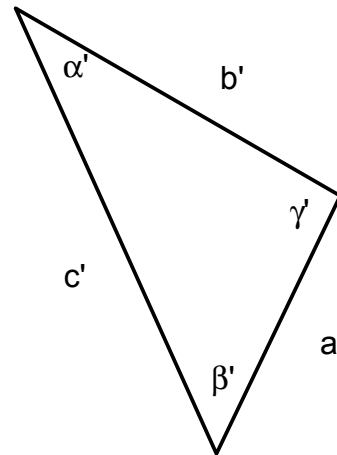
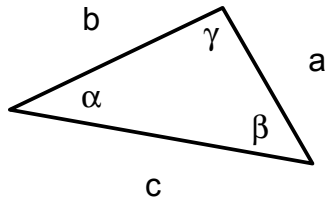
$$\frac{q'}{q} = \frac{c'}{c}$$

Winkelgleichheit ähnlicher Dreiecke

Gegeben seien die **ähnlichen Dreiecke** Δabc , $\Delta a'b'c'$ mit

$$a' = va \text{ , } b' = vb \text{ , } c' = vc \text{ .}$$

Dann stimmen die Dreiecke in allen drei Winkeln überein.



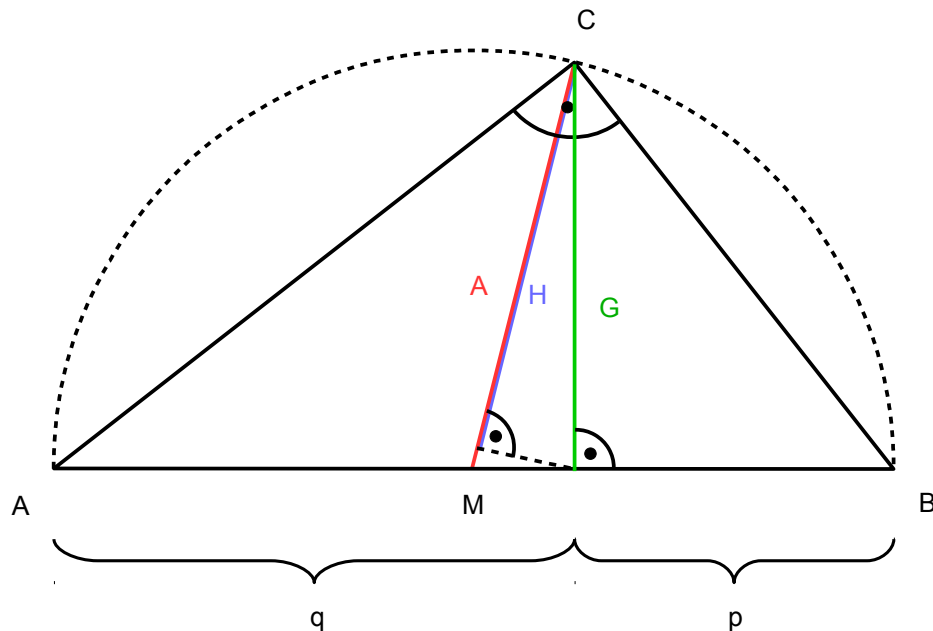
Nach den **Strahlensätzen** gilt : $a'' = va = a'$, $b'' = vb = b'$.

Also sind die Dreiecke $\Delta a''b''c''$, $\Delta a'b'c'$ nach dem **Kongruenzsatz sss** kongruent und stimmen in allen drei Winkeln überein :

$$\alpha = \alpha' \text{ , } \beta = \beta' \text{ , } \gamma = \gamma' \text{ .}$$

Die 3 klassischen Mittelwerte am rechtwinkligen Dreieck

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle C = 90^\circ$.



Umkreisradius A von $\triangle ABC$

$$A = \frac{p + q}{2}$$

$$p < A < q$$

Arithmetisches Mittel von p und q .

Höhe G von $\triangle ABC$

$$G = \sqrt{p \cdot q}$$

$$p < G < q$$

Geometrisches Mittel von p und q .

Projektion H von G auf A

$$H = \frac{2 \cdot p \cdot q}{p + q}$$

$$p < H < q$$

Harmonisches Mittel von p und q .

Beweis :

Umkreisradius :

Der Radius des Umkreises im rechtwinkligen Dreieck ist gleich der halben Hypotenuse :

$$A = \frac{p + q}{2}$$

$$\begin{aligned} p &< q \\ 2p &< p+q \\ p &< \frac{p+q}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &< q \\ p+q &< 2q \\ \frac{p+q}{2} &< q \end{aligned}$$

$$p < A = \frac{p+q}{2} < q$$

Höhensatz :

$$\begin{aligned} G^2 &= p \cdot q \\ G &= \sqrt{p \cdot q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &< q \\ p^2 &< pq \\ p &< \sqrt{pq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &< q \\ pq &< q^2 \\ \sqrt{pq} &< q \end{aligned}$$

$$p < G = \sqrt{pq} < q$$

Kathetensatz :

$$\begin{aligned} G^2 &= H \cdot A \\ H &= \frac{G^2}{A} \\ H &= \frac{p \cdot q}{\frac{p + q}{2}} \\ H &= \frac{2 \cdot p \cdot q}{p + q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &< q \\ p^2 &< pq \\ p^2 + pq &< 2pq \\ p(p+q) &< 2pq \\ p &< \frac{2pq}{p+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &< q \\ pq &< q^2 \\ 2pq &< pq + q^2 \\ 2pq &< (p+q)q \\ \frac{2pq}{p+q} &< q \end{aligned}$$

$$p < H = \frac{2 \cdot p \cdot q}{p + q} < q$$

q.e.d.

Zusammenhang I der 3 klassischen Mittelwerte

Satz :

Für das **Arithmetische** , **Geometrische** und das **Harmonische Mittel** der Zahlen p und q mit $A = \frac{p+q}{2}$, $G = \sqrt{p \cdot q}$ und $H = \frac{2 \cdot p \cdot q}{p+q}$ gelten folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen:

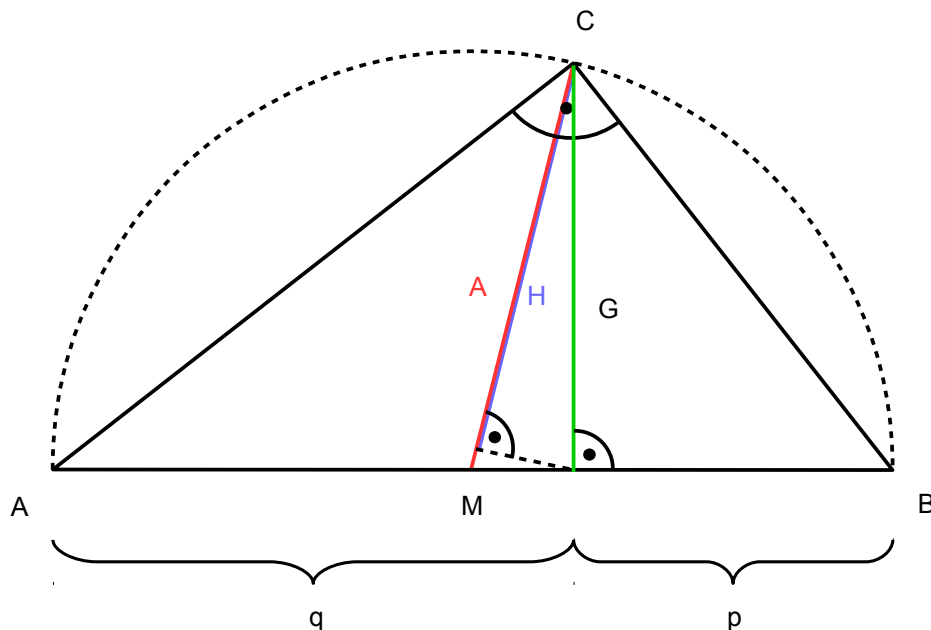
$$H < G < A \quad \text{falls} \quad p \neq q \quad ; \quad H = G = A \quad \text{falls} \quad p = q$$

Beweis :

1) Geometrisch-anschaulicher Beweis :

Wie bereits gezeigt kommen alle 3 Mittelwerte in der folgenden Figur vor :

Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle C = 90^\circ$.



Weil die Katheten im rechtwinklige Dreieck immer kleiner als die Hypotenuse sind, kann man die Ungleichungen unmittelbar aus der Zeichnung ablesen.

Falls $p=q$ ist fallen alle Strecken zusammen, und es gilt $H = G = A$

2) Algebraischer Beweis :

$$H < G$$

$$\frac{2 \sqrt{pq}}{p+q} < \sqrt{\frac{p+q}{2}}$$

$$\frac{4pq}{(p+q)^2} < \frac{p+q}{2}$$

$$\frac{4pq}{(p+q)^2} < 1$$

$$4pq < (p+q)^2$$

$$4pq < p^2 + 2pq + q^2$$

$$0 < p^2 - 2pq + q^2$$

$$0 < (p-q)^2 \quad \text{Wahre Aussage, falls } p \neq q !$$

$$\text{Falls } p=q \text{ gilt } H = \frac{2 \sqrt{p^2}}{2p} = p = \sqrt{\frac{p+p}{2}} = G .$$

$$G < A$$

$$\sqrt{\frac{p+q}{2}} < \frac{p+q}{2}$$

$$2\sqrt{pq} < p+q$$

$$4pq < (p+q)^2$$

$$4pq < p^2 + 2pq + q^2$$

$$0 < p^2 - 2pq + q^2$$

$$0 < (p-q)^2 \quad \text{Wahre Aussage, falls } p \neq q !$$

$$\text{Falls } p=q \text{ gilt } G = \sqrt{\frac{p+p}{2}} = p = \frac{p+p}{2} = A .$$

Zusammenhang II der 3 klassischen Mittelwerte

Satz :

Für das **Arithmetische** , **Geometrische** und das **Harmonische Mittel** der Zahlen p und q mit $A = \frac{p+q}{2}$, $G = \sqrt{p \cdot q}$ und $H = \frac{2 \cdot p \cdot q}{p+q}$ gilt :

$$G = \sqrt{H \cdot A} .$$

Das Geometrische Mittel ist gleich dem Geometrischen Mittel vom Harmonischen und Arithmetischen Mittel !

Beweis :

$$\sqrt{H \cdot A} = \sqrt{\frac{2pq}{p+q} \cdot \frac{p+q}{2}}$$

$$\sqrt{H \cdot A} = \sqrt{p \cdot q}$$

$$\sqrt{H \cdot A} = G$$

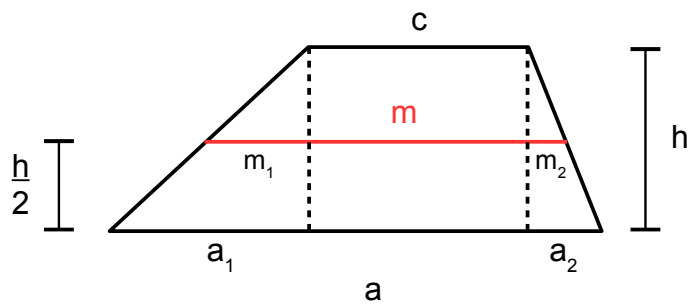
Bemerkung :

$$H = \frac{2 \cdot p \cdot q}{p+q} = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{2}}$$

Das Harmonische Mittel ist der Kehrwert des Arithmetischen Mittels der Kehrwerte.

Die 3 klassischen Mittelwerte am Trapez

Teilung des Trapezes in halber Höhe



$$\frac{m_1}{a_1} = \frac{\frac{h}{2}}{h}$$

$$\frac{m_1}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$m_1 = \frac{a_1}{2} \quad \text{analog :} \quad m_2 = \frac{a_2}{2}$$

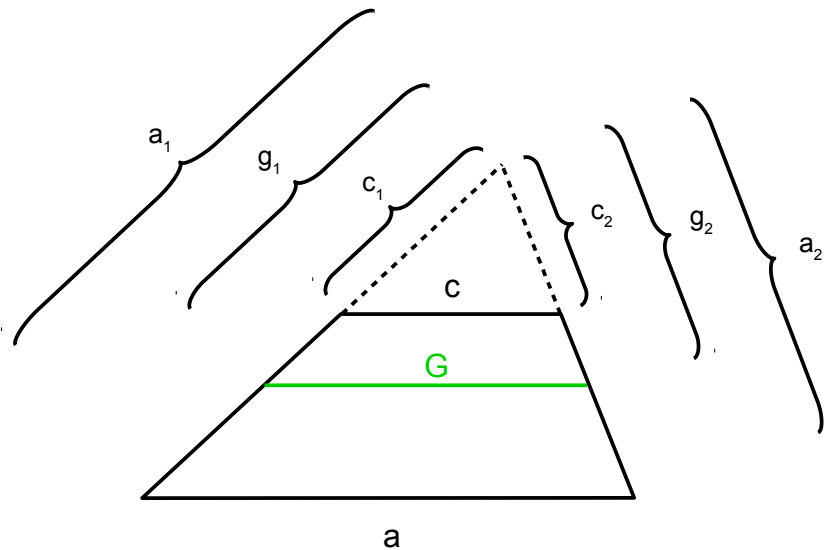
$$m = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + c$$

$$m = \frac{a_1 + a_2 + 2c}{2}$$

$$m = \frac{a_1 + a_2 + c + c}{2}$$

$$m = \frac{a + c}{2}$$

Teilung des Trapezes in zwei ähnliche Trapeze



Ähnlichkeitsbedingung :

$$\frac{a}{G} =: k \quad \frac{G}{c} =: k$$

Strahlensatz :

$$\frac{a_1}{g_1} = \frac{a}{G} =: k$$

$$\frac{g_1}{c_1} = \frac{G}{c} =: k$$

$$\frac{a_1}{g_1} = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\frac{a_1}{g_1} - 1 = \frac{g_1}{c_1} - 1$$

$$\frac{a_1 - g_1}{g_1} = \frac{g_1 - c_1}{c_1}$$

$$\frac{a_1 - g_1}{g_1 - c_1} = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\frac{a_1 - g_1}{g_1 - c_1} = k$$

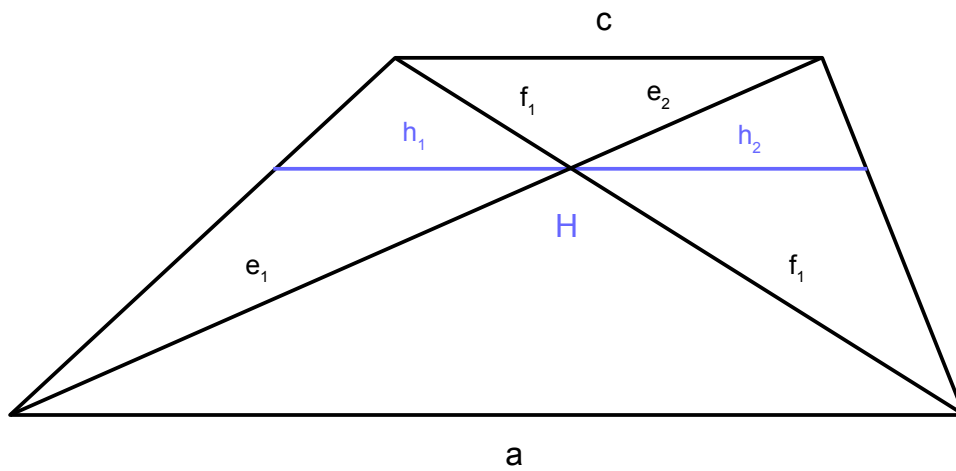
$$\text{analog : } \frac{a_2 - g_2}{g_2 - c_2} = k$$

Wegen der Winkelgleichheit ist Ähnlichkeit mit dem Ähnlichkeitsfaktor k gezeigt .

$$\frac{a}{G} = \frac{G}{c} \Rightarrow$$

$$G = \sqrt{a \cdot c}$$

Waagrechte Teilung des Trapezes durch den Diagonalschnittpunkt



Strahlensätze :

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{e_1}{e_2} + 1 = \frac{a}{c} + 1$$

$$\frac{f_1}{f_2} + 1 = \frac{a}{c} + 1$$

$$\frac{e_1 + e_2}{e_2} = \frac{a + c}{c}$$

$$\frac{f_1 + f_2}{f_2} = \frac{a + c}{c}$$

$$\frac{e_1 + e_2}{e_2} = \frac{a}{h_2}$$

$$\frac{f_1 + f_2}{f_2} = \frac{a}{h_1}$$

$$\frac{a + c}{c} = \frac{a}{h_2}$$

$$\frac{a + c}{c} = \frac{a}{h_1}$$

$$h_2 = \frac{a \cdot c}{a + c}$$

$$h_1 = \frac{a \cdot c}{a + c}$$

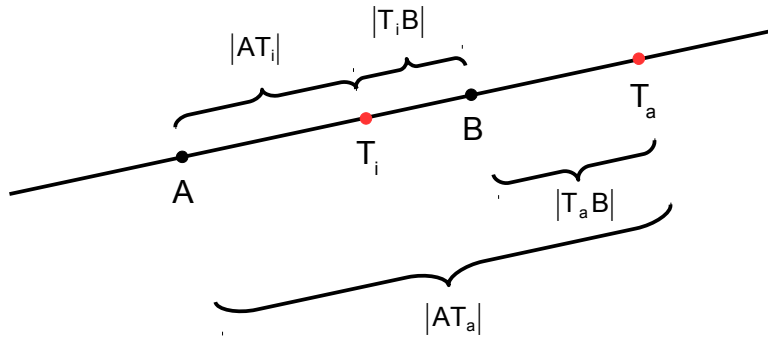
$$H = h_2 + h_1$$

$$H = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a + c}$$

Die Harmonische Teilung

Gegeben sei die Gerade AB . Gesucht sind Punkte T_i , T_a auf AB mit

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|} > 1.$$



Die Punkte T_i , T_a heißen **Harmonische Punkte** zu A , B .

Bemerkung :

Dann sind auch die Punkte B , A **Harmonische Punkte** zu T_a , T_i , denn :

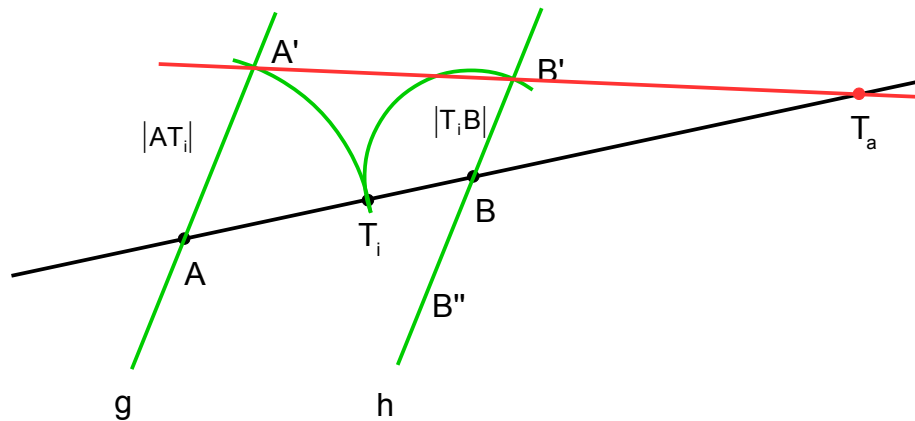
$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

$$\frac{|T_aB|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|AT_i|}$$

$$\frac{|T_aB|}{|BT_i|} = \frac{|T_aA|}{|AT_i|}$$

Lösung :

Falls man den Punkt $T_i \in \overline{AB}$ vorgibt, kann man den Punkt $T_a \in AB$ wie folgt konstruieren :



(1) g durch A , h durch B , $g \parallel h$

(2) $K(A, |AT_i|)$, $K(B, |T_i B|)$

(3) $A' \in K(A, |AT_i|)$, $B' \in K(B, |T_i B|)$, A' , B' liegen auf der gleichen Seite

bezüglich AB

(4) $A'B' \cap AB = \{T_a\}$

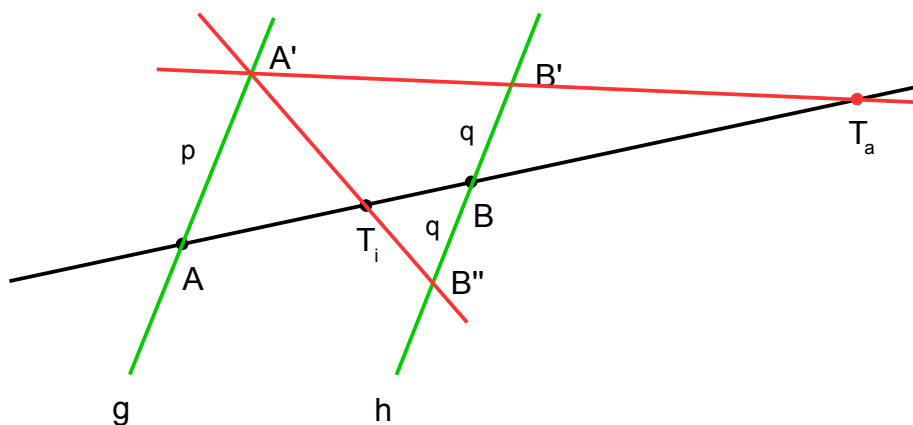
Nach dem 2. Strahlensatz gilt :

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|}$$

$$\frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|}$$

Lösung :

Falls man für das Verhältnis eine bestimmte Zahl vorgibt, etwa $\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{p}{q} > 1$, findet man die Punkte T_i , T_a auf AB nach folgender Konstruktion :



- (1) g durch A , h durch B , $g \parallel h$
- (2) $A' \in g$ mit $|AA'| = p$, $B' \in h$ mit $|BB'| = q$, A' , B' liegen auf der gleichen Seite bezüglich AB
- (3) $A' \in g$ mit $|AA'| = p$, $B'' \in h$ mit $|BB''| = q$, B'' , B' liegen auf verschiedenen Seiten bezüglich AB
- (4) $A'B' \cap AB = \{T_a\}$, $A'B'' \cap AB = \{T_i\}$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt :

$$\frac{p}{q} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{|AT_i|}{|T_iB|}$$

Also :

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

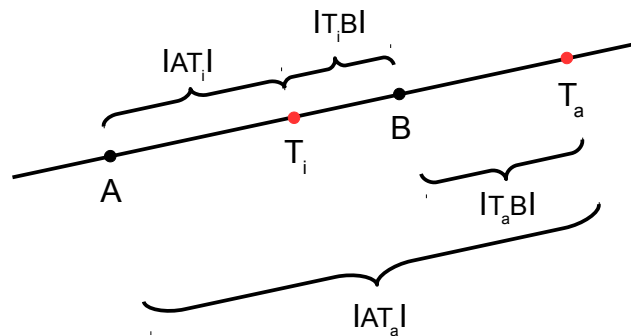
q.e.d.

Zusammenhang zwischen Harmonischer Teilung und Harmonischem Mittel

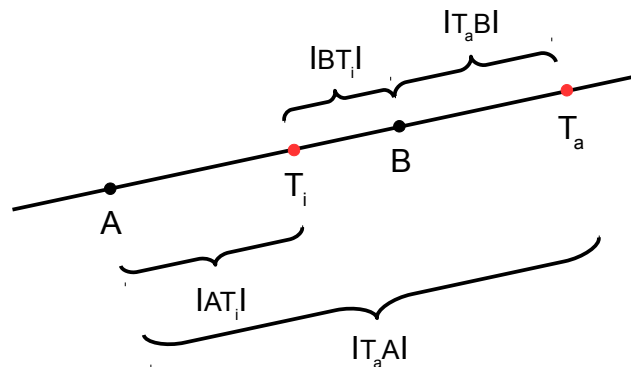
Gegeben seien 4 Punkte auf einer Geraden $A < T_i < B < T_a$, so dass die Punkte T_i , T_a Harmonische Punkte bezüglich A , B sind, und umgekehrt, dass die Punkte B , A Harmonische Punkte bezüglich T_a , T_i sind.

Dann gelten die Gleichungen :

$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$



$$\frac{|T_aB|}{|BT_i|} = \frac{|T_aA|}{|AT_i|}$$



Behauptung :

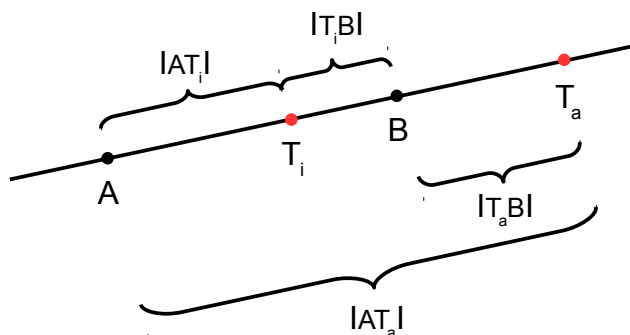
Betrachtet man nur die Abstände $|AT_i| < |AB| < |AT_a|$ bzw. $|T_aB| < |T_aT_i| < |T_aA|$, so ist

$$|AB| \text{ das } \mathbf{Harmonische Mittel} \text{ von } |AT_i|, |AT_a|, \text{ d. h. } |AB| = \frac{2 |AT_i| |AT_a|}{|AT_i| + |AT_a|}$$

Analog ist

$$|T_aT_i| \text{ das } \mathbf{Harmonische Mittel} \text{ von } |T_aB|, |T_aA|, \text{ d. h. } |T_aT_i| = \frac{2 |T_aB| |T_aA|}{|T_aB| + |T_aA|}$$

Beweis :



$$\frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|}$$

In der Gleichung müssen $|T_iB|$ und $|T_aB|$ ersetzt werden durch

$$|T_iB| = |AB| - |AT_i| \quad , \quad |T_aB| = |AT_a| - |AB| \quad .$$

$$\frac{|AT_i|}{|AB| - |AT_i|} = \frac{|AT_a|}{|AT_a| - |AB|}$$

$$|AT_i|(|AT_a| - |AB|) = |AT_a|(|AB| - |AT_i|)$$

$$|AT_i||AT_a| - |AT_i||AB| = |AT_a||AB| - |AT_a||AT_i|$$

$$|AT_i||AT_a| = |AT_a||AB| + |AT_i||AB| - |AT_a||AT_i|$$

$$2 |AT_i||AT_a| = |AT_a||AB| + |AT_i||AB|$$

$$2 |AT_i||AT_a| = (|AT_a| + |AT_i|)|AB|$$

$$\frac{2 |AT_i| |AT_a|}{|AT_a| + |AT_i|} = |AB|$$

$$|AB| = \frac{2 |AT_i| |AT_a|}{|AT_i| + |AT_a|}$$

q.e.d.

Verallgemeinerung des Arithmetischen und Geometrischen Mittels

Für alle $a_1 \leq \dots \leq a_n$: $A := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, $G := \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$

Die Ungleichung vom Arithmetischen und Geometrischen Mittel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1 \leq \dots \leq a_n$ gilt :

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n , \quad \boxed{A := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} =: G} .$$

Beweis durch vollständige Induktion :

(I) $n = 2$: $\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 \cdot a_2$ wahre Aussage

(II) Sei die Behauptung $\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ wahr .

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &= \left(\frac{n \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \\ \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &= \left(\frac{(n+1) \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + a_{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}{n+1} \right)^{n+1} \\ \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &= \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}{n+1} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nach der **Bernoullischen Ungleichung** folgt :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &\geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{n+1} + (n+1) \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \frac{a_{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}{n+1} \\ \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &\geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{n+1} + \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \left(a_{n+1} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \\ \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &\geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{n+1} + \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n a_{n+1} - \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{n+1} \\ \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} &\geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n a_{n+1} \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme folgt : $\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$

Verallgemeinerung des Harmonischen Mittels

In Anlehnung an die Eigenschaft des Harmonischen Mittels der zwei Zahlen p , q ,

$$\text{dass } H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{2}} \text{ ist,}$$

dass also das **Harmonische Mittel der Kehrwert des Arithmetischen Mittels der Kehrwerte** ist, kann man im Fall der Zahlen $a_1 \leq \dots \leq a_n$ definieren:

$$H := \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}}$$

Die Ungleichungen vom Arithmetischen und Geometrischen und Harmonischen Mittel

Wegen

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}} = \frac{1}{\frac{1}{G}} = G$$

ist die Ungleichung vom Arithmetischen, Geometrischen und Harmonischen Mittel allgemein gültig:

$$A \geq G \geq H$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}}$$