Mathematische Untersuchungen zu Ein-Linien-Figuren

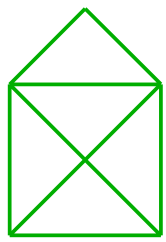
Ein Lese- und Arbeitsheft

Arno Fehringer , Wilhelm-Bläsig-Schule, März 2018

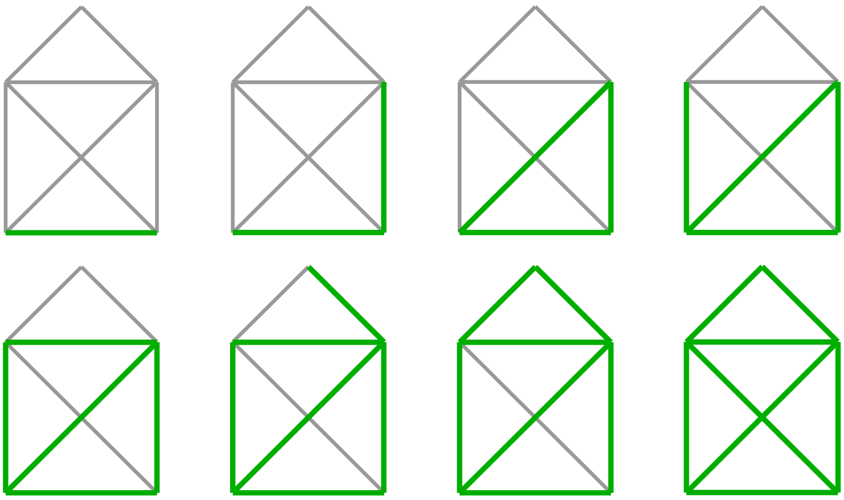
Pablo Picasso : Hund
https://www.germanposters.de/picasso-pablo-hund.html

Ein-Linien-Figuren sind Figuren, die in einem Zug gezeichnet werden können, also ohne den Stift vom Blatt abzuheben.

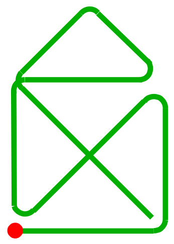
Ein aus der Grundschule bekanntes Beispiel hierfür ist das sogenannte „Haus vom Nikolaus“ :



Man kann es zum Beispiel auf folgende Weise zeichnen :



Die nachfolgende Figur beschreibt den Zeichenweg knapper : Man beginnt links unten beim roten Punkt und zeichnet die Linien in der angegeben Reihenfolge :



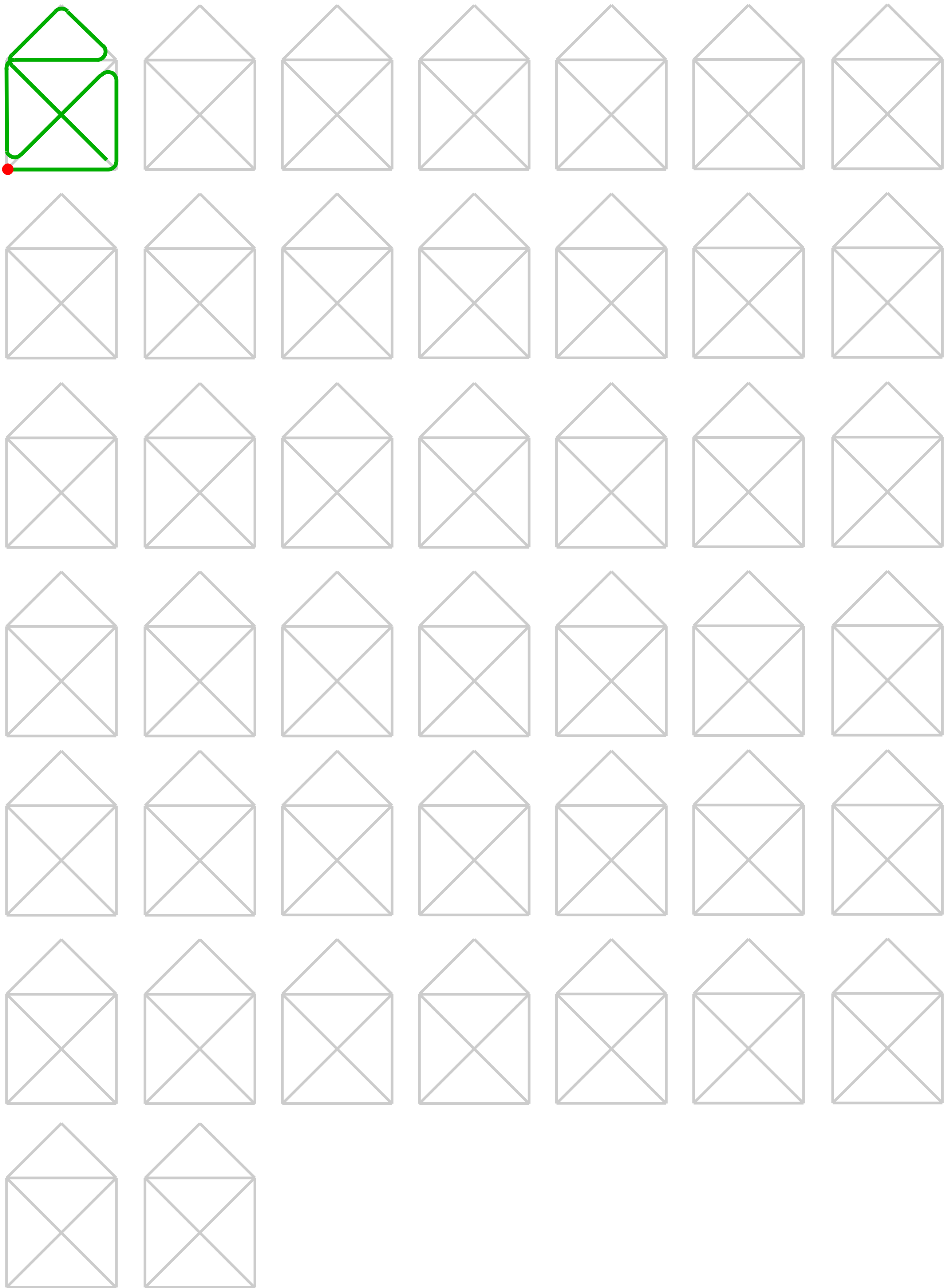
Aufgabe 1

Finde einige weitere Möglichkeiten, das Haus des Nikolaus zu zeichnen, indem Du ebenfalls von links unten beginnst !
Man kann es kaum glauben: Es gibt 44 unterschiedliche Möglichkeiten, das Haus vom Nikolaus zu zeichnen , wenn man links unten beginnt !

Aufgabe 2

Ist es möglich, einen anderen Punkt als Startpunkt zu wählen ?
Antwort : ___________

Zu Aufgabe 1 und 2



Vom weltberühmten Maler **Pablo Picasso** gibt es auch einige Ein-Linien-Figuren, wie zum Beispiel der auf der Titelseite abgebildete Hund.

Moderne Künstler wie das Disigner-Duo, **Emma und Stephane**, aus Frankreich, beschäftigen sich ebenfalls mit dieser Thematik, welche sie „**one-line minimalist artwork**“ nennen. Hierzu folgende Links :

http://www.differantly.com/

http://www.differantly.com/about/

DFT aka Differantly is a French creative duo working between Paris and Berlin.

The artists’ practice ranges from art direction to one line illustration, product design, wall art and installation. In early 2017, they were asked to customize Adidas headquarters building facade, creating large-scaled artworks of the brand’s most iconic models.

With its distinctive single line drawing, the duo deconstructs complex imagery into two-dimensional minimalist art, focusing on what creates a subject’s core identity.

“During our process, we go through phases that are visually rich and complex before removing what's not substantive. It's a maturation process that can be painful as it consists of letting go, giving up. But, it’s also very demanding as minimalism requests a certain level of perfection. Every element must have its sense, its utility, its intrinsic beauty.”

DFT’s original pieces are held around the world and the duo is currently working on making their one line art into sculptures.

Collaborations : Adobe, 21st Century Fox, Adidas, Nissan..

Features : Vice, Designboom, Hypebeast, Etapes, Fubiz..

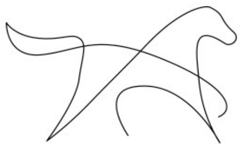
https://www.facebook.com/differantly/

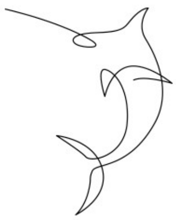
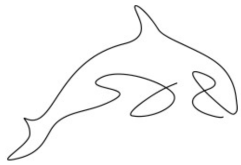
Aufgabe 3

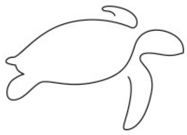
Gehe ins Internet und schau Dir die genannten Internetseiten des Duos Emma und Stephane an !
Es gibt zur Arbeit der Künstler auch ein Videoclip !

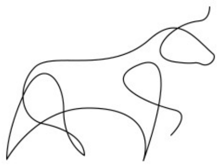
Unter dem folgenden Link sind einige Werke des Künstlerduos Emma und Stepahane zu sehen :

https://www.behance.net/gallery/28382239/One-line-Animal-logos

Aufgabe 4
Welche Tiere sind hier dargestellt ? Schreibe die Namen unter die Figuren !

Aufgabe 5
Versuche, eine Tierfigur nachzuzeichnen, oder entwerfe eine andere Figur !

Zu Aufgabe 5

Aufgabe 6
Welche der Buchstaben sind keine Ein-Linien-Figuren ? Kreise diese ein !

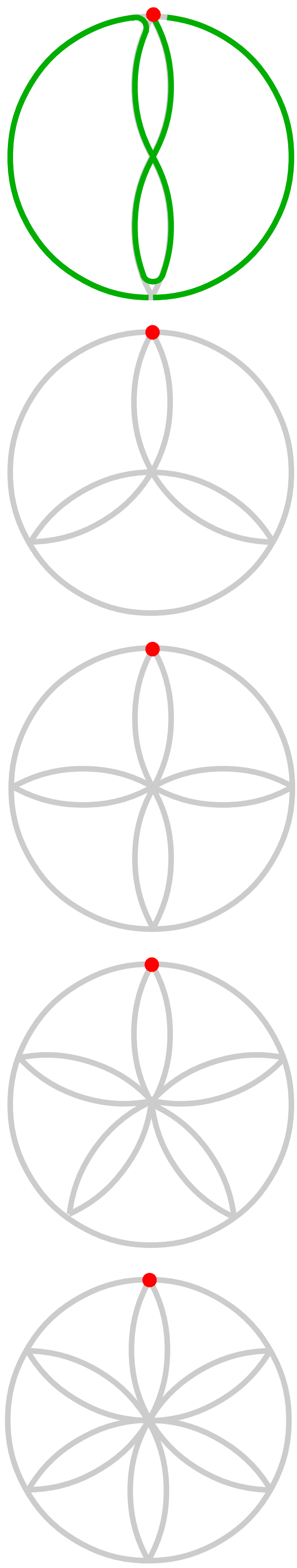
A B C D E F G H

I J K L M N O P

Q R S T U V W X

Y Z

Folgende Figuren sind Ein-Linien-Figuren mit gleichem Start- und Endpunkt.

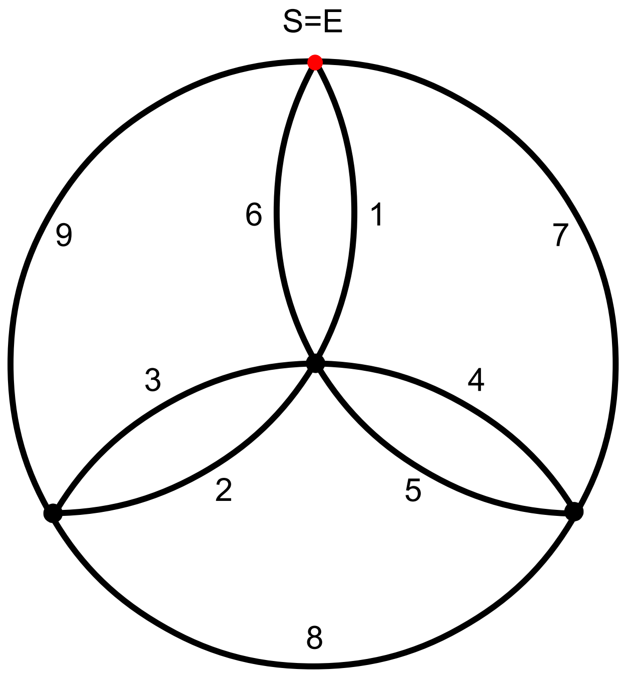


Aufgabe 7
Zeichne die Figuren in einem Zug vom rot markierten Start- und Endpunkt aus !

Beschreibung eines Linienzugs

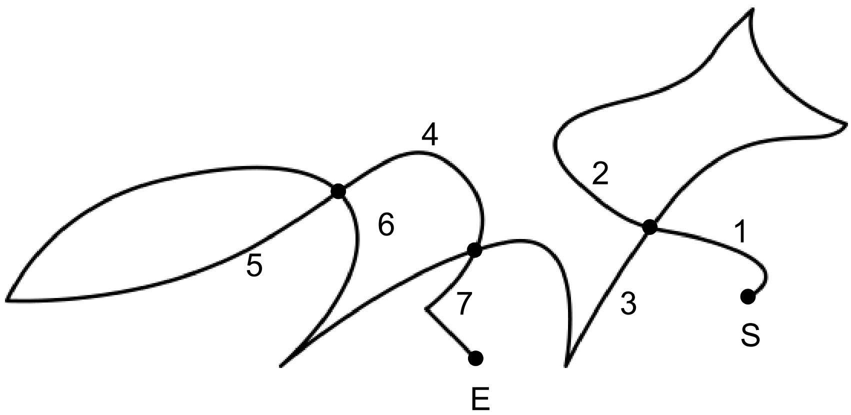
Start- und Endpunkt können bei Ein-Linien-Figuren gleich oder verschieden sein.

Bei der folgenden Figur sind Start- und Endpunkt gleich , S = E :



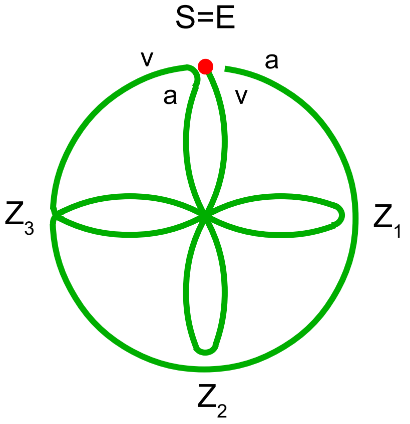
Nummeriert man die Linien von 1 bis 9, so ist ein möglicher **Linienzug** gegeben durch die Zeichenfolge : S 167548329 S

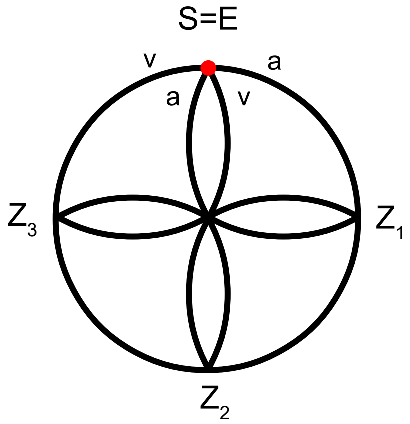
Bei den Tierfiguren kommen unterschiedliche Start- und Endpunkte S und E vor, wie zum Beispiel beim „Fuchs“ :



Aufgabe 8
Beschreibe einen möglichen Linienzug beim „Fuchs“ !

Notwendige Bedingungen, dass eine Figur eine Ein-Linien-Figur ist





Start- und Endpunkt sind gleich und rot markiert, S = E .

Sowohl der Start- und Endpunkt als auch Zwischenpunkte Z_1 , Z_2 , Z_3 müssen während des Linienzugs mehrmals angelaufen und wieder verlassen werden.

Am Startpunkt S hängen 4 Linien, auf einer der Linien verlässt man ihn, auf einer anderen kommt man an, dann verlässt man ihn auf einer dritten und kommt schließlich auf einer vierten wieder an.
Bezeichnet man das Verlassen des Punktes mit v und das Ankommen mit a , kann man diese Aktion durch das Symbol vava beschreiben.

Ein Punkt, an dem nur 3 (oder allgemein eine ungerade Anzahl) von Linien hängen, kann nicht Start- und Endpunkt zugleich sein, denn die Aktion hierzu müsste mit vav beschrieben werden, das heißt, man verlässt den Punkt, kommt an und verlässt ihn schließlich wieder. Dann gibt es keine Möglichkeit mehr, zurück zu kehren.

An einem Start- und Endpunkt ist muss also immer eine gerade Anzahl von Linien hängen.

Das Entsprechende gilt auch für jeden Zwischenpunkt . Die Aktion des Ankommens und Verlassens wird hier durch das Symbol avav beschrieben.
Allgemein muss an jedem Zwischenpunkt ebenfalls eine gerade Anzahl von Linien hängen.

Hat eine Figur unterschiedliche Start- und Endpunkte, S ≠ E , so müssen jeweils eine ungerade Anzahl von Linien daran hängen.

Alle anderen Punkte sind Zwischenpunkte, an denen eine gerade Anzahl von Punkten hängen muss.

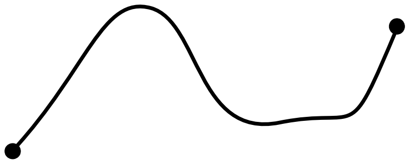
Eine Ein-Linien-Figur mit 1 oder mehr als 2 Punkten, an denen eine ungerade Anzahl von Linien hängen, kann es nicht geben !

Sind die Bedingungen auch hinreichend für eine Ein-Linien-Figur ?

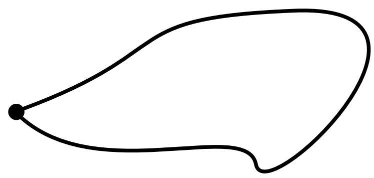
In einer Ein-Linienfigur ist die Anzahl der Punkte, an denen eine ungerade Anzahl von Linien hängen, gerade .

Beweis :

Für die einfachsten Figuren in Form einer Linie oder einer Schlinge ist die Behauptung wahr :



Punkte, an denen eine ungerade Anzahl von Linien hängen : 2



Punkte, an denen eine ungerade Anzahl von Linien hängen : 0

Sowohl die Zahl 2 als auch die Zahl 0 ist gerade .

Nun zeigt man, dass jede Ergänzung der Figur durch Punkte und Linien an der Geradzahligkeit nichts ändert.

Ergänzung	Änderung der Anzahl der Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen
Einfügen eines Punktes auf einer Linie	0
Einfügen einer Schlinge an einen Punkt	0
Anfügen einer Linie an einen Punkt	0 oder 2
Verbinden zweier Punkte durch eine Linie	2 oder -2 oder 0

Aufgabe 9
Begründe an konkreten Beispielen, warum das Verbinden zweier Punkte durch eine Linie eine Anzahlveränderung von 2 oder -2 oder 0 bringt !

Zu Aufgabe 9

Eine Figur ist eine Ein-Linien-Figur genau dann, wenn es entweder 0 oder 2 Punkte gibt, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen.

Beweis :

1. Fall : Die Figur hat 0 **Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen**

Man wählt einen beliebigen Punkt P_1 als Startpunkt und eine daran hängende Linie l_1 welche nach P_2 führt .
Von P_2 aus wählt man eine noch nicht benutzte Linie l_2 , die nach P_3 führt.
Nun halt man schon den Linienzug $P_1 l_1 \; P_2 l_2$.
Das Verfahren wird so fortgesetzt, bis man zu einem Punkt P_s gelangt., von dem aus keine weiteren freien Linien wegführen.
Man hat also den Linienzug $P_1 l_1 \; P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; P_{s-1} l_{s-1} \; P_s$.
Es ist $P_s = P_1$, denn sonst hätte die Figur einen Punkt P_s an dem eine ungerade Zahl von Linien hängen.

Man hat somit bis jetzt den Linienzug $P_1 l_1 \; P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; P_{s-1} l_{s-1} \; P_1$ **.**

Wenn der Linienzug $P_1 l_1 \; P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; P_{s-1} l_{s-1} \; P_1$ alle Linien der Figur erfasst hat, ist man fertig !

Wenn der Linienzug $P_1 l_1 \; P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; P_{s-1} l_{s-1} \; P_1$ nicht alle Linien der Figur erfasst hat, gibt es unter den Punkten den Linienzugs einen Punkt P_i , von dem eine freie Linie ausgeht. Dieser Punkt und die Linie sollen Q_1 und m_1 heißen .
Genau wie zuvor konstruiert man einen Linienzug $Q_1 m_1 \; Q_2 m_2 \; .. \; .. \; .. \; Q_{t-1} m_{t-1} \; Q_1$ **.**

Die bisherigen Linienzüge setzt man zu einem einzigen Linienzug zusammen :
$P_1 l_1 \; P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; Q_1 m_1 \; Q_2 m_2 \; .. \; .. \; .. \; Q_{t-1} m_{t-1} \; Q_1 \; .. \; .. \; .. \; P_{s-1} l_{s-1} \; P_1$

Das so konstruierte Verfahren wird fortgesetzt, so dass man nach endlich vielen Schritten, wenn alle Linien aufgebraucht sind, einen fertigen Linienzug hat, der die Figur zur Ein-Linien-Figur macht .

2. Fall : Die Figur hat genau 2 **Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen**

Die Punkte seien mit P_1 und P_2 bezeichnet . Man zeichnet jetzt eine Hilfslinie l , welche P_1 mit P_2 verbindet .
Die so modifizierte Figur hat jetzt 0 Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen , und es gibt einen entsprechend umfassenden Linienzug $P_1 l \;\; P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; P_n l_n \; P_1$.
Dann umfasst der Linienzug $P_2 l_2 \; .. \; .. \; .. \; P_n l_n \; P_1$ **die ursprüngliche Figur .**

3. Fall : Die Figur hat mehr als 2 Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen

Wir wollen zeigen :
Eine Figur mit mehr als 2 Punkten, an denen eine ungerade Anzahl von Linien hängen, ist keine Ein-Linien-Figur .

Dazu zeigen wir die äquivalente Aussage :
Eine Ein-Linien-Figur hat höchstens 2 Punkte, an denen eine ungerade Anzahl von Linien hängen.

Sei zunächst eine Ein-Linien-Figur mit dem Linienzug $P_1 l_1 \ P_2 l_2 \ .. \ .. \ .. \ P_n l_n \ P_1$ gegeben . Der Startpunkt ist also gleich dem Endpunkt.
Jeder Punkt $P_i \neq P_1$ ist ein Zwischenpunkt, an dem man mehrmals ankommt und diesen wieder verlässt. Bezeichnet man das Ankommen am Punkt mit a und das Verlassen mit v , kann man diese Aktion durch das Symbol av av .. .. .. av beschreiben. Man kommt genau so oft beim Punkt an wie man ihn verlässt .
An jedem Zwischenpunkt hängt also eine gerade Anzahl von Linien.
Entsprechendes gilt für den Startpunkt P_1 , wobei das Aktionsmuster die Form va va .. .. .. va hat .
Die Anzahl der Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängt ist also gleich 0 .

Sei nun eine Ein-Linien-Figur mit dem Linienzug $P_1 l_1 \ P_2 l_2 \ .. \ .. \ .. \ P_{n-1} l_{n-1} \ P_n$ gegeben . Start- und Endpunkt sind verschieden, $P_1 \neq P_n$.
An diesen Punkten muss jeweils eine ungerade Zahl von Linien hängen. Denn die entsprechenden Muster für das Ankommen und Verlassen sind va va .. .. .. va v und av av .. .. .. av a .
An den Zwischenpunkten hängen wiederum nur eine gerade Zahl von Linien.
In diesem Fall ist Anzahl der Punkte, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängt, gleich 2 .

Damit ist gezeigt, dass eine Ein-Linien-Figur entweder 0 oder 2 , und damit höchstens 2 Punkte hat, an denen eine ungerade Zahl von Linien hängen .

Eine (schwierige) Ein-Linien-Figur

Die notwendige Bedingung für S = E ist gegeben : An jedem Punkt hängen nur eine gerade Zahl von Linien.

Aufgabe 10

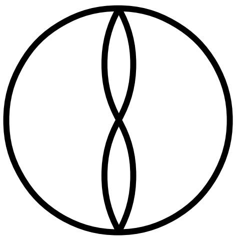
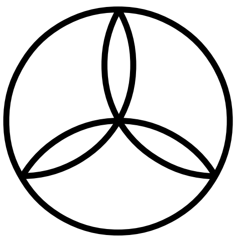
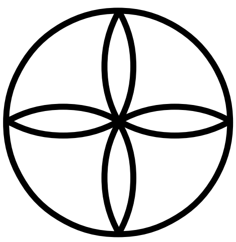
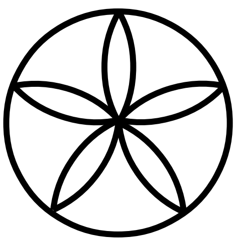
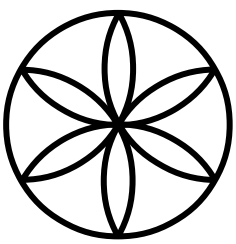
Zeichne die Figur in einem Zug !

Das Verfahren, welches auf den beiden vorigen Seiten beschrieben wurde, kann Dir dabei helfen !

Punkte, Linien und Flächen

Ein-Linien-Figuren bestehen aus den drei Strukturen **Punkte**, **Linien** und **Flächen** .
Von jedem Punkt gehen eine oder mehrere Linien aus. Flächen werden durch Linien begrenzt .

Aufgabe 11
Bestimme für die folgenden 5 Figuren jeweils die Anzahl der Punkte, Linien und Flächen P, L und F, und fülle die Tabelle aus !

	Punkte P	Linien L	Flächen F
	3	6	4
			
			
			
			

Aufgabe 12

Betrachte die Tabelle für die Punkte, Linien und Flächen !

Die jeweiligen Anzahlen wachsen :

Die Anzahl $\left\{\begin{matrix} P \\ L \\ F \end{matrix}\right\}$ nimmt um $\left\{\begin{matrix} 1 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{matrix}\right\}$ zu .

Die Anzahl P + F nimmt um ________ = ___ zu .

Die Anzahl P + F - L nimmt um ___ zu .

Deshalb ändert sich Anzahl P + F - L ________ ! $\boxed{P + F - L \ =\qquad}$!

P	L	F	P + F - L =
3	6	4	3 + 4 - 6 = 1
4	9	6	
5	12	8	
6	15	10	
7	18	12	

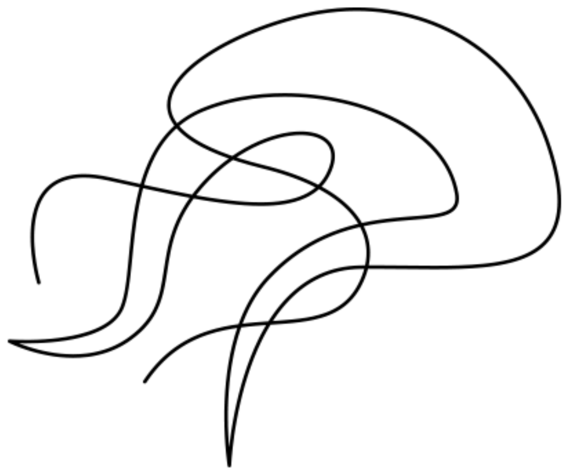
Aufgabe 13

Bestimme für die „Qualle" die Anzahl der Punkte, Linien und Flächen !
Als Punkte zählen auch Anfangs- oder Endpunkte von Linien !

P =   L =   F =

Gilt die Gleichung $P + F - L = 1$?

Antwort : ____________

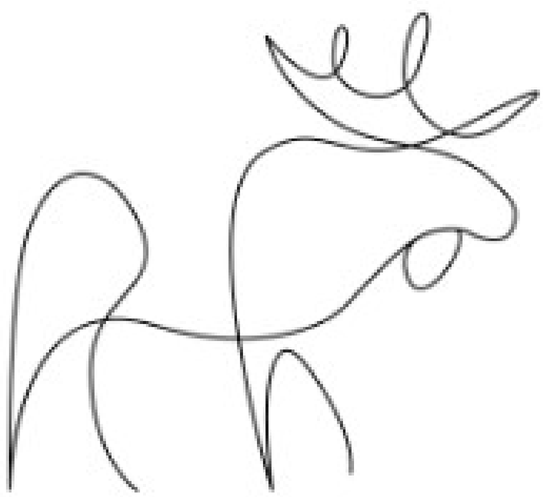


Aufgabe 14

Warum ist der „Elch" keine Ein-Linien-Figur ?

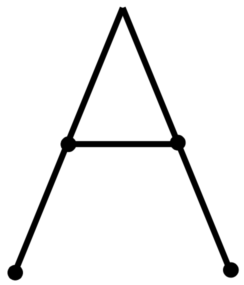
Gilt trotzdem die Gleichung $P + F - L = 1$?

Antwort : ____________



Wie beweist man die Allgemeingültigkeit der Gleichung $P + F - L = 1$?

Wir haben gezeigt, dass es Ein-Linien-Figuren gibt, mit $P + F - L = 1$.
Auch für Nicht-Ein-Linien-Figuren kann die Gleichung $P + F - L = 1$ gelten :



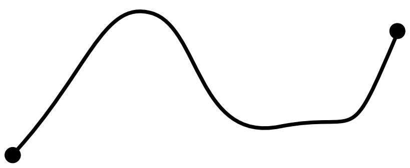
$P + F - L = 4 + 1 - 4 = 1$

$P + F - L = 1$

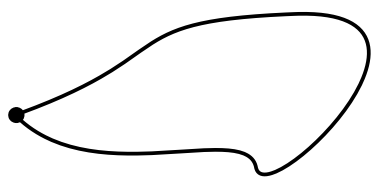
Behauptung :
Für jede Figur aus P Punkten, L Linien und F Flächen gilt $P + F - L = 1$.

Beweis :

Für die einfachsten Figuren in Form einer Linie oder einer Schlinge ist die Behauptung wahr :



$P + F - L = 2 + 0 - 1 = 1$



$P + F - L = 1 + 1 - 1 = 1$

Nun zeigt man, dass jede Ergänzung der Figur durch Punkte und Linien an der Gleichung nichts ändert.

Ergänzung	Veränderung P + F	Veränderung L	Veränderung P + F - L
Einfügen eines Punktes auf einer Linie	1	1	0
Einfügen einer Schlinge an einen Punkt	1	1	0
Anfügen einer Linie an einen Punkt	1	1	0
Verbinden zweier Punkte durch eine Linie	1	1	0

Damit ist gezeigt, dass $P + F - L = 1$ ist .

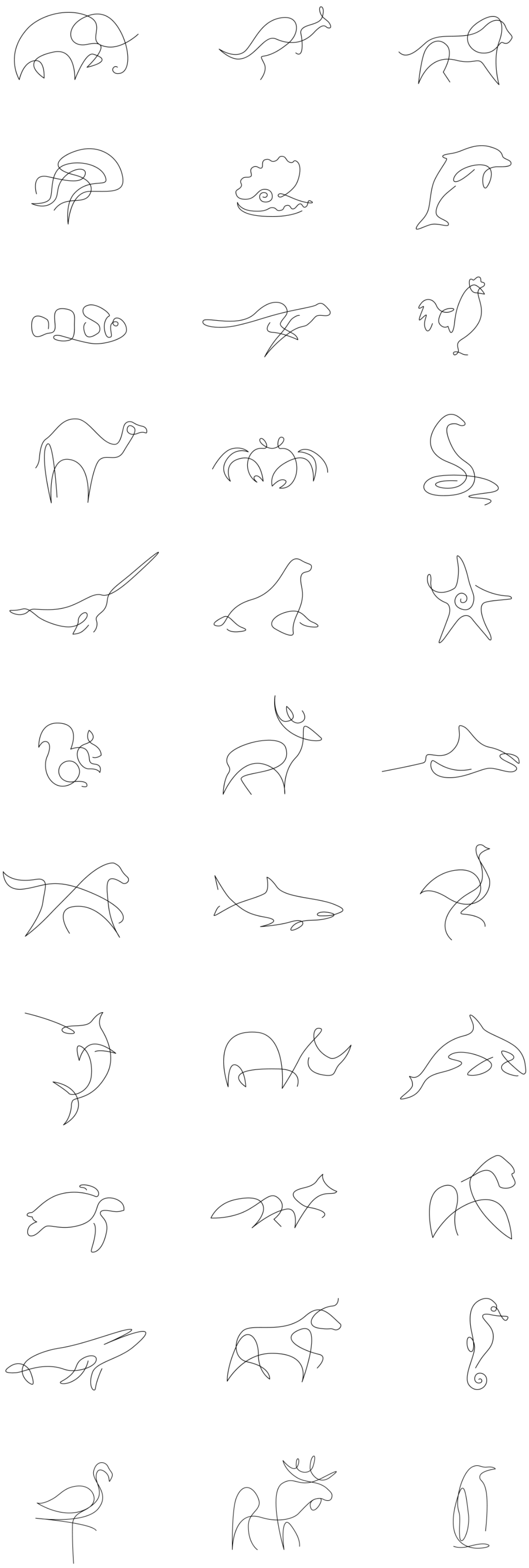
Quellen

Pablo Picasso : Hund
https://www.germanposters.de/picasso-pablo-hund.html

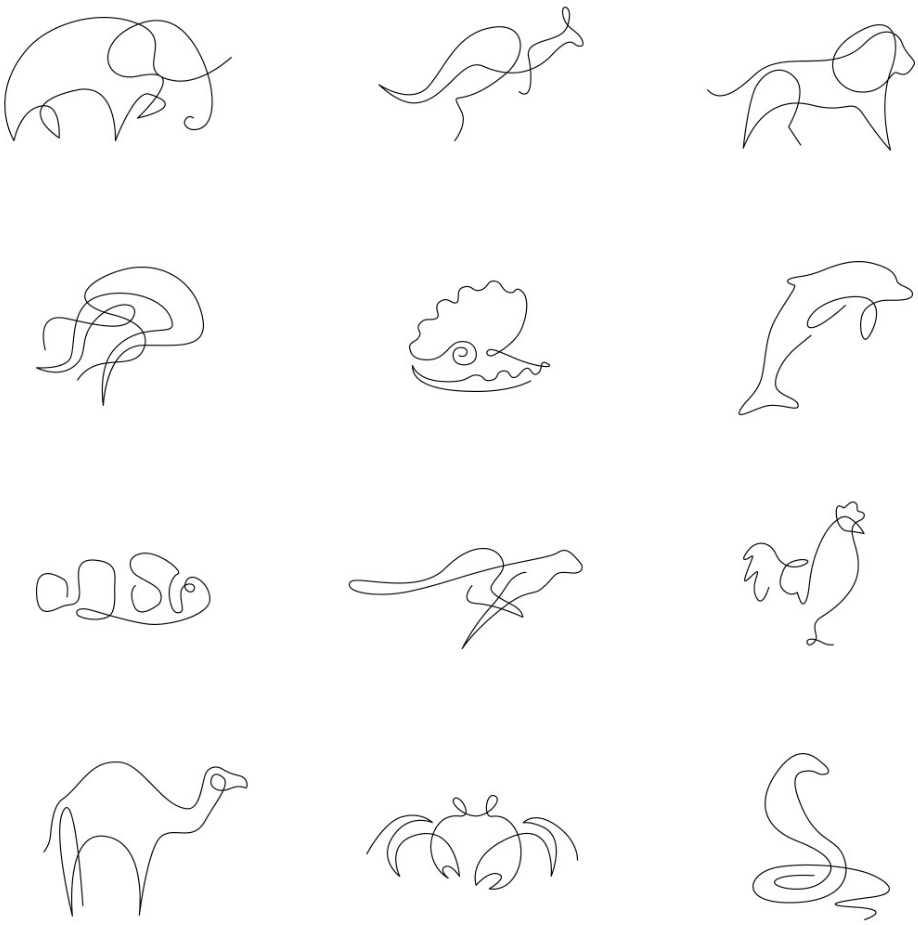
Designer-Duo Emma und Stephane
http://www.differantly.com/
http://www.differantly.com/about/
https://www.facebook.com/differantly/
https://www.behance.net/gallery/28382239/One-line-Animal-logos

Müller, K. ; Wölpert, H. : Anschauliche Topologie; Teubner 1976

https://www.behance.net/gallery/28382239/One-line-Animal-logos



https://www.behance.net/gallery/28382239/One-line-Animal-logos



https://www.behance.net/gallery/28382239/One-line-Animal-logos