Das Volumen des schräg abgeschnittenen Prismas

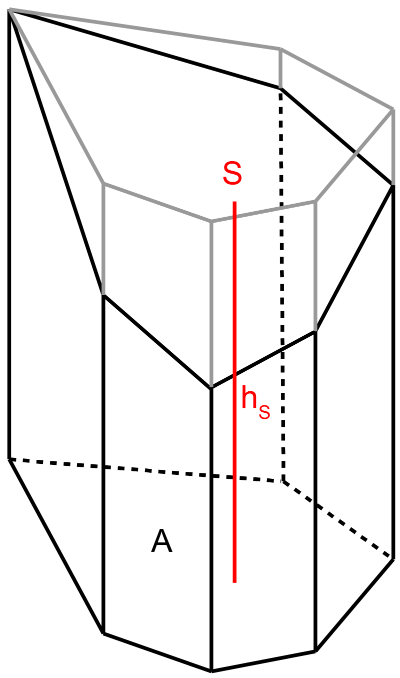
Arno Fehringer , April 2018

Schräg abgeschnittenes Prisma

Das Volumen eines schräg abgeschnittenen Prismas ist gegeben durch

$$V = A \cdot h_S \quad ,$$

wobei A die Grundfläche und h_S der Abstand des Schwerpunkts der Deckfläche von der Grundfläche sind .



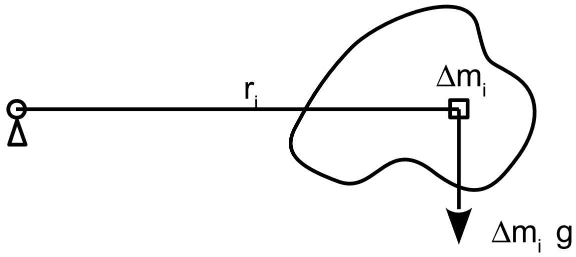
Zum Beweis dieser Aussage sind einige Vorbereitungen notwendig !

Das Konzept des Schwerpunktes

Gegeben sei ein Körper der Masse m, welche in kleine Teile der Masse Δm_i unterteilt ist.
Das Drehmoment M_i der Masse Δm_i ist gegeben durch

$$M_i = r_i \cdot \Delta m_i \cdot g \quad ,$$

wobei r_i der Hebelarm und g die Fallbeschleunigung sind .



Das Drehmoment des Körpers ergibt sich näherungsweise durch

$$M = \sum_i r_i \cdot \Delta m_i \cdot g \quad .$$

Bei einem homogenen Körper der Dichte ρ und $\Delta m_i = \rho \cdot \Delta V_i$ ergibt sich

$$M = \sum_i r_i \cdot \rho \Delta V_i \cdot g \quad .$$

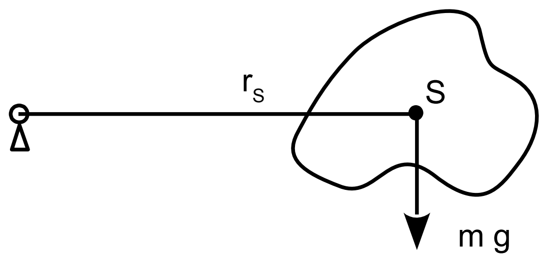
Die Grenzwertbetrachtung $\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_i r_i \cdot \rho \cdot \Delta V_i \cdot g$ liefert $M = \int\limits_V r \cdot \rho \cdot g \; dV$.

Denkt man sich nun die gesamte Masse des Körpers im Schwerpunkt S mit dem zugehörigen Hebelarm r_S vereinigt, erhält man

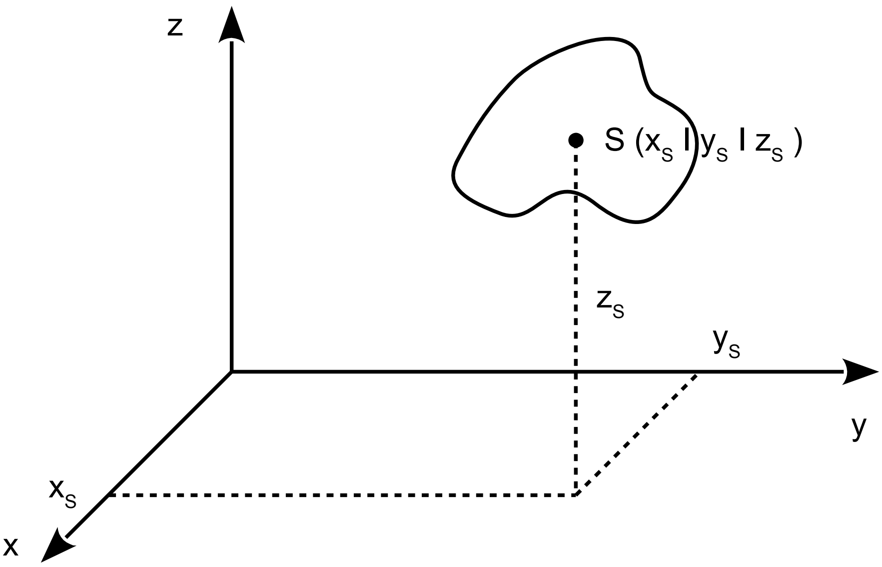
$$M = \int_V r \cdot \rho \cdot g \; dV =: r_S \cdot \rho \cdot V \cdot g$$

$$\int_V r \; dV =: r_S \cdot V$$

$$\boxed{\frac{1}{V} \int_V r \; dV =: r_S}$$

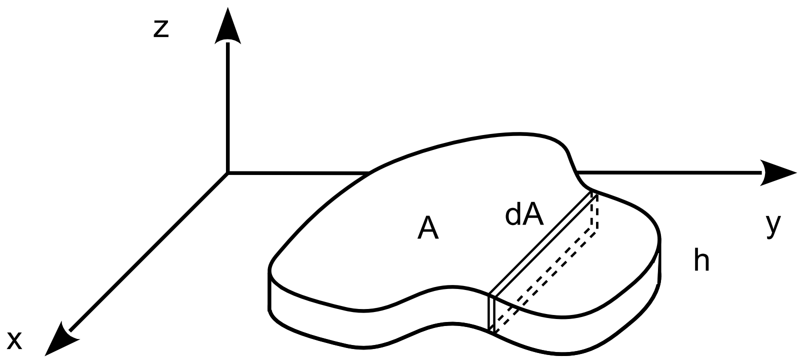


Entsprechend definiert man für einen Körper im Koordinatensystem



$$x_S := \frac{1}{V} \int_V x \; dV \qquad y_S := \frac{1}{V} \int_V y \; dV \qquad z_S := \frac{1}{V} \int_V z \; dV$$

Schwerpunkt einer Scheibe der Grundfläche A **Dicke** h



$$x_S = \frac{1}{V} \int_V x \; dV$$

$$x_S = \frac{1}{Ah} \int_A x\,h \; dA$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int_A x \; dA \qquad y_S = \frac{1}{A} \int_A y \; dA$$

$$z_S = \frac{1}{V} \int_V z \; dV$$

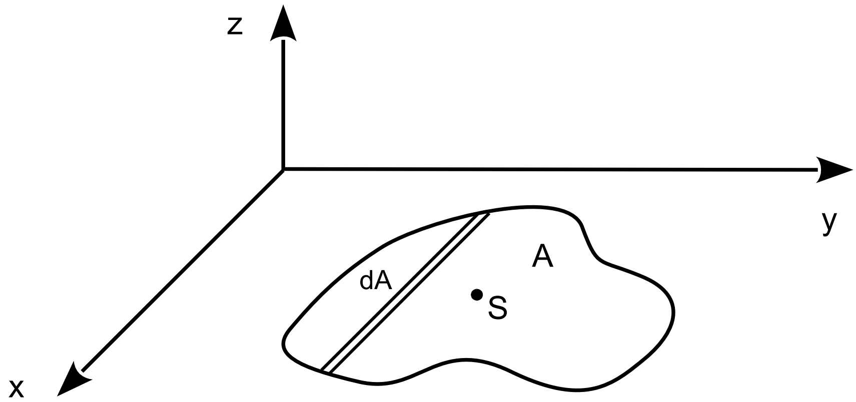
$$z_S = \frac{1}{Ah} \int_0^h z\,A \; dz$$

$$z_S = \frac{1}{h} \int_0^h z \; dz$$

$$z_S = \left| \frac{1}{h} \frac{z^2}{2} \right|_0^h$$

$$z_S = \frac{h}{2}$$

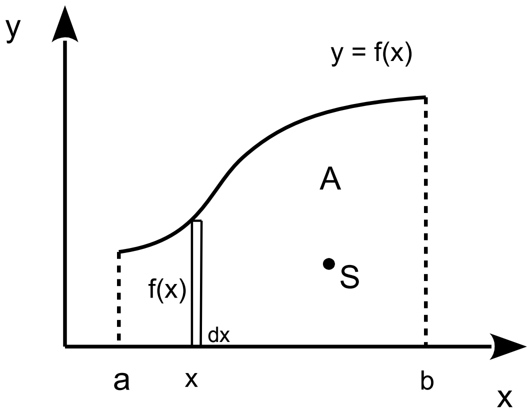
Schwerpunkt einer homogenen Fläche A

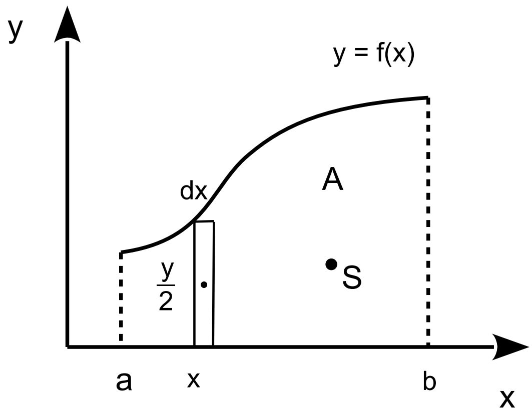


$$\boxed{x_S = \frac{1}{A} \int_A x \; dA}$$

$$\boxed{y_S = \frac{1}{A} \int_A y \; dA}$$

Schwerpunkt einer Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ von a bis b





$$x_S = \frac{1}{A} \int_A x \; dA$$

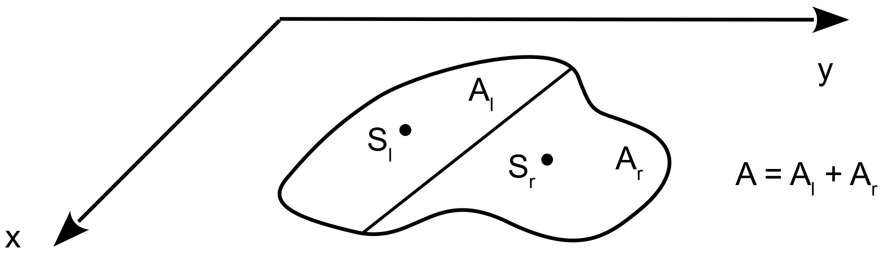
$$\boxed{x_S = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot y \; dx}$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{y}{2} \; dA$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{y}{2} \; y \; dx$$

$$\boxed{y_S = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{y^2}{2} \; dx}$$

Der Schwerpunkt als Summe gewichteter Schwerpunkte



$$x_S = \frac{1}{A} \int_A x \, dA$$

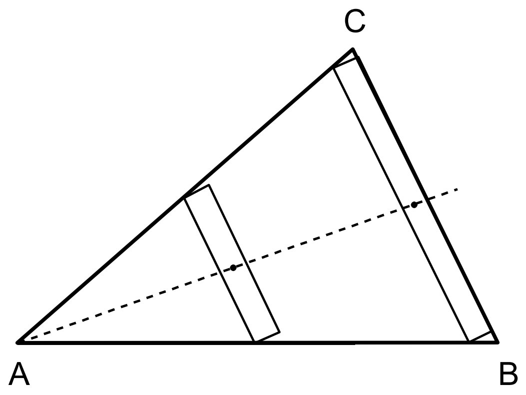
$$x_S = \frac{1}{A} \int_{A_l} x \, dA + \frac{1}{A} \int_{A_r} x \, dA$$

$$x_S = \frac{A_l}{A} \frac{1}{A_l} \int_{A_l} x \, dA + \frac{A_r}{A} \frac{1}{A_r} \int_{A_r} x \, dA$$

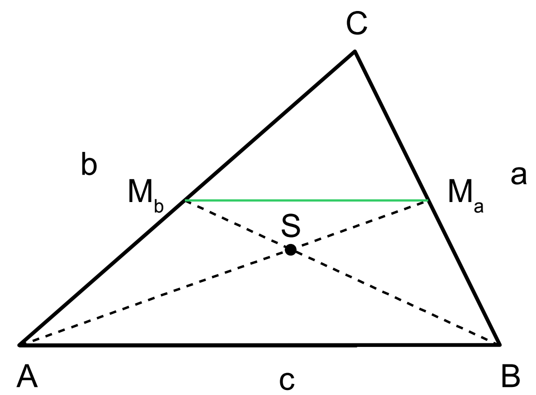
$$x_S = \frac{A_l}{A} x_l + \frac{A_r}{A} x_r$$

$$\boxed{x_S = \frac{A_l}{A_l + A_r} x_l + \frac{A_r}{A_l + A_r} x_r} \quad \text{analog} \quad \boxed{y_S = \frac{A_l}{A_l + A_r} y_l + \frac{A_r}{A_l + A_r} y_r}$$

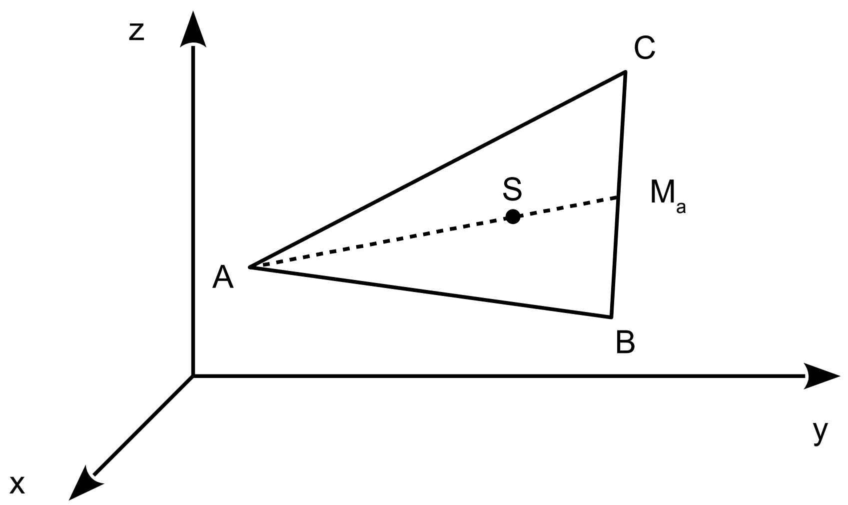
Schwerpunkt des Dreiecks



Denkt man sich das Dreieck wie oben in in lauter Rechtecke zerlegt, so liegen die Schwerpunkte der Rechtecke auf der Seitenhalbierenden, und damit liegt auch der Schwerpunkt des Dreiecks auf der Seitenhalbierenden von $\overline{BC}$.
Entsprechend liegt der Schwerpunkt auf der Seitenhalbierenden von $\overline{AC}$.



$$\frac{AS}{SM_a} = \frac{c}{M_aM_b} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad AS = 2\,SM_a \quad \Rightarrow \quad AS = \frac{2}{3}AM_a$$



$$M_a\left(\frac{x_B+x_C}{2} \;\middle|\; \frac{y_B+y_C}{2} \;\middle|\; \frac{z_B+z_C}{2} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_B+x_C}{2} - x_A \\ \frac{y_B+y_C}{2} - y_A \\ \frac{z_B+z_C}{2} - z_A \end{pmatrix}$$

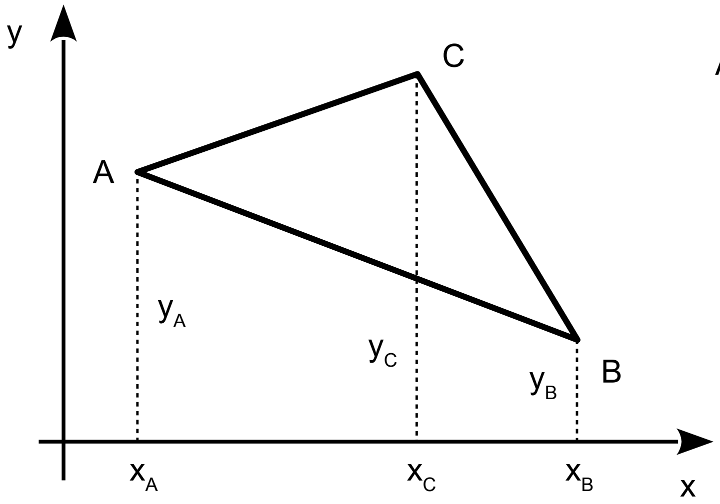
$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_B+x_C}{3} - \frac{2}{3}x_A \\ \frac{y_B+y_C}{3} - \frac{2}{3}y_A \\ \frac{z_B+z_C}{3} - \frac{2}{3}z_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A}{3} + \frac{x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A}{3} + \frac{y_B+y_C}{3} \\ \frac{z_A}{3} + \frac{z_B+z_C}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ \frac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \;\middle|\; \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \;\middle|\; \frac{z_A+z_B+z_C}{3} \right)}$$

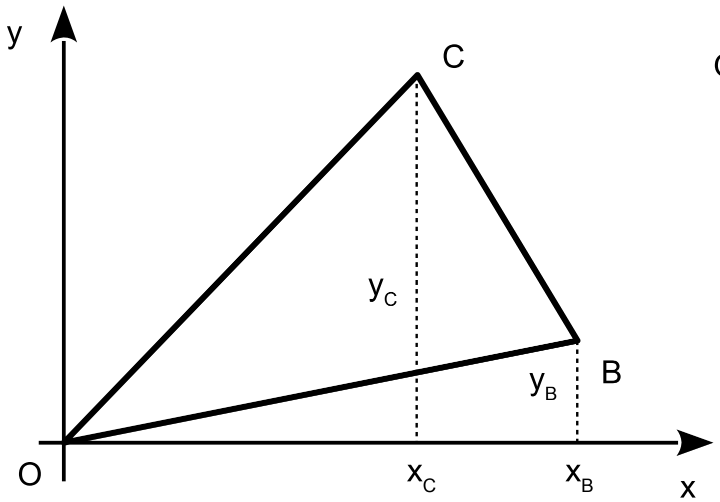
Flächeninhalt des Dreiecks



$A(x_A \mid y_A) \quad B(x_B \mid y_B) \quad C(x_C \mid y_C)$

Flächeninhalts des Dreiecks ΔABC nach der **Gaußschen Trapezmethode** :

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(y_A+y_B)(x_A-x_B) + \frac{1}{2}(y_B+y_C)(x_B-x_C) + \frac{1}{2}(y_C+y_A)(x_C-x_A)}$$



$O(0 \mid 0) \quad B(x_B \mid y_B) \quad C(x_C \mid y_C)$

$$A_{OBC} = \frac{1}{2}(0+y_B)(0-x_B) + \frac{1}{2}(y_B+y_C)(x_B-x_C) + \frac{1}{2}(y_C+0)(x_C-0)$$

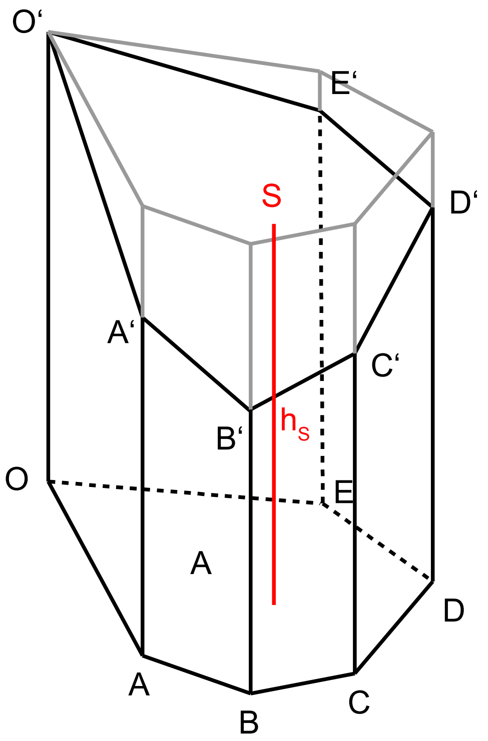
$$A_{OBC} = -\frac{1}{2}x_B y_B + \frac{1}{2}x_B y_B - \frac{1}{2}x_C y_B + \frac{1}{2}x_B y_C - \frac{1}{2}x_C y_C + \frac{1}{2}x_C y_C$$

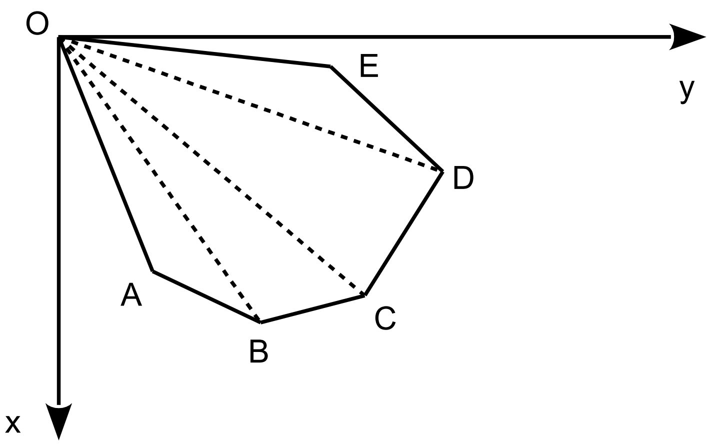
$$A_{OBC} = -\frac{1}{2}x_C y_B + \frac{1}{2}x_B y_C$$

$$A_{OBC} = \frac{1}{2}x_B y_C - \frac{1}{2}x_C y_B$$

$$\boxed{A_{OBC} = \frac{1}{2}(x_B y_C - x_C y_B)}$$

Schräg abgeschnittenen Prisma





$O(0 \mid 0 \mid 0)$ $A(x_A \mid y_A \mid 0)$ $B(x_B \mid y_B \mid 0)$ $C(x_C \mid y_C \mid 0)$ $D(x_D \mid y_D \mid 0)$
$E(x_E \mid y_E \mid 0)$

Da die Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ linear unabhängig sind, gibt es eindeutig bestimmte Zahlen λ_B , μ_B , so dass gilt :

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_B \overrightarrow{OA} + \mu_C \overrightarrow{OC}$$

$$x_B = \lambda_B x_A + \mu_B x_C$$
$$y_B = \lambda_B y_A + \mu_B y_C$$
$$z_B = \lambda_B 0 + \mu_C 0$$

$$A_{OAB} = \frac{1}{2}\left(x_A y_B - x_B y_A\right)$$
$$A_{OAB} = \frac{1}{2}\left(x_A\left(\lambda_B y_A + \mu_B y_C\right) - \left(\lambda_B x_A + \mu_B x_C\right) y_A\right)$$
$$A_{OAB} = \frac{1}{2}\left(\lambda_B x_A y_A + \mu_B x_A y_C - \lambda_B x_A y_A - \mu_B x_C y_A\right)$$
$$A_{OAB} = \frac{1}{2}\left(\mu_B x_A y_C - \mu_B x_C y_A\right)$$
$$A_{OAB} = \mu_B \frac{1}{2}\left(x_A y_C - x_C y_A\right)$$
$$A_{OAB} = \mu_B A_{OAC}$$

Analog folgt

$$A_{OBC} = \lambda_B A_{OAC} \quad ,$$

und damit

$$\frac{A_{OAB}}{A_{OBC}} = \frac{\mu_B A_{OAC}}{\lambda_B A_{OAC}}$$
$$\frac{A_{OAB}}{A_{OBC}} = \frac{\mu_B}{\lambda_B}$$

$$A_{OAB} : A_{OBC} = \mu_B : \lambda_B$$

Analoge Betrachtungen liefern folgende Flächenverhältnisse :

A_{OAB}	:	A_{OBC}	A_{OBC}	:	A_{OCD}	A_{OCD}	:	A_{ODE}
μ_B	:	λ_B	μ_C	:	λ_C	μ_D	:	λ_D
$\mu_B \mu_C$	:	$\lambda_B \mu_C$	$\lambda_B \mu_C$	:	$\lambda_B \lambda_C$	μ_D	:	λ_D
$\mu_B \mu_C \mu_D$	:	$\lambda_B \mu_C \mu_D$	$\lambda_B \mu_C \mu_D$	:	$\lambda_B \lambda_C \mu_D$	$\lambda_B \lambda_C \mu_D$	:	$\lambda_B \lambda_C \lambda_D$

$$A_{OAB} : A_{OBC} : A_{OCD} : A_{ODE}$$
$$\mu_B \mu_C \mu_D : \lambda_B \mu_C \mu_D : \lambda_B \lambda_C \mu_D : \lambda_B \lambda_C \lambda_D$$

Wenn $A = A_{OAB} + A_{OBC} + A_{OBD} + A_{ODE}$ ist, folgt :

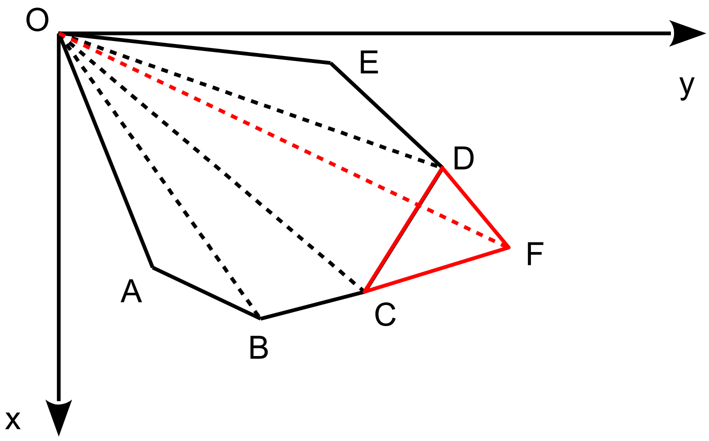
$$\frac{A_{OAB}}{A} = \frac{\mu_B \mu_C \mu_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

$$\frac{A_{OBC}}{A} = \frac{\lambda_B \mu_C \mu_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

$$\frac{A_{OCD}}{A} = \frac{\lambda_B \lambda_C \mu_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

$$\frac{A_{ODE}}{A} = \frac{\lambda_B \lambda_C \lambda_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

Falls man noch das Dreieck ΔCDF anhängen würde, folgte :



$$\overrightarrow{OF} = \lambda_F \overrightarrow{OC} + \mu_F \overrightarrow{OD}$$

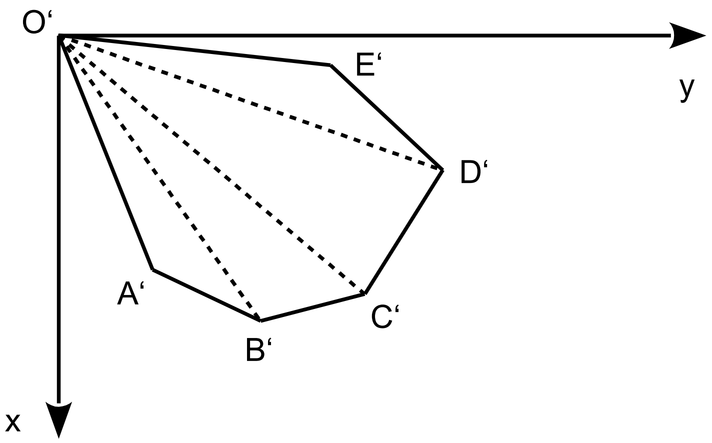
$$x_B = \lambda_B x_A + \mu_B x_C$$
$$y_B = \lambda_B y_A + \mu_B y_C$$
$$z_B = \lambda_B 0 + \mu_C 0$$

$$A_{OCF} = \mu_F A_{OCD}$$
$$A_{OFD} = \lambda_F A_{OCD}$$

$$A_{CFD} = A_{OCF} + A_{OFD} - A_{OCD}$$
$$A_{CFD} = \mu_F A_{OCD} + \lambda_F A_{OCD} - A_{OCD}$$

$$A_{CFD} = \left(\mu_F + \lambda_F - 1\right) A_{OCD}$$

Jetzt betrachtet man die Flächenverhältnisse der Deckfläche :



$O'(0 \mid 0 \mid h_O) \quad A'(x_A \mid y_A \mid h_A) \quad B'(x_B \mid y_B \mid h_B) \quad C'(x_C \mid y_C \mid h_C) \quad D'(x_D \mid y_D \mid h_D)$
$E'(x_E \mid y_E \mid h_E)$

Die Ebene $O'A'B'C'D'E'$ sei folgendermaßen parametrisiert :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_O \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_A - 0 \\ y_A - 0 \\ h_A - h_O \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_C - 0 \\ y_C - 0 \\ h_C - h_O \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_O \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ h_A - h_O \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ h_C - h_O \end{pmatrix}$$

Wegen $B'(x_B \mid y_B \mid h_B) \in$ Ebene $O'A'B'C'D'E'$ folgt :

$$x_B = s x_A + t x_C$$
$$y_B = s y_A + t y_C$$
$$h_B = h_O + s(h_A - h_O) + t(h_A - h_O)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt , das heißt

$$s = \lambda_B \quad \text{und} \quad t = \mu_B \quad .$$

Damit gelten für die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta O'A'B'$ und $\Delta O'B'C'$:

$$A_{O'A'B'} = \mu_B A_{O'A'C'}$$
$$A_{O'B'C'} = \lambda_B A_{O'A'C'}$$

$$\frac{A_{O'A'B'}}{A_{O'B'C'}} = \frac{\mu_B A_{O'A'C'}}{\lambda_B A_{O'A'C'}}$$
$$\frac{A_{O'A'B'}}{A_{O'B'C'}} = \frac{\mu_B}{\lambda_B}$$

$$A_{O'A'B'} : A_{O'B'C'} = \mu_B : \lambda_B$$

Weiter ergeben sich die gleichen Flächenverhältnisse wie für die Grundfläche :

$$A_{O'A'B'} : A_{O'B'C'} : A_{O'C'D'} : A_{O'D'E'}$$
$$\mu_B \mu_C \mu_D : \lambda_B \mu_C \mu_D : \lambda_B \lambda_C \mu_D : \lambda_B \lambda_C \lambda_D$$

Ist $A' = A_{OAB} + A_{OBC} + A_{OBD} + A_{ODE}$, so folgt :

$$\frac{A_{O'A'B'}}{A'} = \frac{\mu_B \mu_C \mu_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

$$\frac{A_{O'B'C'}}{A'} = \frac{\lambda_B \mu_C \mu_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

$$\frac{A_{O'C'D'}}{A'} = \frac{\lambda_B \lambda_C \mu_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

$$\frac{A_{O'D'E'}}{A'} = \frac{\lambda_B \lambda_C \lambda_D}{\mu_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \mu_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \mu_D + \lambda_B \lambda_C \lambda_D}$$

Falls man noch das Dreieck bzw. das dreiseitige Prisma $P_{CFD\ C'F'D'}$ angehängt hätte, ergäbe sich

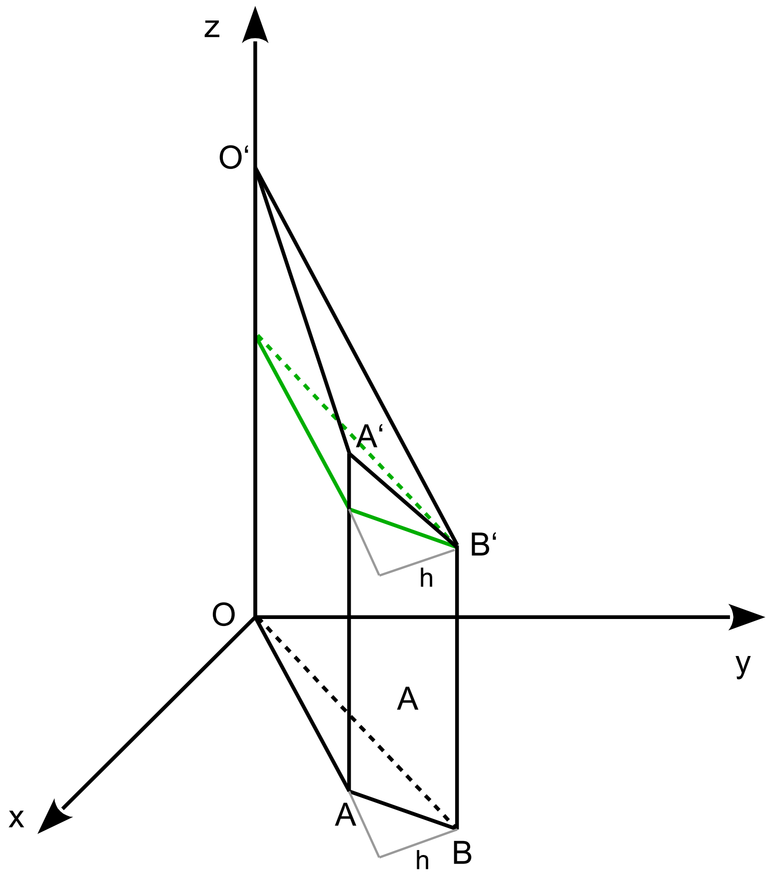
$$A_{C'F'D'} = \left(\mu_F + \lambda_F - 1\right) A_{O'C'D'} \quad .$$

Schließlich erhält man für die Teilflächen der Grundfläche und die entsprechenden Teilflächen der Deckfläche folgende Verhältnisgleichungen :

$$\frac{A_{O'A'B'}}{A'} = \frac{A_{OAB}}{A}$$
$$\frac{A_{O'B'C'}}{A'} = \frac{A_{OBC}}{A}$$
$$\frac{A_{O'C'D'}}{A'} = \frac{A_{OCD}}{A}$$
$$\frac{A_{O'D'E'}}{A'} = \frac{A_{ODE}}{A}$$

$$\frac{A_{C'F'D'}}{A'} = \frac{A_{CFD}}{A}$$

Das Volumen des schräg abgeschnittenen dreiseitigen Prismas erhält man wie folgt durch Zerlegung in ein Prisma und eine Pyramide:



$O(0 \mid 0 \mid 0) \qquad A(x_A \mid y_A \mid 0) \qquad B(x_B \mid y_B \mid 0)$

$O'(0 \mid 0 \mid h_O) \qquad A'(x_A \mid y_A \mid h_A) \qquad B'(x_B \mid y_B \mid h_B)$

$$V = A_{OAB} \cdot h_B + \frac{1}{3} \frac{h_O - h_B + h_A - h_B}{2} |OA| \; h$$

$$V = \frac{|OA| \; h}{2} h_B + \frac{1}{3} \frac{h_O - h_B + h_A - h_B}{2} |OA| \; h$$

$$V = \frac{|OA| \; h}{2} \left(h_B + \frac{h_O - h_B + h_A - h_B}{3} \right)$$

$$V = \frac{|OA| \; h}{2} \left(\frac{3 h_B + h_O - h_B + h_A - h_B}{3} \right)$$

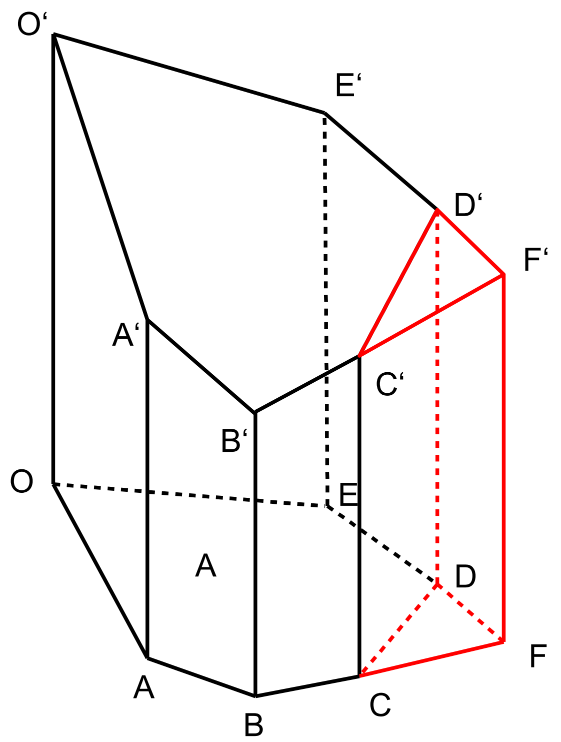
$$V = A_{OAB} \left(\frac{h_O + h_A + h_B}{3} \right)$$

Der Term $\frac{h_O + h_A + h_B}{3}$ ist die z-Koordinate des Flächenschwerpunkts S der Deckfläche $\Delta O'A'B'$ und damit der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ΔOAB. Die Volumenformel des schräg abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist also

$$V = A_{OAB} \; h_S \quad .$$

Dass diese Formel allgemeingültig ist, beweist man durch vollständige Induktion :

Es sei bereits gezeigt, dass die Formel für ein n-seitiges, schräg abgeschnittenes Prisma $P_{OABCDE\ O'A'B'C'D'E'}$ gilt .



Wird jetzt noch das dreiseitige Prisma $P_{CFD\ C'F'D'}$ angehängt, so ergibt sich das Volumen zu

$$V = A_{OABCDE}\ h_l + A_{CFD}\ h_r \quad ,$$

wobei h_l die z-Koordinate des Deckflächenschwerpunkts S_l des Prismas $P_{OABCDE\ O'A'B'C'D'E'}$ und h_r die z-Koordinate des Deckflächenschwerpunkts S_r des Prismas $P_{CFD\ C'F'D'}$ ist.

$$V = A_{OABCFDE} \left(\frac{A_{OABCDE}}{A_{OABCFDE}}\ h_l + \frac{A_{CFD}}{A_{OABCFDE}}\ h_r \right)$$

Wegen der Gleichheit der Verhältnisse der Teilflächen von Grundfläche und Deckfläche erhält man

$$V = A_{OABCFDE} \left(\frac{A_{O'A'B'C'D'E'}}{A_{O'AB'C'F'D'E'}}\ h_l + \frac{A_{C'F'D'}}{A_{O'A'B'C'F'D'E'}}\ h_r \right)$$

Der Ausdruck in Klammern ist die gewichtete Summe der z-Koordinaten des linken und rechten Schwerpunktes und damit gleich der z-Koordinate des Schwerpunktes der Deckfläche des Prismas $P_{OABCDE\ O'A'B'C'F'D'E'}$. Also folgt :

$$V = A_{OABCFDE}\ h_S$$