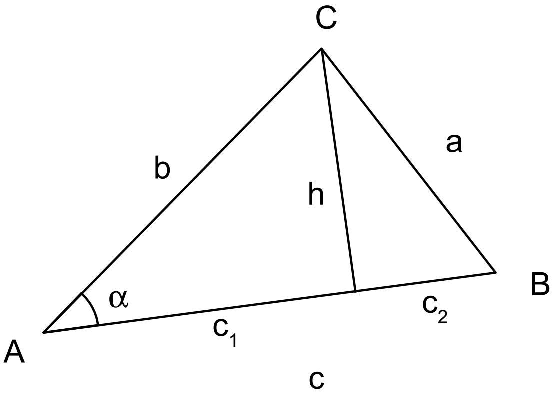
Vektorrechnung
Analytische Geometrie

Arno Fehringer

Skalarprodukt

Gegeben sei ein Dreieck mit den Ecken A, B, C



$$
\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + c_2^2 \\
&= h^2 + (c-c_1)^2 \\
&= (b\sin\alpha)^2 + (c-b\cos\alpha)^2 \\
&= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha \\
&= b^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
&= b^2\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1} + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha
\end{aligned}
$$

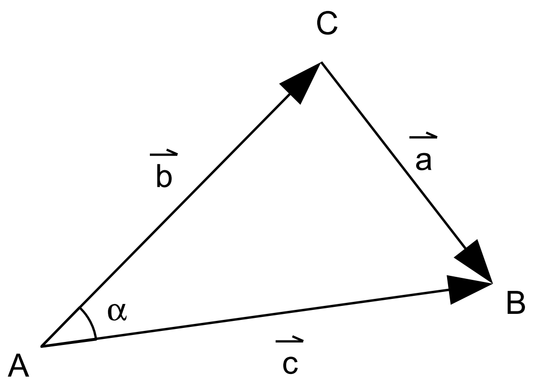
Kosinussatz:

(1) $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

In der Sprache der **Vektorrechnung** bzw. der **Analytischen Geometrie** heißt das wie folgt :

Gegeben sei ein Dreieck mit den Ecken

$$A=(A_1 I A_2 I A_3)\ ,\ B=(B_1 I B_2 I B_3)\ ,\ C=(C_1 I C_2 I C_3)\ .$$



Für die Vektoren

$$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1-A_1 \\ C_2-A_2 \\ C_3-A_3 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1-A_1 \\ B_2-A_2 \\ B_3-A_3 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1-C_1 \\ B_2-C_2 \\ B_3-C_3 \end{pmatrix}$$

gilt dann:

$$\vec{a} = \vec{c}-\vec{b}$$

und

$$a^2 = (c_1-b_1)^2 + (c_2-b_2)^2 + (c_3-b_3)^2$$

$$a^2 = c_1^2-2c_1 b_1+b_1^2 + c_2^2-2c_2 b_2+b_2^2 + c_3^2-2c_3 b_3+b_3^2$$

$$a^2 = b_1^2+b_2^2+b_3^2 + c_1^2+c_2^2+c_3^2 - 2(b_1 c_1+b_2 c_2+b_3 c_3)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2(b_1 c_1+b_2 c_2+b_3 c_3)$$

(2) $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2(b_1 c_1+b_2 c_2+b_3 c_3)}$$

Vergleicht man die Gleichungen

(1) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(2) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3) \quad ,$$

kommt man zu folgender

Definition:

Für die Vektoren $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, die den Winkel α einschließen,

ist das **Skalarprodukt** von $\vec{b}$ und $\vec{c}$

der Ausdruck $$\boxed{\vec{b}\vec{c} := b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 = bc\cos\alpha} \; .$$

Bemerkung

Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind senkrecht zueinander oder **orthogonal** , genau dann wenn das Skalarprodukt $\vec{b}\vec{c} = 0$ ist.

Ist einer der Vektoren ein Einheitsveltor, z. B. $\vec{c}$ mit $c = 1$, so bedeutet

$\vec{b}\vec{c} = b\cos\alpha$ die **senkrechte Projektion des Vektors** $\vec{b}$ in Richtung $\vec{c}$.

Das Skalarprodukt ist **bilinear** und **symmetrisch** , das heißt es gilt:

$$\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{b}$$

$$(\lambda\vec{b})\vec{c} = \lambda(\vec{b}\vec{c})$$

$$\vec{b}(\mu\vec{c}) = \mu(\vec{b}\vec{c})$$

$$(\vec{b}+\vec{a})\vec{c} = \vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}$$

$$\vec{b}(\vec{c}+\vec{a}) = \vec{b}\vec{c}+\vec{b}\vec{a}$$

Kreuzprodukt

Gesucht ist ein Vektor $\vec{n}$ der auf den beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind senkrecht steht.

Die Bedingungen lauten:

$$\vec{b}\vec{n} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{c}\vec{n} = 0 \ .$$

$$\begin{aligned} b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 &= 0 \\ c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 n_1 + b_2 n_2 &= -b_3 n_3 \\ c_1 n_1 + c_2 n_2 &= -c_3 n_3 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{\begin{vmatrix} -b_3 n_3 & b_2 \\ -c_3 n_3 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-b_3 n_3 c_2 + b_2 c_3 n_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{(b_2 c_3 - b_3 c_2) n_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

$$n_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -b_3 n_3 \\ c_1 & -c_3 n_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-b_1 c_3 n_3 + b_3 n_3 c_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{(b_1 c_3 - b_3 c_1)(-n_3)}{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

Setze $n_3 = 1$. dann folgt:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2 c_3 - b_3 c_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \\ -\dfrac{b_1 c_3 - b_3 c_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus Symmetriegründen geht man zum Vektor $(b_1 c_2 - b_2 c_1)\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ über, bezeichnet

diesen ebenfalls wieder mit $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und erhält so:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ -(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} .$$

Definition

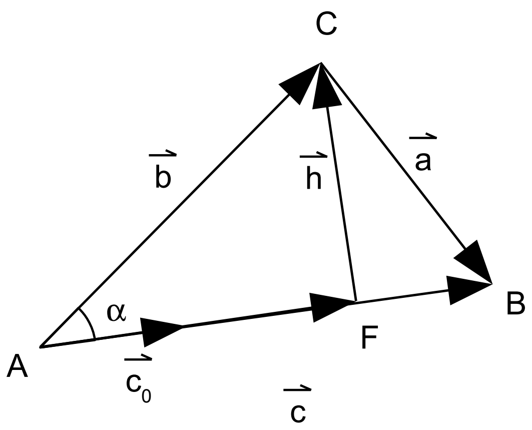
Für die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

ist das **Kreuzprodukt** von $\vec{b}$ und $\vec{c}$

der Vektor $\boxed{\vec{b} \times \vec{c} := \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ -(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}}$.

Nach Konstruktion ist dieser Vektor **orthogonal** zu $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Flächeninhalt eines Dreiecks ΔABC



Ist $\vec{c}_0$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{c}$, so gilt:

$$\overrightarrow{AF} = (b \cos\alpha)\vec{c}_0 = (b\cos\alpha)\frac{\vec{c}}{c} = \frac{bc \cos\alpha}{c^2}\vec{c} = \frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\vec{c}$$

$$\vec{h} = \vec{b} - \overrightarrow{AF} = \vec{b} - \frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\vec{c}$$

$$h^2 = \vec{h}\vec{h} = \left(\vec{b} - \frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\vec{c}\right)\left(\vec{b} - \frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{b}\vec{b} - 2\frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\vec{b}\vec{c} + \left(\frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\right)^2\vec{c}\vec{c}$$

$$= b^2 - 2\frac{(\vec{b}\vec{c})^2}{c^2} + \left(\frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\right)^2 c^2$$

$$= b^2 - 2\frac{(\vec{b}\vec{c})^2}{c^2} + \frac{(\vec{b}\vec{c})^2}{c^4}c^2$$

$$= b^2 - 2\frac{(\vec{b}\vec{c})^2}{c^2} + \frac{(\vec{b}\vec{c})^2}{c^2}$$

$$= b^2 - \frac{(\vec{b}\vec{c})^2}{c^2}$$

$$h^2 = b^2 - \frac{(\vec{b}\,\vec{c})^2}{c^2}$$
$$c^2h^2 = b^2c^2 - (\vec{b}\,\vec{c})^2$$

Für das Quadrat des Flächeninhalts Dreiecks A^2 folgt nun:

$$A^2 = \left(\frac{ch}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}c^2h^2$$

$$4A^2 = b^2c^2 - (\vec{b}\vec{c})^2$$

$$4A^2 = (b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2) - (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2$$

$$\begin{aligned}4A^2 = {} & \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)c_1^2 + \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)c_2^2 + \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)c_3^2 \\ & - \left(b_1^2c_1^2+b_2^2c_2^2+b_3^2c_3^2 + 2b_1c_1b_2c_2 + 2b_1c_1b_3c_3 + 2b_2c_2b_3c_3\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4A^2 = {} & \left(b_2^2+b_3^2\right)c_1^2 + \left(b_1^2+b_3^2\right)c_2^2 + \left(b_1^2+b_2^2\right)c_3^2 \\ & - 2b_1c_1b_2c_2 - 2b_1c_1b_3c_3 - 2b_2c_2b_3c_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4A^2 = {} & b_2^2c_1^2 + b_3^2c_1^2 + b_1^2c_2^2 + b_3^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 + b_2^2c_3^2 \\ & - 2b_1c_1b_2c_2 - 2b_1c_1b_3c_3 - 2b_2c_2b_3c_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4A^2 = {} & b_2^2c_1^2 + b_1^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 + b_3^2c_1^2 + b_2^2c_3^2 + b_3^2c_2^2 \\ & - 2b_2c_1b_1c_2 \quad - 2b_1c_3b_3c_1 \quad - 2b_2c_3b_3c_2\end{aligned}$$

$$4A^2 = (b_2c_1 - b_1c_2)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_2c_3 - b_3c_1)^2$$

$$4A^2 = (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + \left(-(b_1c_3 - b_3c_1)\right)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2$$

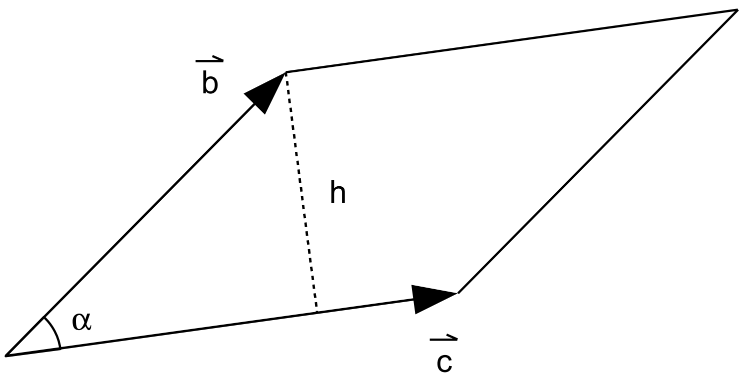
$$4A^2 = |\vec{b}\times\vec{c}|^2$$

$$2A = |\vec{b}\times\vec{c}|$$

Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC :

$$\boxed{A = \frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}|}$$

Geometrische Interpretation der Länge von $|\vec{b} \times \vec{c}|$ als Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms.



Da der Flächeninhalt des Parallelogramms einerseits gleich $|\vec{b} \times \vec{c}|$ und andererseits gleich $c\,h = cb\ \sin\alpha$ ist, kann man sagen

$$\boxed{|\vec{b} \times \vec{c}| = bc \sin\alpha}$$

ist.

Bemerkung

Das Kreuzprodukt ist **bilinear** und **antisymmetrisch** , das heißt es gilt:

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

$$(\lambda \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{b} \times (\mu \vec{c}) = \mu(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{b}+\vec{a}) \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{b} \times (\vec{c}+\vec{a}) = \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a}$$

(Parameter-)Gleichung der Geraden

g: $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{a}$ ist ein **Stützvektor**, $\vec{c}$ ist **Richtungsvektor**

Parametergleichung der Ebene [P]

E: $\boxed{\vec{x} = \vec{u} + r\vec{v} + s\vec{w}}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ **linear unabhängig**, $r, s \in \mathbb{R}$

$\vec{u}$ ist ein **Stützvektor**, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind **Richtungsvektoren**

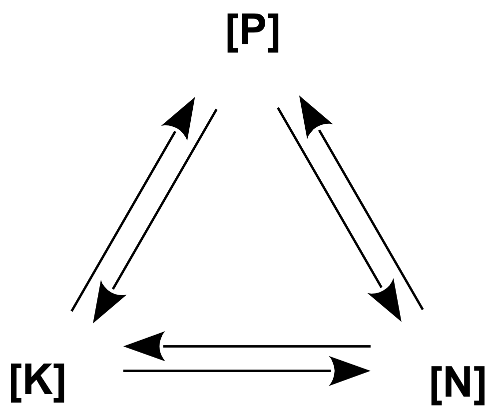
Normalengleichung der Ebene [N]

E: $\boxed{\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0}$

Koordinatengleichung der Ebene [K]

E: $\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$

Wechsel der Ebenengleichungen



$\boxed{[P] \quad \Rightarrow \quad [N]}$:

E: $\quad \vec{x} = \vec{u} + r\vec{v} + s\vec{w}$

Setze $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$. Mit $\vec{x} - \vec{u} = r\vec{v} + s\vec{w}$ folgt:

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = \vec{n}(r\vec{v} + s\vec{w})$$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = r(\vec{n} \times \vec{v}) + s(\vec{n} \times \vec{w})$$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$

E: $\quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$

$\boxed{[P] \quad \Rightarrow \quad [K]}$:

E: $\quad \vec{x} = \vec{u} + r\vec{v} + s\vec{w}$

Setze $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$. Dann folgt

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$

$$\vec{n}\vec{x} - \vec{n}\vec{u} = 0$$

$$\vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{u}$$

E: $\quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \vec{n}\vec{u}$

$\boxed{[N] \quad \Rightarrow \quad [K]}$

E: $\quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$
$$\vec{n}\vec{x} - \vec{n}\vec{u} = 0$$
$$\vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{u}$$

E: $\quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \vec{n}\vec{u}$

$\boxed{[N] \quad \Rightarrow \quad [P]}$

E: $\quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$
$$\vec{n}\vec{x} - \vec{n}\vec{u} = 0$$
$$\vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{u}$$

E: $\quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \vec{n}\vec{u}$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \vec{n}\vec{u}$$

$$x_3 = \frac{\vec{n}\vec{u}}{n_3} - x_1\frac{n_1}{n_3} - x_2\frac{n_2}{n_3}$$

Wegen

$$x_1 = 0 + x_1 1 + x_2 0$$

$$x_2 = 0 + x_1 0 + x_2 1$$

$$x_3 = \frac{\vec{n}\vec{u}}{n_3} - x_1\frac{n_1}{n_3} - x_2\frac{n_2}{n_3} \quad \text{folgt:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\vec{n}\vec{u}}{n_3} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[K] \quad \Rightarrow \quad [P]}$$

E: $\quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$x_3 = \frac{d}{c} - x_1\frac{a}{c} - x_2\frac{b}{c}$$

Wegen

$$x_1 = 0 + x_1 1 + x_2 0$$

$$x_2 = 0 + x_1 0 + x_2 1$$

$$x_3 = \frac{d}{c} - x_1\frac{a}{c} - x_2\frac{b}{c} \quad \text{folgt:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[K] \quad \Rightarrow \quad [N]}$$

E: $\quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Wähle z. B. $u_1 = u_2 = 0$, woraus $u_3 = \frac{d}{c}$ folgt.

$$\left.\begin{matrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ au_1 + bu_2 + cu_3 = d \end{matrix}\right] -$$

$$a(x_1 - u_1) + b(x_2 - u_2) + c(x_3 - u_3) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - u_1 \\ x_2 - u_2 \\ x_3 - u_3 \end{pmatrix} = 0$$

Schnittpunkt zweier Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{c}$

h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{d}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$s\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$c_1 s - d_1 t = b_1 - a_1$$

$$c_2 s - d_2 t = b_2 - a_2$$

$$c_3 s - d_3 t = b_3 - a_3$$

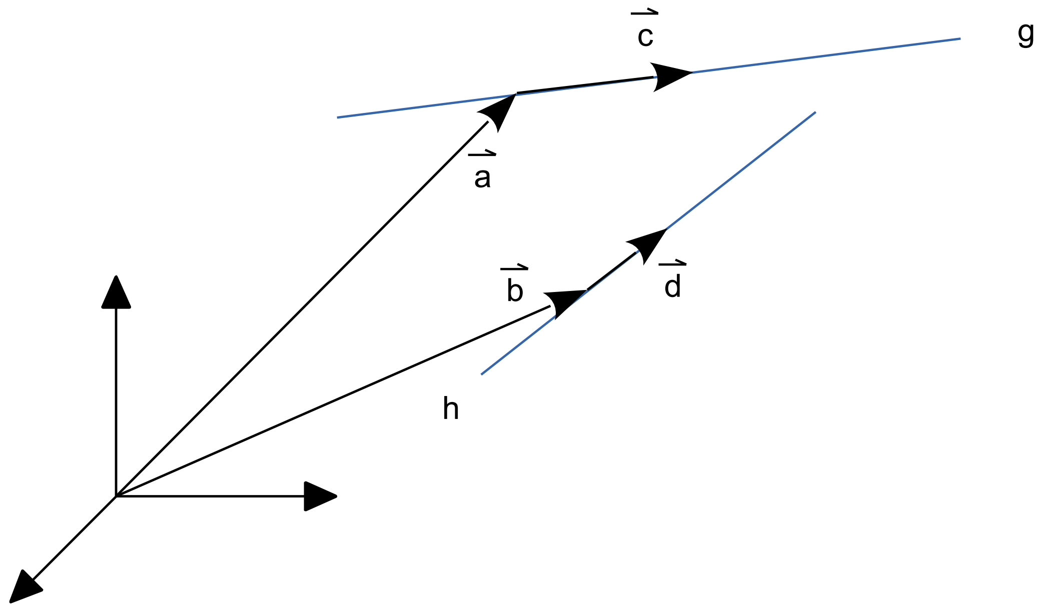
Falls zum Beispiel die beiden ersten Gleichungen nach s, t aufgelöst werden können, setzt man s, t in die dritte Gleichung ein.

Wird diese erfüllt, gibt es einen Schnittpunkt S von g und h.
Wird diese nicht erfüllt , gibt es keinen Schnittpunkt S von g und h.

Wann sind 2 Geraden identisch ?

g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{c}$

h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{d}$



Definition

Falls für die **normierten Richtungsvektoren** $\vec{c} = \vec{d}$ gilt , sind die Geraden g und h **parallel**.

Die Spitze des des Stützvektors heißt **Stützpunkt** .

Falls $\vec{c} = \vec{d}$ ist und einer der **Stützpunkte** auf der anderen Geraden liegt, sind die Geraden **identisch**.

Falls $\vec{c} \neq \vec{d}$ ist und keiner der **Stützpunkte** auf der anderen Geraden liegt, heißen die Geraden g und h **windschief** .

Schittpunkt Ebene Gerade

E **[P]** : $\vec{x} = \vec{u} + r\vec{v} + s\vec{w}$

g : $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}$

Übergang zur **Normalenform** der Ebene

E : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$ mit $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

Einsetzen der Geradengleichung in die **Normalengleichung**

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{a} + t\vec{c} - \vec{u}) = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

$$\vec{n}(\vec{a} + t\vec{c} - \vec{u}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u} + t\vec{c}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) + t(\vec{n}\vec{c}) = 0$$

Falls $\vec{n}\vec{c} \neq 0$ ist , folgt $t = -\frac{\vec{n}(\vec{a} - \vec{u})}{\vec{n}\vec{c}}$ und

$\vec{p} = \vec{a} + \left(-\frac{\vec{n}(\vec{a} - \vec{u})}{\vec{n}\vec{c}}\right)\vec{c}$ ist der gesuchte **Schnittpunkt P** .

Falls $\vec{n}\vec{c} = 0$ ist , sind $\vec{n}$ und $\vec{c}$ **orthogonal** .

Falls außerdem $\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) = 0$ ist, ist die Gleichung

$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) + t(\vec{n}\vec{c}) = 0$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ wahr.

Dann ist aber Gleichung **(*)** für alle $t \in \mathbb{R}$ wahr:

$$\vec{n}(\vec{a} + t\vec{c} - \vec{u}) = 0 \ .$$

Das heißt , alle Punkte $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}$ der Geraden g erfüllen die Ebenengleichung , und **somit liegt g in E** .

Falls jedoch $\vec{n}(\vec{a}-\vec{u}) \neq 0$ ist, ist die Gleichung

$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) + t(\vec{n}\vec{c}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ falsch. Das heißt, ein **Schittpunkt existiert nicht**.

Schittpunkt Ebene Gerade

E **[N]** : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$

g : $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}$

Einsetzen der Geradengleichung in die **Normalengleichung**

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{a} + t\vec{c} - \vec{u}) = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

$$\vec{n}(\vec{a} + t\vec{c} - \vec{u}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u} + t\vec{c}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) + t(\vec{n}\vec{c}) = 0$$

Falls $\vec{n}\vec{c} \neq 0$ ist , folgt $t = -\dfrac{\vec{n}(\vec{a} - \vec{u})}{\vec{n}\vec{c}}$ und

$\vec{p} = \vec{a} + \left(-\dfrac{\vec{n}(\vec{a} - \vec{u})}{\vec{n}\vec{c}}\right)\vec{c}$ ist der gesuchte **Schnittpunkt P** .

Falls $\vec{n}\vec{c} = 0$ ist , sind $\vec{n}$ und $\vec{c}$ **orthogonal** .

Falls außerdem $\vec{n}(\vec{a}-\vec{u}) = 0$ ist, ist die Gleichung

$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) + t(\vec{n}\vec{c}) = 0$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ wahr.

Dann ist aber Gleichung **(*)** für alle $t \in \mathbb{R}$ wahr:

$$\vec{n}(\vec{a} + t\vec{c} - \vec{u}) = 0 \; .$$

Das heißt , alle Punkte $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}$ der Geraden g erfüllen die Ebenengleichung , und **somit liegt g in E** .

Falls jedoch $\vec{n}(\vec{a}-\vec{u}) \neq 0$ ist, ist die Gleichung

$\vec{n}(\vec{a} - \vec{u}) + t(\vec{n}\vec{c}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ falsch. Das heißt, ein **Schittpunkt existiert nicht**.

Schittpunkt Ebene Gerade

E **[K]** : $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$

g : $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}$

Einsetzen der Geradengleichung in die **Koordinatengleichung**

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

$$n_1(a_1 + tc_1) + n_2(a_2 + tc_2) + n_3(a_3 + tc_3) = d \qquad \textbf{(*)}$$

$$n_1(a_1 + tc_1) + n_2(a_2 + tc_2) + n_3(a_3 + tc_3) = d$$

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + t(n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3) = d$$

$$\vec{n}\vec{a} + t(\vec{n}\vec{c}) = d$$

$$t(\vec{n}\vec{c}) = d - \vec{n}\vec{a}$$

Falls $\vec{n}\vec{c} \neq 0$ ist, folgt $t = \dfrac{d - \vec{n}\vec{a}}{\vec{n}\vec{c}}$ und

$\vec{p} = \vec{a} + \left(\dfrac{d - \vec{n}\vec{a}}{\vec{n}\vec{c}}\right)\vec{c}$ ist der gesuchte **Schnittpunkt P** .

Falls $\vec{n}\vec{c} = 0$ ist, sind $\vec{n}$ und $\vec{c}$ **orthogonal** .

Falls außerdem $\vec{n}\vec{a} = d$ ist, ist die Gleichung

$t(\vec{n}\vec{c}) = d - \vec{n}\vec{a}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wahr.

Dann ist aber Gleichung **(*)** für alle $t \in \mathbb{R}$ wahr:

$$n_1(a_1 + tc_1) + n_2(a_2 + tc_2) + n_3(a_3 + tc_3) = d \ .$$

Das heißt , alle Punkte $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{c}$ der Geraden g erfüllen die Ebenengleichung , und **somit liegt g in E** .

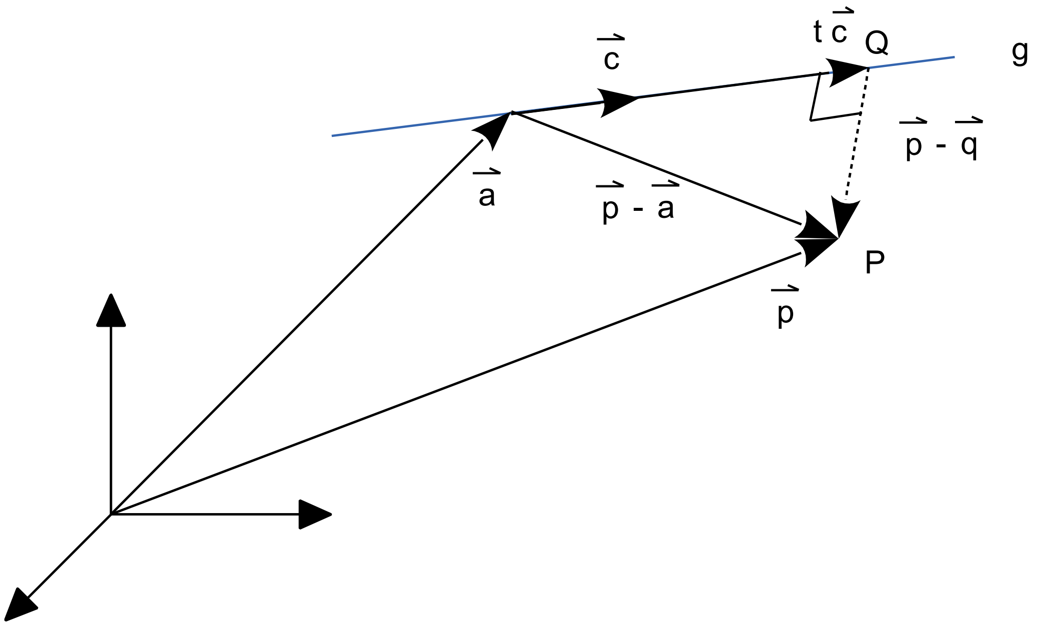
Falls jedoch $\vec{n}\vec{a} \neq d$ ist, ist die Gleichung

$t(\vec{n}\vec{c}) = d - \vec{n}\vec{a}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ falsch. Das heißt, ein **Schittpunkt existiert nicht** .

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$g \quad : \quad \vec{x} = \vec{a} + t\vec{c} \quad \text{mit} \quad c = |\vec{c}| = 1$

Definition
Der **Abstand** $|P,g|$ **eines Punktes** P **von der Geraden** g ist der Abstand zum Lotfußpunkt Q auf g.



$$\begin{aligned} t\vec{c} + \vec{p}-\vec{q} &= \vec{p}-\vec{a} \\ \vec{p}-\vec{q} &= \vec{p}-\vec{a} - t\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{p}-\vec{a})\vec{c} &= |\vec{p}-\vec{a}||\vec{c}|\cos\alpha = |\vec{p}-\vec{a}|\cos\alpha \\ (\vec{p}-\vec{a})\vec{c} &= |\vec{p}-\vec{a}|\cos\alpha \\ (\vec{p}-\vec{a})\vec{c} &= |t\vec{c}| \\ (\vec{p}-\vec{a})\vec{c} &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |P,g| &= |\vec{p}-\vec{q}| \\ &= |(\vec{p}-\vec{a}) - t\vec{c}| \\ &= |(\vec{p}-\vec{a}) - ((\vec{p}-\vec{a})\vec{c})\ \vec{c}| \end{aligned}$$

$$\boxed{|P,g| = |(\vec{p}-\vec{a}) - ((\vec{p}-\vec{a})\vec{c})\ \vec{c}|}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

g : $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{c}$ mit $c = |\vec{c}| = 1$

h : $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{c}$

Man berechnet zuerst die den **Abstand** $|B,g|$ **des Stützpunktes** P **von** h .

Dann zeigt man, dass alle anderen Punkte P der Geraden h den gleichen Abstand haben:

Sei P irgendein Punkt auf h mit $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{c}$.

$$|P,g| = |(\vec{p}-\vec{a}) - ((\vec{p}-\vec{a})\vec{c})\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b} + t\vec{c}-\vec{a}) - ((\vec{b} + t\vec{c}-\vec{a})\vec{c})\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c} - ((\vec{b}-\vec{a} + t\vec{c})\vec{c})\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c} - ((\vec{b}-\vec{a})\vec{c} + (t\vec{c})\vec{c})\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c} - ((\vec{b}-\vec{a})\vec{c} + t(\vec{c}\vec{c}))\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c} - ((\vec{b}-\vec{a})\vec{c} + t)\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c} - ((\vec{b}-\vec{a})\vec{c})\ \vec{c} - t\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |(\vec{b}-\vec{a}) - ((\vec{b}-\vec{a})\vec{c})\ \vec{c}|$$

$$|P,g| = |B,g|$$

Definition
Der **Abstand** $|h,g|$ **zweier Geraden** g **und** h ist der Abstand $|B,g|$ des Stützpunktes B der Geraden h :

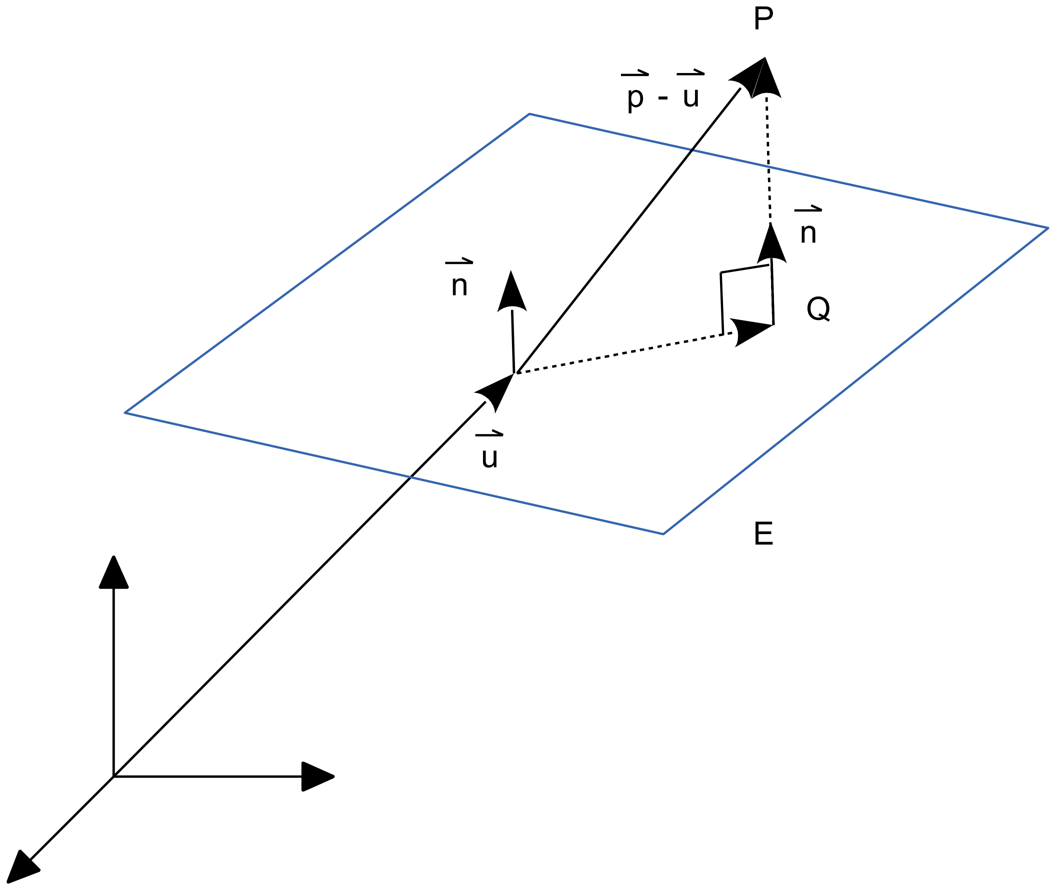
$$\boxed{|h,g| = |B,g|}\ .$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Wir können annehmen, dass die Ebenengleichung in der **Normalenform** gegeben ist:

$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0 \quad \text{mit} \quad n = |\vec{n}| = 1$

Definition
Der **Abstand** $|P,E|$ **eines Punktes** P **von der Ebene** E ist der Abstand zum Lotfußpunkt Q auf E.



Es ist $\vec{p} - \vec{q} = t\vec{n}$, wobei $t = (\vec{p} - \vec{u})\vec{n}$ die **orthogonale Projektion** des Vektors $\vec{p} - \vec{u}$ in Richtung $\vec{n}$ ist.

$$|P,E| = |\vec{p} - \vec{q}| = |t\vec{n}| = |t| = |(\vec{p} - \vec{u})\vec{n}|$$

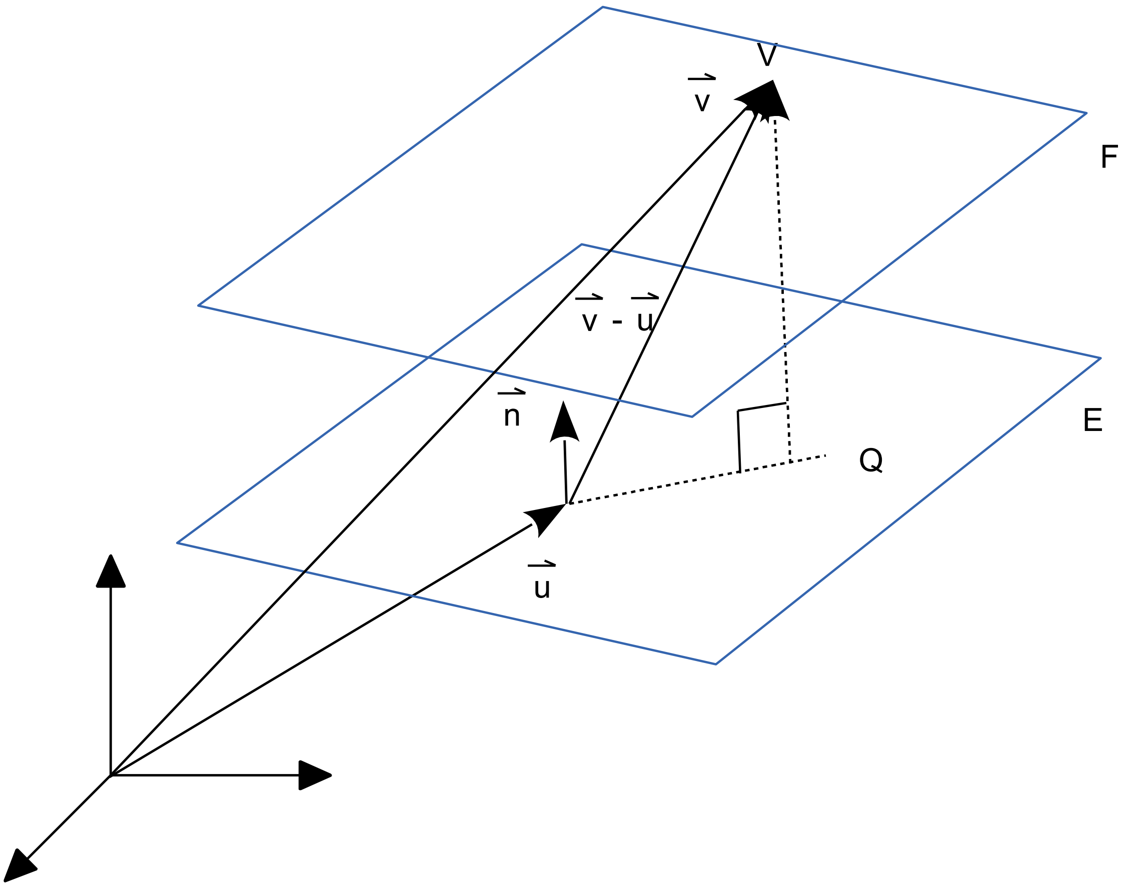
$$\boxed{|P,E| = |(\vec{p} - \vec{u})\vec{n}|}$$

Abstand zweier Ebenen

Wir können annehmen, dass die Ebenengleichungen in der **Normalenform** gegeben sind:

E : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$ mit $n = |\vec{n}| = 1$

F : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{v}) = 0$



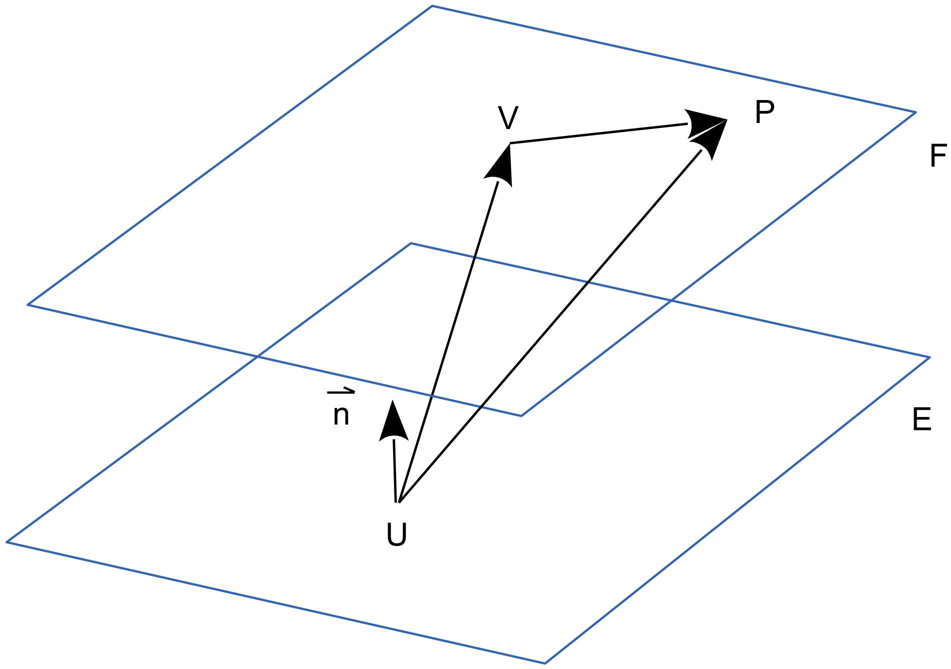
Man berechnet zuerst die den **Abstand** $|V, E|$ **des Stützpunktes** V **von** F .

Dann zeigt man, dass alle anderen Punkte P der Ebene F den gleichen Abstand haben:

Sei P irgend ein Punkt der Ebene der Ebene F mit $\vec{n}(\vec{p} - \vec{v}) = 0$.

Dann gilt:

$$\vec{p} - \vec{u} = \vec{v} - \vec{u} + \vec{p} - \vec{v}$$



$$|P,E| = |(\vec{p}-\vec{u})\vec{n}|$$

$$|P,E| = |(\vec{v} - \vec{u} + \vec{p} - \vec{v})\ \vec{n}|$$

$$|P,E| = |(\vec{v} - \vec{u})\ \vec{n} + (\vec{p} - \vec{v})\ \vec{n}|$$

$$|P,E| = |(\vec{v} - \vec{u})\ \vec{n}|$$

$$|P,E| = |V,E|$$

Definition
Der **Abstand** $|F,E|$ **zweier Ebenen von der Ebenen** E **und** P ist der Abstand des Stützpunktes V der Ebene F von E .

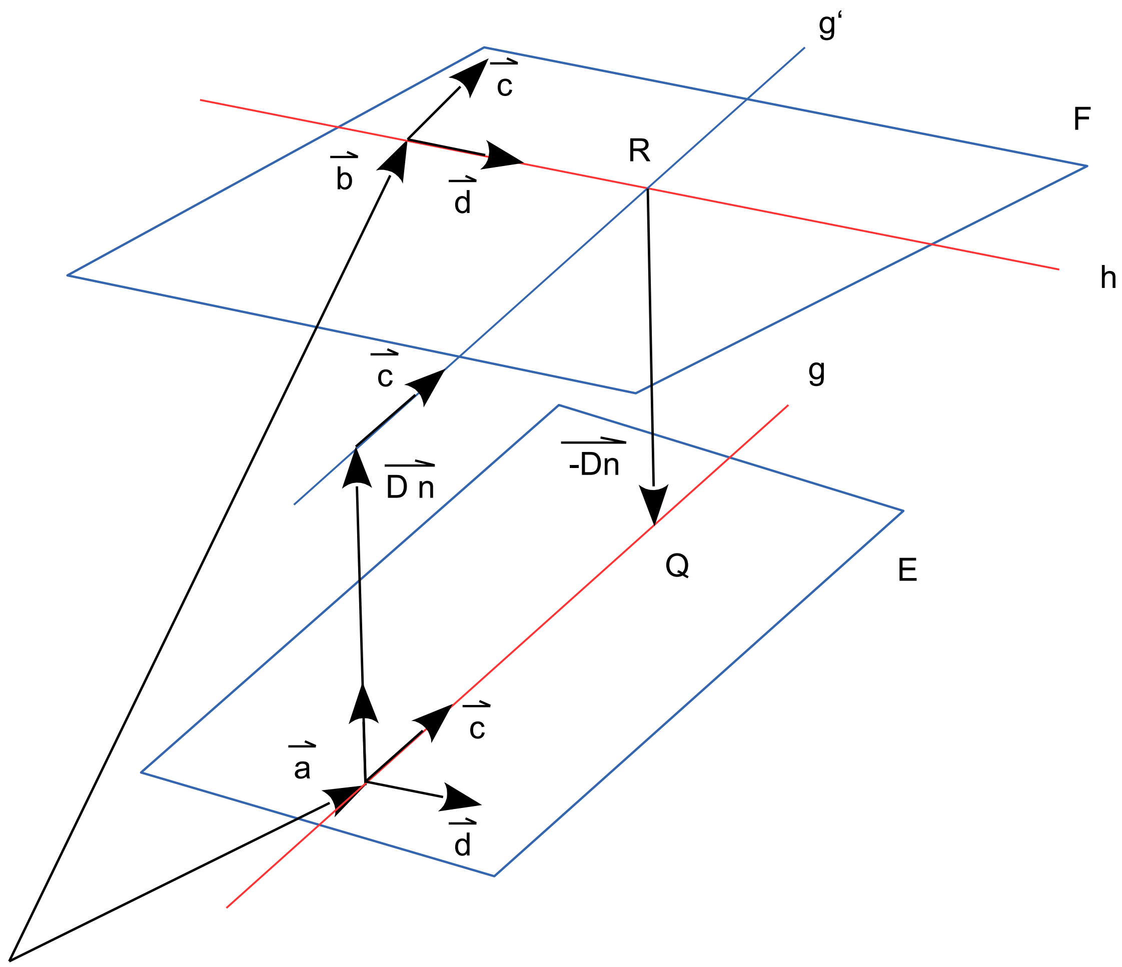
$$\boxed{|F,E| = |(\vec{v}-\vec{u})\vec{n}|}$$

Abstand windschiefer Geraden

$g \quad : \quad \vec{x} = \vec{a} + s\vec{c} \quad \text{mit} \quad |\vec{c}| = 1$

$\vec{c} \neq \vec{d} \qquad \vec{c} \neq -\vec{d}$

$h \quad : \quad \vec{x} = \vec{b} + t\vec{d} \quad \text{mit} \quad |\vec{d}| = 1$



Zuerst konstruiert man mit den beiden normierten Richtungsvektoren zwei **parallele Ebenen** E **und** F **mit** $g \in E$ **und** $h \in F$. Der **normierte Normalenvektor** dieser Ebenen sei $\vec{n}$.

Der Abstand dieser Ebenen sei $|F, E| = |(\vec{b} - \vec{a})\vec{n}| =: D$

Dann betrachtet man die zu g parallele Gerade g' mit $g' \subset F$ mit der Gleichung

g‘ $\vec{x} = \vec{a} + D\vec{n} + s\vec{c}$

Die Geraden g' und h schneiden sich im Punkt R, da die Richtungsvektoren nach Voraussetzung weder parallel noch antiparallel sind. Der zu R gehörige Ortsvektor sei $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{Dn} + s\vec{c}$$

Sei $\vec{q} = \vec{r} + \overrightarrow{-Dn} = \vec{a} + \overrightarrow{Dn} + s\vec{c} + \overrightarrow{-Dn} = \vec{a} + s\vec{c}$.

Dann liegt der zugehörige Punkt Q auf g , $Q \in g$, und es gilt:

$$\overrightarrow{QR}\ \vec{c} = 0 \text{ und } \overrightarrow{QR}\ \vec{d} = 0 .$$

Mit anderen Worden:
Es gibt auf der Geraden g einen Punkt Q und auf der Geraden h eine Punkt R , so dass der **Verbindungsvektor** $\overrightarrow{QR}$ jeweils **senkrecht auf den Richtungsvektoren** der Geraden steht , und die Läge von $\overrightarrow{QR}$ ist gleich dem Abstand der beiden Ebenen E und F : $|\overrightarrow{QR}| = |E,F| = D$.

Man könnte nun Folgendes definieren.

Definition

Der **Abstand zweier windschiefer Geraden** g **und** h ist

$$|g,h| := |\overrightarrow{QR}|$$

mit $Q \in g$, $R \in h$ und $\overrightarrow{QR}\ \vec{c} = 0$, $\overrightarrow{QR}\ \vec{d} = 0$, und nach obiger Überlegung ist

$$\boxed{|g,h| = |(\vec{b}-\vec{a})\vec{n}|} ,$$

mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ Stützvektoren von g , h , und $\vec{n}$ Normaleneinheitsvektorder zu den Richtungsvektoren wobei $\vec{c}$, $\vec{d}$.

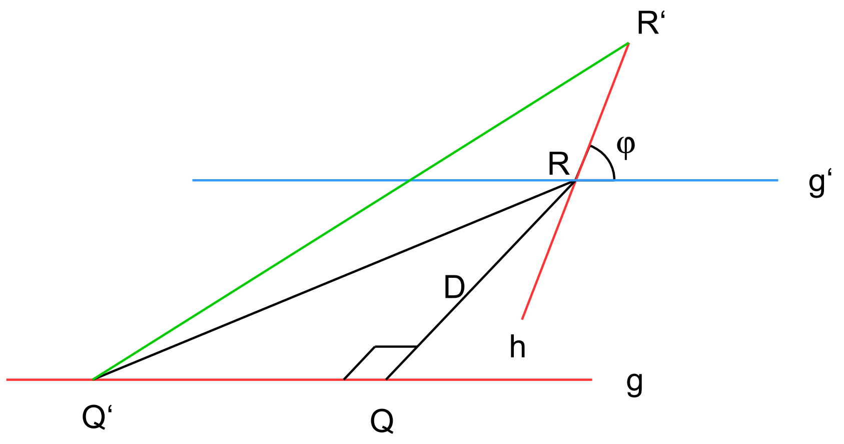
Bemerkung

Der Abstand $|g,h| = |\overrightarrow{QR}|$ ist der **kürzeste Abstand** zwischen Punkten von g und h .

Dazu muss man zeigen, für alle anderen Punktepaare Q' , R' von g , h gilt:

$$|\overrightarrow{Q'R'}| > |\overrightarrow{QR}| = D \ .$$

Mit Hilfe eines geeigneten Koordinatensystems , einer Zeichnung und einer entsprechenden Abschätzung folgt:



$$Q'(0|0|0) \ , \ Q(q|0|0) \ , \ R(q|D|0) \ , \ R'(q+r\cos\varphi|D|r\sin\varphi)$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{P'Q'}| &= \sqrt{(q + r\cos\varphi)^2 + D^2 + (r\sin\varphi)^2} \\
&= \sqrt{q^2 + 2qr\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + D^2 + r^2\sin^2\varphi} \\
&= \sqrt{q^2 + 2qr\cos\varphi + r^2 + D^2} \\
&> \sqrt{q^2 - 2qr + r^2 + D^2} \\
&= \sqrt{(q - r)^2 + D^2} \\
&\geq \sqrt{D^2} \\
&= D \\
&= |\overrightarrow{PQ}|
\end{aligned}$$

Hierbei wurden $\cos\varphi > -1$ und $(q-r)^2 \geq 0$ verwendet.

Schnitt zweier Ebenen ([P] [P])

E : $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} \quad , \quad \vec{b}\,,\,\vec{c} \neq \vec{0} \quad , \quad r\,,\,s \in \mathbb{R}$

F : $\vec{x} = \vec{d} + t\vec{e} + u\vec{f} \quad , \quad \vec{e}\,,\,\vec{f} \neq \vec{0} \quad , \quad t\,,\,u \in \mathbb{R}$

Gleichsetzung und Umformung ergibt ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Variablen :

$$\begin{array}{l} b_1 r + c_1 s - e_1 t = d_1 - a_1 + f_1 u \\ b_2 r + c_2 s - e_2 t = d_2 - a_2 + f_2 u \\ b_3 r + c_3 s - e_3 t = d_3 - a_3 + f_3 u \end{array} .$$

Da die Vektoren $\vec{b}\,,\,\vec{c}\,,\,\vec{e} \neq \vec{0}$ sind , kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $b_1 \neq 0$ ist.
Für den Fall, dass $b_2 = 0$ und $b_3 = 0$ sind , erhält man eine Gleichungssystem der Form :

$$\begin{array}{l} b_1 r + c_1 s - e_1 t = d_1 - a_1 + f_1 u \\ \qquad\quad c_2 s - e_2 t = d_2 - a_2 + f_2 u \\ \qquad\quad c_3 s - e_3 t = d_3 - a_3 + f_3 u \end{array} .$$

Falls , ohne Beschränkung der Allgemeinheit , $b_2 = 0$ und $b_3 \neq 0$ sind , kann man durch elementare Umformungen der 1. und 3. Gleichung eine Gleichung erhalten, in der die Variable r eliminiert ist. Man erhält ebenfalls ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{l} b_1 r + c_1 s - e_1 t = d_1 - a_1 + f_1 u \\ \qquad\quad c_2 s - e_2 t = d_2 - a_2 + f_2 u \\ \qquad\quad a_{32} s + a_{33} t = g_3 \end{array} .$$

Falls nun , ohne Beschränkung der Allgemeinheit , $a_{32} = 0$ ist , erhält man ein Gleichungssystem in Dreiecksgestalt :

$$\begin{array}{l} b_1 r + c_1 s - e_1 t = d_1 - a_1 + f_1 u \\ \qquad\quad c_2 s - e_2 t = d_2 - a_2 + f_2 u \\ \qquad\qquad\qquad a_{33} t = g_3 \end{array} .$$

Falls aber $c_2 \neq 0$ und $a_{32} \neq 0$ sind , kann man durch elementare Umformungen der 2. und 3. Gleichung eine Gleichung erhalten, in der die Variable s eliminiert ist. Man erhält ebenfalls ein Gleichungssystem der Form :

$$\begin{array}{l} b_1 r + c_1 s - e_1 t = d_1 - a_1 + f_1 u \\ \qquad\quad c_2 s - e_2 t = d_2 - a_2 + f_2 u \\ \qquad\qquad\qquad a_{33} t = g_3 \end{array} .$$

Falls jetzt $a_{33} \neq 0$ und $c_2 \neq 0$ sind , erhält man t als lineare Funktion von u , und Einsetzen in die 2. und die 1. Gleichung liefert s und t als lineare Funktion von u .

Insgesamt erhält man also $\vec{x}$ als lineare Vektorfunktion von u :

$\vec{x} = \vec{h} + u\,\vec{i}$, **was als Schnittmenge eine Gerade darstellt**.

Falls jedoch $a_{33} = 0$ ist , kann man nicht nach t auflösen , so dass es **keine Lösung** gibt .

Falls jetzt $a_{33} \neq 0$ und $c_2 = 0$ sind , kann man zwar nach t auflösen , aber nicht nach s , so dass **keine Lösung** gibt.

Falls jetzt $a_{33} \neq 0$ und $c_2 \neq 0$ sind , ergeben sich die Variablen t, s, r als lineare Funktionen von t und u . **Als Schnittmenge ergibt sich dann eine Ebene** . Da heißt, dass die Ebenen E und F identisch sind.

Schnitt zweier Ebenen ([N] [N])

E : $\vec{m}(\vec{x} - \vec{u}) = 0 \quad , \quad |\vec{m}| = 1$

F : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{v}) = 0 \quad , \quad |\vec{n}| = 1$

Fall 1 : $\vec{m} = \vec{n}$, das heißt $E \parallel F$.

Abstand des Punktes $U(u_1 \ \mathrm{I} \ u_2 \ \mathrm{I} \ u_3)$ von F :

$$|U,F| = (\vec{u}-\vec{v})\vec{n}$$

Fall 1 a : $|U,F| = (\vec{u}-\vec{v})\vec{n} = 0$.

$$(\vec{u}-\vec{v})\vec{n} = 0$$
$$\vec{u}\vec{n} - \vec{v}\vec{n} = 0$$
$$\vec{u}\vec{n} = \vec{v}\vec{n}$$

E : $\vec{m}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$
$$\vec{n}\vec{x} - \vec{n}\vec{u} = 0$$
$$\vec{n}\vec{x} - \vec{n}\vec{v} = 0$$

F : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{v}) = 0$

Die Ebenengleichung für F geht aus der von E hervor, **die Ebenen sind also identisch**.

Fall 1 b : $|U,F| = (\vec{u}-\vec{v})\vec{n} \neq 0$.

Gäbe es einen Punkt $P(x_1 \ \mathrm{I} \ x_2 \ \mathrm{I} \ x_3)$, der sowohl zu E als auch zu F gehört, müßte einerseits $|P,E| = (\vec{x}-\vec{v})\vec{n} \neq 0$ und andererseits $|P,E| = (\vec{x}-\vec{v})\vec{n} = 0$ sein. **Die Ebenen schneiden sich nicht**.

Fall 2 : $\vec{m} \neq \vec{n}$

$$\vec{m}(\vec{x} - \vec{u}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{v}) = 0$$

$$\vec{m}\vec{x} = \vec{m}\vec{u}$$

$$\vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{v}$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = \vec{m}\vec{u}$$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \vec{n}\vec{v}$$

Es gilt nun:

$$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} m_2 n_3 - m_3 n_2 \\ -(m_1 n_3 - m_3 n_1) \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $m_1 n_2 - m_2 n_1 \neq 0$.

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \vec{m}\vec{u} - m_3 x_3 := c$$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 = \vec{n}\vec{v} - n_3 x_3 := d$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = c$$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 = d$$

Die Lösungen sind:

$$x_1 = \frac{c(m_1 n_2 - m_2 n_1) - m_2(m_1 d - n_1 c)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} - \frac{m_2(m_1 n_3 - m_3 n_1) - m_3(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} x_3$$

$$x_2 = \frac{(m_1 d - n_1 c)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} - \frac{(m_1 n_3 - m_3 n_1)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} x_3$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

Die Ebenen schneiden sich in eine Geraden mit der Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c(m_1 n_2 - m_2 n_1) - m_2(m_1 d - n_1 c)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} \\ \dfrac{(m_1 d - n_1 c)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\dfrac{m_2(m_1 n_3 - m_3 n_1) - m_3(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{(m_1 n_2 - n_2 b_1)} \\ -\dfrac{(m_1 n_3 - m_3 n_1)}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt zweier Ebenen ([K] [K])

$E: \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c$

$F: \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c - a_3 x_3$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = d - b_3 x_3$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c - a_3 x_3$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2 = (a_1 d - b_1 c) - (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_3$$

1. Fall: $(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

$$x_2 = \frac{(a_1 d - b_1 c)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} - \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} x_3$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c - a_3 x_3$$

$$a_1 x_1 = c - a_2 x_2 - a_3 x_3$$

$$a_1 x_1 = c - a_2 \left(\frac{(a_1 d - b_1 c)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} - \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} x_3 \right) - a_3 x_3$$

$$a_1 x_1 = c - \frac{a_2 (a_1 d - b_1 c)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} - \frac{a_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} x_3 - a_3 x_3$$

$$a_1 x_1 = \frac{c(a_1 b_2 - a_2 b_1) - a_2 (a_1 d - b_1 c)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} - \frac{a_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) - a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} x_3$$

$$x_1 = \frac{c(a_1 b_2 - a_2 b_1) - a_2 (a_1 d - b_1 c)}{a_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1)} - \frac{a_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) - a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1)} x_3$$

Also:

$$x_1 = \frac{c(a_1b_2-a_2b_1)-a_2(a_1d - b_1c)}{a_1(a_1b_2-a_2b_1)} - \frac{a_2(a_1b_3-a_3b_1)-a_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(a_1b_2-a_2b_1)}\,x_3$$

$$x_2 = \frac{(a_1d - b_1c)}{(a_1b_2-a_2b_1)} - \frac{(a_1b_3-a_3b_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)}x_3$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden mit der Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c(a_1b_2-a_2b_1)-a_2(a_1d - b_1c)}{a_1(a_1b_2-a_2b_1)} \\ \dfrac{(a_1d - b_1c)}{(a_1b_2-a_2b_1)} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\dfrac{a_2(a_1b_3-a_3b_1)-a_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(a_1b_2-a_2b_1)} \\ -\dfrac{(a_1b_3-a_3b_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Fall: $(a_1b_2-a_2b_1) = 0$

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} =: v$$

$$a_1 = vb_1 \quad , \quad a_2 = vb_2$$

Falls nun auch $c - a_3x_3 = v(d - b_3x_3)$ ist, sind die beiden **Ebenengleichungen identisch**, das heißt die 1. Gleichung entsteht aus der 2. durch Multiplikation mit v.

Falls jedoch $c - a_3x_3 \neq v(d - b_3x_3)$ ist, besteht ein Widerspruch, und es gibt keine Lösung und die Ebenen **schneiden sich nicht**.

Schnitt zweier Ebenen ([P] [N])

$E: \quad \vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} \quad , \quad \vec{b} \, , \, \vec{c} \neq \vec{0} \quad , \quad r \, , \, s \in \mathbb{R}$

$F: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{v}) = 0 \quad , \quad |\vec{n}| = 1$

$$E: \quad \begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 r + c_1 s \\ x_2 &= a_2 + b_2 r + c_2 s \\ x_3 &= a_3 + b_3 r + c_3 s \end{aligned}$$

$F: \quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 r + c_1 s \quad | \quad \cdot n_1 \\ x_2 &= a_2 + b_2 r + c_2 s \quad | \quad \cdot n_2 \\ x_3 &= a_3 + b_3 r + c_3 s \quad | \quad \cdot n_3 \end{aligned}\right\} +$$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + (n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3) r + (n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3) s$$

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + (n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3) r + (n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3) s$$

$$\vec{n}\vec{v} = \vec{n}\vec{a} + (\vec{n}\vec{b}) r + (\vec{n}\vec{c}) s$$

Fall 1. $\quad \vec{n}\vec{b} = 0 \; , \quad \vec{n}\vec{c} = 0$

Da der Normalenvektor $\vec{n}$ von F orthogonal zu den Richtungsverktoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ von E sind , sind die **Ebenen E, F parallel** .

Es folgt :

$$\vec{n}\vec{v} = \vec{n}\vec{a} + (\vec{n}\vec{b}) r + (\vec{n}\vec{c}) s$$

$$\vec{n}\vec{v} = \vec{n}\vec{a}$$

Fall 1.a $\quad \vec{n}\vec{v} \neq \vec{n}\vec{a}$

Es gibt keine Lösung, und die **Ebenen sind parallel** .

Fall 1.b $\quad \vec{n}\vec{v} = \vec{n}\vec{a}$

Die Punkte der Ebene E erfüllen die Gleichung von F , das heißt , **die Ebenen sind identisch** .

Fall 2. Zum Beispiel $\vec{n}\vec{c} \neq 0$.

$$\vec{n}\vec{v} = \vec{n}\vec{a}+(\vec{n}\vec{b})r+(\vec{n}\vec{c})s$$

$$s = \frac{\vec{n}(\vec{v}-\vec{a})}{\vec{n}\vec{c}} - \frac{\vec{n}\vec{b}}{\vec{n}\vec{c}}r$$

Für i= 1, 2 ,3 folgt :

$$x_i = a_i + b_i r + c_i\left(\frac{\vec{n}(\vec{v}-\vec{a})}{\vec{n}\vec{c}} - \frac{\vec{n}\vec{b}}{\vec{n}\vec{c}}r\right)$$

$$x_i = a_i + b_i r + \frac{c_i\vec{n}(\vec{v}-\vec{a})}{\vec{n}\vec{c}} - \frac{c_i\vec{n}\vec{b}}{\vec{n}\vec{c}}r$$

Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden mit der Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \dfrac{c_1\vec{n}(\vec{v}-\vec{a})}{\vec{n}\vec{c}} \\ a_2 - \dfrac{c_2\vec{n}(\vec{v}-\vec{a})}{\vec{n}\vec{c}} \\ a_3 - \dfrac{c_3\vec{n}(\vec{v}-\vec{a})}{\vec{n}\vec{c}} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} b_1 - \dfrac{c_1\vec{n}\vec{b}}{\vec{n}\vec{c}} \\ b_2 - \dfrac{c_2\vec{n}\vec{b}}{\vec{n}\vec{c}} \\ b_3 - \dfrac{c_3\vec{n}\vec{b}}{\vec{n}\vec{c}} \end{pmatrix} .$$

<u>Schnitt zweier Ebenen</u> ([P] [K])

E : $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} \quad , \quad \vec{b} , \vec{c} \neq \vec{0} \quad , \quad r , s \in \mathbb{R}$

F : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$

Das Lösungsverfahren läuft analog zum **Schnitt zweier Ebenen ([P] [N])** .

<u>Schnitt zweier Ebenen</u> ([N] [K])

E : $\vec{n}(\vec{x} - \vec{v}) = 0 \quad , \quad |\vec{n}| = 1$

F : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$

Das Lösungsverfahren läuft analog zum **Schnitt zweier Ebenen ([K] [K])** .