Ein- und zweidimensionales Riemannsches Integral

Arno Fehringer

Juni 2018

Vorbereitungen für das Riemannsche Integral

Definitionen :

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Ein Punkt $H \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt von** A , falls in jeder Umgebung $U_\epsilon(H)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Bemerkung : Ein Häufungspunkt einer Menge A braucht nicht zu A gehören .

Falls jeder Häufungspunkt der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu A gehört, heißt die Menge A **abgeschlossen** .

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leq S$ für alle $x \in A$.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt** .

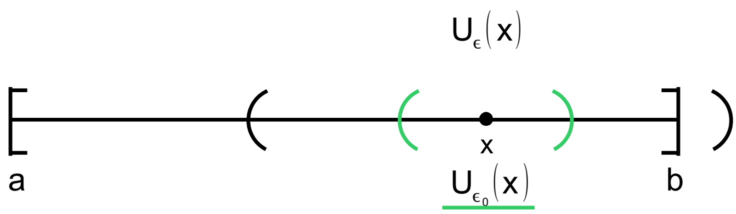
Bemerkungen :

(1) Jedes Intervall $[a,b] \subset R$ **ist kompakt** .

Der Nachweis der Beschränktheit ist trivial. Man zeigt, dass genau jeder Punkt des Intervalls ein Häufungspunkt ist.

Fall 1 :

Sei $x \in (a,b)$ und sei $U_\epsilon(x)$ gegeben.



Setze ϵ_0 :< $\min(\epsilon, x-a, b-x)$ und betrachte $U_{\epsilon_0}(x)$.

Dann gilt $U_{\epsilon_0}(x) \subset U_\epsilon$, $U_{\epsilon_0}(x) \subset [a,b]$.

Außerdem gilt $\dfrac{1}{n} < \epsilon_0$, also $x+\dfrac{1}{n} \in U_{\epsilon_0}(x) \subset [a,b]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Fall 2 :

Sei $x = a$ und sei $U_\epsilon(x)$ gegeben.

Setze ϵ_0 :< $\min(\epsilon, b-a)$ und betrachte $U_{\epsilon_0}(a)$.

Dann gilt $U_{\epsilon_0}(b) \subset U_\epsilon$ und $\frac{1}{n} < \epsilon_0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt :

$$a + \frac{1}{n} < a + \epsilon_0$$

$$a + \frac{1}{n} < a + \epsilon$$

$$a + \frac{1}{n} \in U_\epsilon(a) \quad \text{für fast alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a + \frac{1}{n} < a + \epsilon_0$$

$$a + \frac{1}{n} < a + b - a$$

$$a + \frac{1}{n} < b$$

$$a < a + \frac{1}{n} < b$$

$$a + \frac{1}{n} \in [a,b] \quad \text{für fast alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

Fall 3 :

Für $x = a$ macht man eine entsprechende Konstruktion !

Fall 4 :

Für $x \notin [a,b]$ gibt es immer Umgebungen, die kein Element von $[a,b]$ enthalten .

(2) Das kartesische Produkt $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt .

Der Nachweis der Beschränktheit ist trivial. Der Nachweis der Abgeschlossenheit ist etwas aufwendiger, verläuft aber im Wesentlichen analog .
Es soll hier nur der Fall 1 besprochen werden :

Fall 1 :

Sei $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$ und sei $U_\epsilon((x,y))$ gegeben.

Setze $\epsilon_0 :< \min\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon, x-a, b-x, y-c, d-y\right)$ und betrachte $U_{\epsilon_0}((x,y))$.

Dann gilt $U_{\epsilon_0}(x) \times U_{\epsilon_0}(y) \subset U_\epsilon((x,y)) \cap [a,b] \times [c,d]$ und

$\left(x+\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}\right) \in U_{\epsilon_0}(x) \times U_{\epsilon_0}(y)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Die anderen Fälle behandelt man entsprechend .

Definition :

Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig**, wenn für alle x aus [a,b] gilt:

$$\lim_{\bar{x} \to x} f(\bar{x}) = f(x)$$

Dabei bedeutet $\lim_{\bar{x} \to x} f(\bar{x}) = f(x)$, dass für jede Folge (x_n) mit $\lim_{x_n \to x} x_n = x$ folgt, dass auch $\lim_{x_n \to x} f(x_n) = f(x)$ ist.

Satz

Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig in x.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1)

Sei x_n eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon .$$

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt:

$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, und $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Angenommen es gäbe ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x(\delta)$ existiert mit

$| x(\delta) - x | < \delta$, aber $| f(x(\delta)) - f(x) | \geq \varepsilon_0$. Falls nun $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq n_0$, aber $| f(x_n) - f(x) | \geq \varepsilon_0$.

Das heißt aber, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq f(x)$, im Widerspruch zur Stetigkeit von f.

q.e.d.

Satz

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f sogar **gleichmäßig stetig**. Das heißt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a;b]$ gilt:

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \,.$$

<u>Bemerkung</u> : Eine entsprechende Aussage gilt auch falls der Definitionsbereich von f die kompakte Menge $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Beweis:

Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ Werte $x(\delta)$, $y(\delta)$ existierten, mit

$| x(\delta) - y(\delta) | < \delta$, aber $| f(x(\delta)) - f(y(\delta)) | \geq \varepsilon_0$.

Speziell würden für $\delta = \frac{1}{n}$ Folgen x_n, y_n existieren mit $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, aber

$$|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \,.$$

Da das Intervall $[a,b]$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt ist, ist $x \in [a,b]$ und nach dem **Satz von Bolzano – Weierstraß** gibt es eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Wegen $|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n}$ gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x$ und $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0$.

Wegen der Stetigkeit von f ist aber $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x)$, also

$\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}) = 0$ im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0$.

q.e.d.

Satz

Eine stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt .

Bemerkung : Eine entsprechende Aussage gilt auch, falls der Definitionsbereich von f das Kartesische Produkt $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ ist.

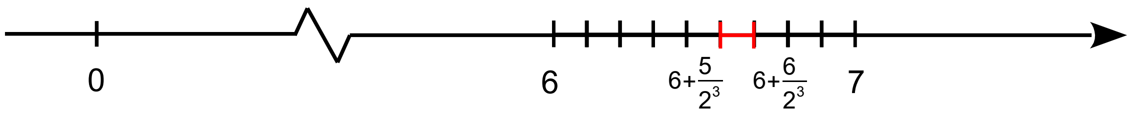
Beweis :

Angenommen, f sei nicht beschränkt. Wenn $I_1 = [a,b]$, dann ist f in mindestens einer Hälfte I_2 nicht beschränkt, ebenso nicht in einer Hälfte I_3 von I_2 etc.

Die Intervallschachtelung I_1 , I_2 , I_3 ... hat ein Zentrum c , so dass f in keiner Umgebung von c beschränkt ist, was im Widerspruch zu $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ steht.

q.e.d.

Zerlegung von $\mathbb{R}$ in Intervalle $I_{\alpha r}$ der Länge $\frac{1}{2^r}$



Für das rote Intervall gilt :

$$6+\frac{5}{2^3} \le x \le 6+\frac{5+1}{2^3}$$

$$\frac{6\cdot 2^3+6}{2^3} \le x \le \frac{6\cdot 2^3+6+1}{2^3}$$

$$\frac{53}{2^3} \le x \le \frac{53+1}{2^3}$$

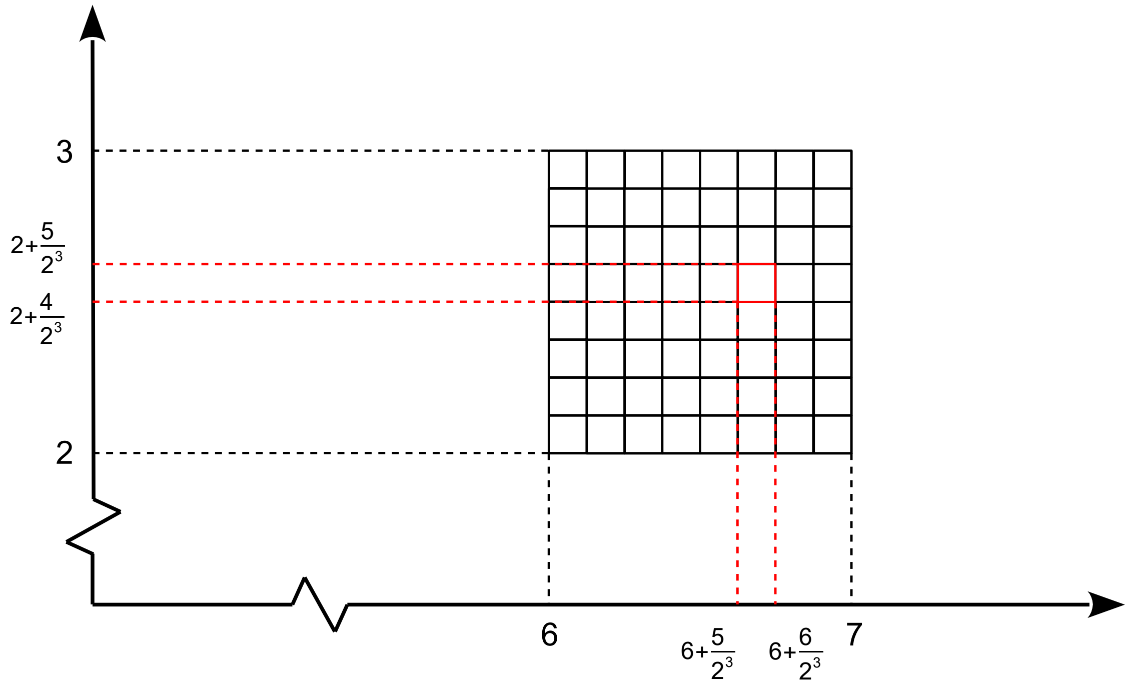
$$I_{53\,\frac{1}{2^3}} = \left\{ x : \frac{53}{2^3} \le x \le \frac{53+1}{2^3} \right\}$$

Für ein Intervall $I_{\alpha r}$ der Länge $\frac{1}{2^r}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\frac{\alpha}{2^r} \le x \le \frac{\alpha+1}{2^r}$$

$$I_{\alpha r} = \left\{ x : \frac{\alpha}{2^r} \le x \le \frac{\alpha+1}{2^r} \right\}$$

Zerlegung des $\mathbb{R}^2$ in Quadrate $I_{\alpha\beta r} = I_{\alpha r} \times I_{\beta r}$ der Länge $\frac{1}{2^r}$



Für das rote Quadrat gilt :

$$6+\frac{5}{2^3} \le x \le 6+\frac{5+1}{2^3} \quad , \quad 2+\frac{4}{2^3} \le y \le 2+\frac{4+1}{2^3}$$

$$\frac{6 \cdot 2^3+5}{2^3} \le x \le \frac{6 \cdot 2^3+5+1}{2^3} \quad , \quad \frac{2 \cdot 2^3+4}{2^3} \le y \le \frac{2 \cdot 2^3+4+1}{2^3}$$

$$\frac{53}{2^3} \le x \le \frac{53+1}{2^3} \quad , \quad \frac{20}{2^3} \le y \le \frac{20+1}{2^3}$$

$$I_{53\ 20\ \frac{1}{2^3}} = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{53}{2^3} \le x \le \frac{53+1}{2^3} \ , \ \frac{20}{2^3} \le y \le \frac{20+1}{2^3} \right\}$$

$$I_{53\ 20\ \frac{1}{2^3}} = I_{53\ \frac{1}{2^3}} \times I_{20\ \frac{1}{2^3}}$$

Für ein Quadrat $I_{\alpha\beta r}$ der Kantenlänge $\frac{1}{2^r}$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\alpha}{2^r} \le x \le \frac{\alpha+1}{2^r} \quad , \quad \frac{\beta}{2^r} \le y \le \frac{\beta+1}{2^r}$$

$$I_{\alpha\beta r} = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{\alpha}{2^r} \le x \le \frac{\alpha+1}{2^r} \ , \ \frac{\beta}{2^r} \le y \le \frac{\beta+1}{2^r} \right\}$$

$$I_{\alpha\beta r} = I_{\alpha r} \times I_{\beta r}$$

Das eindimensionale Riemannsche Integral

Gegeben sei die beschränkte Funktion $f \; : \; I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Wir zerlegen $\mathbb{R}$ in Intervalle $I_{\alpha r}$ der Länge $\frac{1}{2^r}$ und dem Maß $\mu(I_{\alpha r}) = \frac{1}{2^r}$.

Dann betrachten wir die Riemannschen Unter- und Obersummen

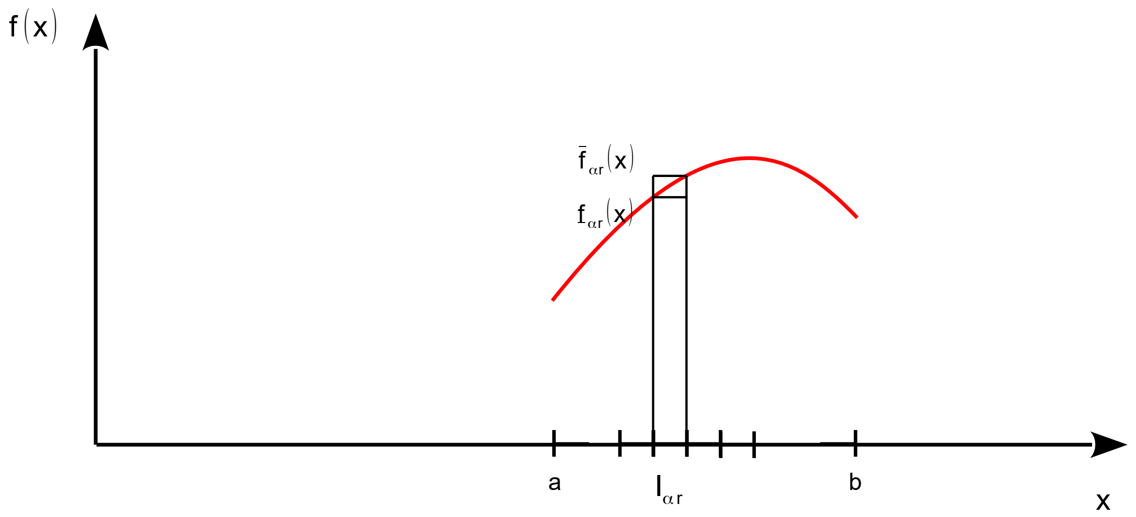
$$\underline{S}_r(f) := \sum_{I_{\alpha r} \subset I} \underline{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \quad , \quad \overline{S}_r(f) := \sum_{I_{\alpha r} \cap I \neq \emptyset} \overline{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \quad .$$

Dabei sind

$$\underline{f}_{\alpha r}(x) = \inf\{f(x) \; , \; x \in I_{\alpha r}\} \quad \text{und} \quad \overline{f}_{\alpha r}(x) = \sup\{f(x) \; , \; x \in I_{\alpha r}\} \quad .$$

Die Folge der Untersummen sind monoton wachsend, die der Obersummen monoton fallend, und es gilt

$$\underline{S}_r(f) \leq \underline{S}_{r+1}(f) \leq \overline{S}_{r+1}(f) \leq \overline{S}_r(f) \quad .$$



Da jede monotone und beschränkte Folge konvergent ist, existieren die Grenzwerte

$$\lim_{r\to\infty} \underline{S}_r(f) \quad , \quad \lim_{r\to\infty} \overline{S}_r(f) \quad .$$

Stimmen die Grenzwerte überein, heißen sie **Riemannsches Integral** der Funktion f , und die Funktion heißt **Riemann-integrierbar** :

$$\int_{[a,b]} f(x)\mu_x := \lim_{r\to\infty} \underline{S}_r(f) = \lim_{r\to\infty} \overline{S}_r(f)$$

Satz

Jede stetige Funktion $f \; : \; I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar .

Beweis :

Es genügt, zu zeigen : Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum \bar{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; - \; \sum f_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; < \; \epsilon \; .$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f auf der kompakten Menge $I = [a,b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in I_{\alpha r} \; .$$

Dann ist aber

$$\left|\bar{f}_{\alpha r}(x) - \underline{f}_{\alpha r}(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} < \frac{\epsilon}{(b-a)} \; ,$$

und es folgt

$$\sum \bar{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; - \; \sum f_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; = \; \sum \left(\bar{f}_{\alpha r}(x) - f_{\alpha r}(x)\right)\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; - \; \sum f_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; < \; \sum \frac{\epsilon}{(b-a)}\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; - \; \sum f_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; < \; \frac{\epsilon}{(b-a)} \sum \frac{1}{2^r}$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; - \; \sum f_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; < \; \frac{\epsilon}{(b-a)} \, (b-a)$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; - \; \sum f_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \; < \; \epsilon$$

q.e.d.

Das zweidimensionale Riemannsche Integral

Gegeben sei die beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Wir zerlegen den $\mathbb{R}^2$ in Quadrate $I_{\alpha\beta r} = I_{\alpha r} \times I_{\beta r}$ der Länge $\frac{1}{2^r}$ und dem Maß

$$\mu(I_{\alpha\beta r}) = \frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \ .$$

Dann betrachten wir die Riemannschen Unter- und Obersummen

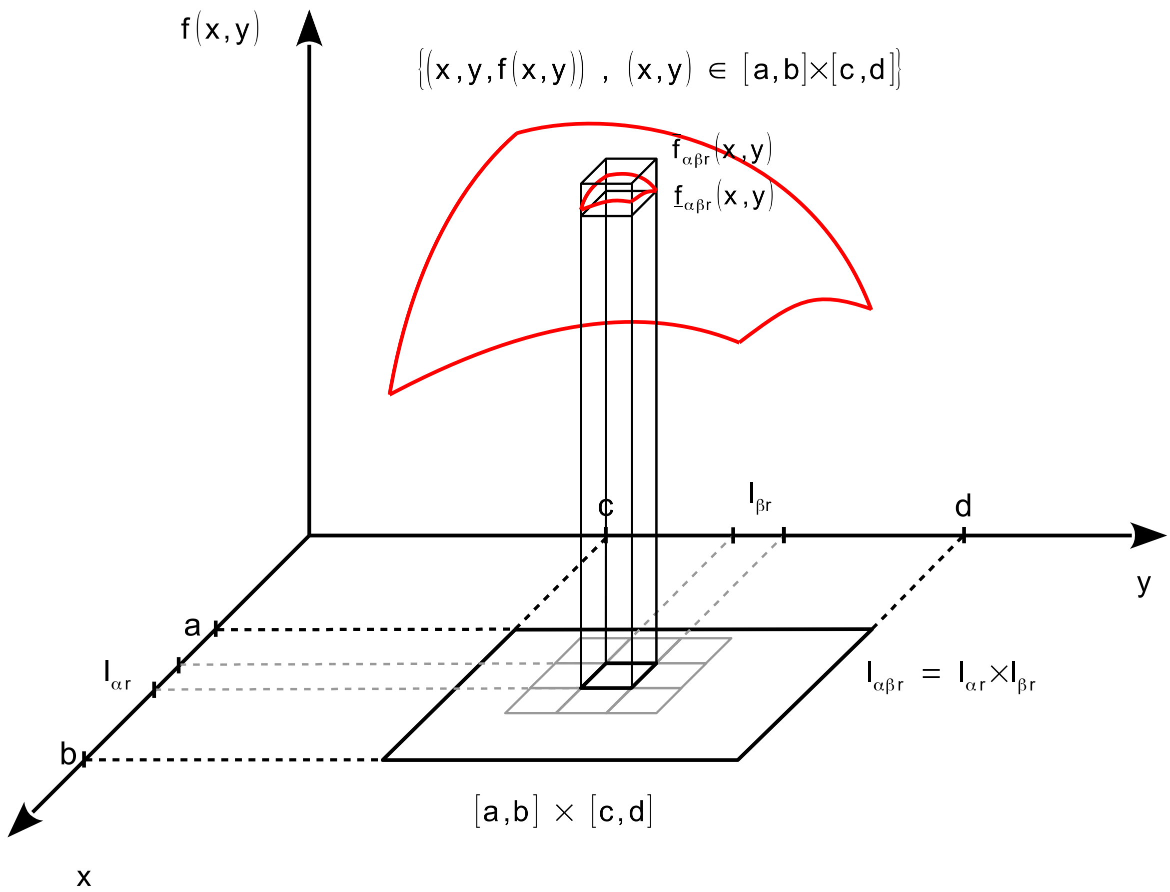
$$\underline{S}_r(f) := \sum_{I_{\alpha\beta r} \subset I} \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \quad , \quad \overline{S}_r(f) := \sum_{I_{\alpha\beta r} \cap I \neq \emptyset} \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \ .$$

Dabei sind

$$\underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y) = \inf\{f(x,y) \ , \ (x,y) \in I_{\alpha\beta r}\} \quad \text{und} \quad \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y) = \sup\{f(x,y) \ , \ (x,y) \in I_{\alpha\beta r}\} \ .$$

Die Folge der Untersummen sind monoton wachsend, die der Obersummen monoton fallend, und es gilt

$$\underline{S}_r(f) \leq \underline{S}_{r+1}(f) \leq \overline{S}_{r+1}(f) \leq \overline{S}_r(f) \ .$$



Da jede monotone und beschränkte Folge konvergent ist, existieren die Grenzwerte

$$\lim_{r\to\infty} \underline{S}_r(f) \quad , \quad \lim_{r\to\infty} \overline{S}_r(f) \quad .$$

Stimmen die Grenzwerte überein, heißen sie **Riemannsches Integral** der Funktion f , und die Funktion heißt **Riemann-integrierbar** :

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mu_{xy} \;:=\; \lim_{r\to\infty} \underline{S}_r(f) \;=\; \lim_{r\to\infty} \overline{S}_r(f)$$

Satz

Jede stetige Funktion $f \;:\; I = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar .

Beweis :

Es genügt, zu zeigen : Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum \bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \;-\; \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \;<\; \epsilon \quad .$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f auf der kompakten Menge $[a,b] \times [c,d]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)(d-c)} \quad \text{für alle} \quad (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in I_{\alpha\beta r} \quad .$$

Dann ist aber

$$\left|\bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y) - \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\right| \le \frac{\epsilon}{2(b-a)(d-c)} < \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)} \quad ,$$

und es folgt

$$\sum \bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} - \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} = \sum \left(\bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y) - \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\right)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} - \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} < \sum \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)}\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} - \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} < \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)} \sum \frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} - \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} < \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)} (b-a)(d-c)$$

$$\sum \bar{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} - \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} < \epsilon$$

q.e.d.

Der Satz von Fubini

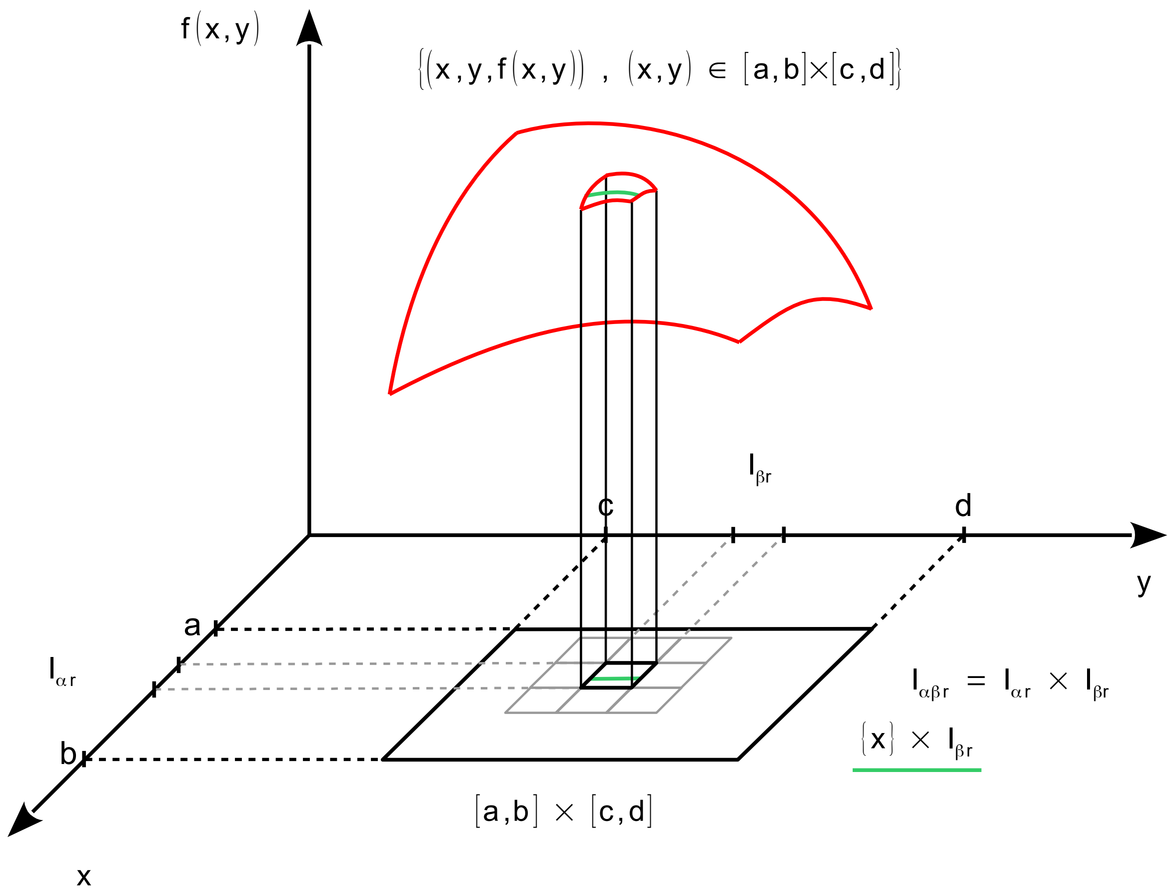
(Reduktion eines zweidimensionalen Integrals auf eindimensionale Integrale)

Die Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar, das heißt, es existiert das Integral $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\mu_{xy}$.

Wenn nun außerdem für alle $x \in [a,b]$ das Integral $\int\limits_{[c,d]} f(x,y)\,d\mu_y$ existiert, dann gilt

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\mu_{xy} = \int\limits_{[a,b]} \left(\int\limits_{[c,d]} f(x,y)\,d\mu_y \right) d\mu_x \quad .$$

Beweis :



Setze für alle $x \in [a,b]$: $\quad F(x) := \int\limits_{[c,d]} f(x,y)\,d\mu_y$

Es ist

$$\sum \underline{f}_{\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \;\le\; F(x) \;\le\; \sum \overline{f}_{\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}$$

Wegen $\{x\}\times I_{\beta r} \subset I_{\alpha r}\times I_{\beta r} = I_{\alpha\beta r}$ ist $\underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y) \le \underline{f}_{\beta r}(x,y)$, $\overline{f}_{\beta r}(x,y) \le \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)$, und es folgt

$$\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum \underline{f}_{\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \;\le\; F(x) \;\le\; \sum \overline{f}_{\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \quad ,$$

speziell

$$\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \;\le\; F(x) \;\le\; \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \quad .$$

Für $x \in I_{\alpha r}$: $\quad \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \le F(x) \quad , \quad F(x) \le \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}$,

also auch $\quad \sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \le \underline{F}_{\alpha r}(x) \quad , \quad \overline{F}_{\alpha r}(x) \le \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}$.

Es folgt jeweils weiter :

$$\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r} \;\le\; \underline{F}_{\alpha r}(x) \qquad\qquad \overline{F}_{\alpha r}(x) \;\le\; \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}$$

$$\left(\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\right)\frac{1}{2^r} \;\le\; \underline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \qquad\qquad \overline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \;\le\; \left(\sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\right)\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \;\le\; \underline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \qquad\qquad \overline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r}$$

$$\sum\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum \underline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \qquad\qquad \sum \overline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum\sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r}$$

$$\sum \underline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum \underline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \qquad\qquad \sum \overline{F}_{\alpha r}(x)\frac{1}{2^r} \;\le\; \sum \overline{f}_{\alpha\beta r}(x,y)\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^r}$$

Die Grenzwertbetrachtung für $r \to \infty$ liefert jeweils

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\mu_{xy} \;\le\; \int\limits_{[c,d]} F(x)\,d\mu_y \quad , \quad \int\limits_{[c,d]} F(x)\,d\mu_y \;\le\; \int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\mu_{xy}$$

und damit

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\mu_{xy} \;=\; \int\limits_{[c,d]} F(x)\,d\mu_y \;=\; \int\limits_{[a,b]}\left(\int\limits_{[c,d]} f(x,y)\,d\mu_y\right)d\mu_x \quad .$$

q.e.d.

Bemerkung :

Für die höherdimensionale Integration der Funktion $f : [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$

kann man entsprechend zeigen, dass

$$\int\limits_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]} f(x_{1,\ldots}, x_n)\, d\mu_{x_1\ldots x_n} = \int\limits_{[a_1,b_1]} \left(\int\limits_{[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\mu_{x_2\ldots x_n} \right) d\mu_{x_1}$$

ist.