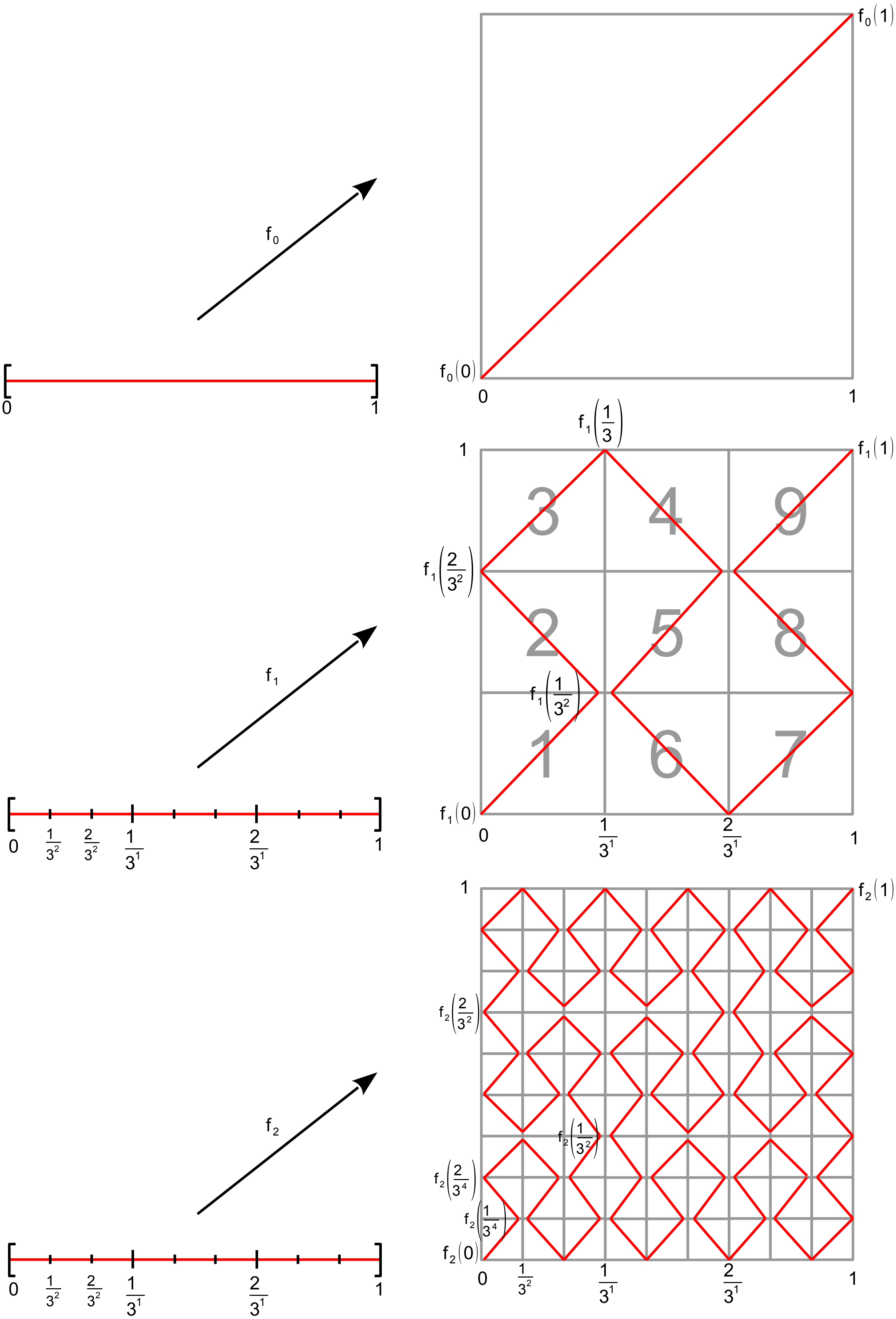
Eine flächenfüllende Kurve

Arno Fehringer , Juni 2018

Quellen :

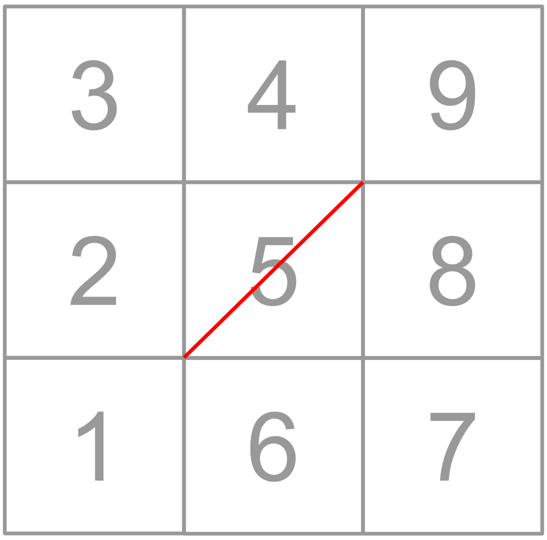
Gathmann, Andres : Grundlagen der Mathematik 1 und 2 . Vorlesungsskript TU Kaiserslautern 2015/2016 .

http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/gdm-2015/gdm-2015.pdf [18.06.2018]

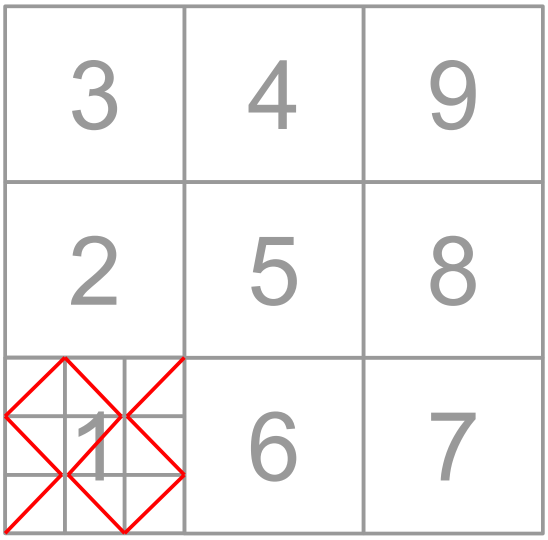

f0
f0(0)
f0(1)
0
1
f1
f1(1/3)
f1(1)
f1(2/3²)
f1(1/3²)
f1(0)
1/3²
2/3²
1/3¹
2/3¹
1 2 3 4 5 6 7 8 9
f2
f2(1)
f2(2/3²)
f2(1/3²)
f2(2/3⁴)
f2(1/3⁴)
f2(0)

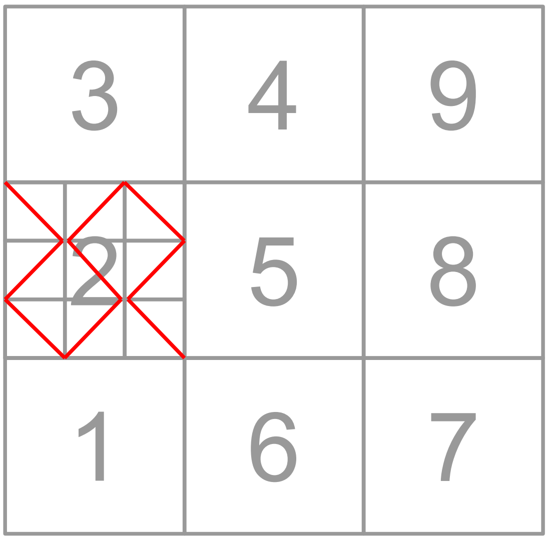
Das Bild $f_0([0,1])$ ist die Diagonale von links unten nach rechts oben des Quadrats $[0,1]\times[0,1]$ mit der Kantenlänge 1 .

Die Bilder $f_1\left(\left[\frac{0}{3^2},\frac{1}{3^2}\right]\right)$, … , $f_1\left(\left[\frac{8}{3^2},1\right]\right)$ sind auf $\frac{1}{3}$ verkleinerte , ähnliche Abbilder von $f_0([0,1])$, die der Reihe nach in den Quadraten 1, … ,9 liegen , so dass $f_1([0,1])$ insgesamt eine zusammenhängende Linie ist.
Zum Beispiel ist die Diagonale im Quadrat 5 das Bild von $f_0([0,1])$ unter der Streckung mit dem Streckfaktor $\frac{1}{3}$ und den Spiegelungen an der Horizontalen und Vertikalen :



Die Bilder $f_2\left(\left[\frac{0}{3^2},\frac{1}{3^2}\right]\right)$, … , $f_2\left(\left[\frac{8}{3^2},1\right]\right)$ sind auf $\frac{1}{3}$ verkleinerte , ähnliche Abbilder von $f_1([0,1])$, die der Reihe nach in den Quadraten 1, … ,9 liegen , so dass insgesamt eine zusammenhängende Linie entsteht .
Zum Beispiel geht das Linienstück im Quadrat 1 das Bild von $f_1([0,1])$ unter der Streckung mit dem Streckfaktor $\frac{1}{3}$. Das Linienstück im Quadrat 2 ist das entsprechend verkleinerte und an der Vertikalen gespiegelte Bild von $f_1([0,1])$:





Anders gesagt :

Das Bild $f_0([0,1])$ ist die Diagonale der Quadrats der Kantenlänge $\frac{1}{3^0}$. Die Diagonale ist das Bild des Intervalls der Länge $\frac{1}{3^0}$.

Das Bild $f_1([0,1])$ ist eine zusammenhängende Folge von 3^2 Diagonalen von Quadraten mit der Kantenlänge $\frac{1}{3^1}$. Jede dieser Diagonalen ist das Bild eines Intervalls der Länge $\frac{1}{3^2}$.

Das Bild $f_2([0,1])$ ist eine zusammenhängende Folge von 3^4 Diagonalen von Quadraten mit der Kantenlänge $\frac{1}{3^2}$. Jede dieser Diagonalen ist das Bild eines Intervalls der Länge $\frac{1}{3^4}$.

.
.
.

Das Bild $f_n([0,1])$ ist eine zusammenhängende Folge von 3^{2n} Diagonalen von Quadraten mit der Kantenlänge $\frac{1}{3^n}$. Jede dieser Diagonalen ist das Bild eines Intervalls der Länge $\frac{1}{3^{2n}}$.

Eigenschaften der oben konstruierten Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(1) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ stetig .

(2) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise konvergent , das heißt, für alle $x \in [0,1]$ existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(3) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist sogar gleichmäßig konvergent .

(4) Die Grenzfunktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ ist stetig .

(5) Die Grenzfunktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ ist surjektiv .

Beweise :

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ eine stetige Zusammensetzung von stetigen Funktionen und damit ebenfalls stetig .

(2) Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Für ein beliebiges $x \in [0,1]$ liegt dann $f_{n_0}(x)$ auf der Diagonalen eines Quadrates der Kantenlänge $\frac{1}{3^{n_0}}$:

$$f_{n_0}(x) \in Q := \left[\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right] \times \left[\frac{b}{3^{n_0}}, \frac{b+1}{3^{n_0}}\right] \quad \text{mit gewissen} \quad a, b \in \{0, \ldots, 3^{n_0}\}$$

Nach Konstruktion der Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann auch für alle $n \geq n_0$:

$$f_n(x) \in Q$$

Für alle $n, m \geq n_0$ gilt dann $f_n(x), f_m(x) \in Q$, und

$$\left| f_n(x) - f_m(x) \right| \leq \sqrt{2} \, \frac{1}{3^{n_0}} < \sqrt{2} \, \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = \epsilon \quad .$$

Mit anderen Worten, die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist ist für festes $x \in [0,1]$ eine **Cauchy-Folge** , und es existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

(3) Mit der Grenzwertbildung folgt für beliebiges $x \in [0,1]$ und alle $n \geq n_0$:

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \lim_{m \to \infty} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| \leq \sqrt{2} \, \frac{1}{3^{n_0}}$$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \epsilon$$

Da n_0 nur von ϵ abhängt , ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent .

(4) Die Grenzfunktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ mit $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ist gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen und damit stetig , denn :

Sei $x_0 \in [0,1]$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1] \quad .$$

Wegen der Stetigkeit von f_n gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad |x-x_0| < \delta \quad .$$

Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für alle $x \in [0,1]$ mit $|x-x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0)-f(x_0)| \\
|f(x)-f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
|f(x)-f(x_0)| &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

$$|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$$

Also ist die Grenzfunktion f in jedem beliebigen $x_0 \in [0,1]$ stetig .

(5) Im $\mathbb{R}^n$ ist „kompakt“ gleichbedeutend mit „abgeschlossen und beschränkt“ .
Das stetige Bild $f([0,1])$ der kompakten Menge $[0,1]$ ist ebenfalls kompakt .
(Das kann man mit dem Satz vom Maximum und Minimum und mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen beweisen .)

Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus f([0,1])$ ist offen .

Angenommen , f ist nicht surjektiv .
Dann gibt es ein $y \in [0,1]\times[0,1] \setminus f([0,1]) \subset \mathbb{R}^2 \setminus f([0,1])$ und eine Umgebung $U_\epsilon(y) \subset \mathbb{R}^2 \setminus f([0,1])$.

Bei genügend großem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Quadrat $Q := \left[\frac{a}{3^n}, \frac{a+1}{3^n}\right]\times\left[\frac{b}{3^n}, \frac{b+1}{3^n}\right]$ mit $Q \subset U_\epsilon(y)$, und die Diagonale des Quadrates ist das Bild eines Intervalls der Länge $\frac{1}{3^{2n}}$.
Also gilt für unendlich viele $x \in [0,1]$, dass $f(x) \notin f([0,1])$, was einen Widerspruch darstellt .