Der Komplexe Vier-Kreise-Satz von Descartes

(nach Northshield)

Arno Fehringer , August 2018

Der komplexe Vier-Kreise-Satz lautet :

Sind in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ vier sich paarweise berührende Kreise $K_{z_i r_i}$, $i \in \{1;2;3;4\}$ gegeben, so gilt

$$2\left(\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{z_2^2}{r_2^2} + \frac{z_3^2}{r_3^2} + \frac{z_4^2}{r_4^2}\right) = \left(\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} + \frac{z_3}{r_3} + \frac{z_4}{r_4}\right)^2 \quad .$$

Bemerkung :
Nach **Fehringer [2]** können zum Beispiel im $\mathbb{R}$ die Kreise $K_{z_1 r_1}$, $K_{z_2 r_2}$ sowie r_3 vorgegeben werden, um z_3 des Kreises $K_{z_3 r_3}$ und $K_{z_4 r_4}$ zu berechnen.
Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Beweis des komplexen Vier-Kreise-Satzes von **Sam Northshield [1]** etwas ausführlicher und übersichtlicher darzustellen.

Quellen :

[1] Northshield, Sam : Complex Descartes Circle Theorem. In: The American Mathematical Monthly , Vol. 121, No. 10 (December 2014), pp. 927-931

https://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.121.10.927

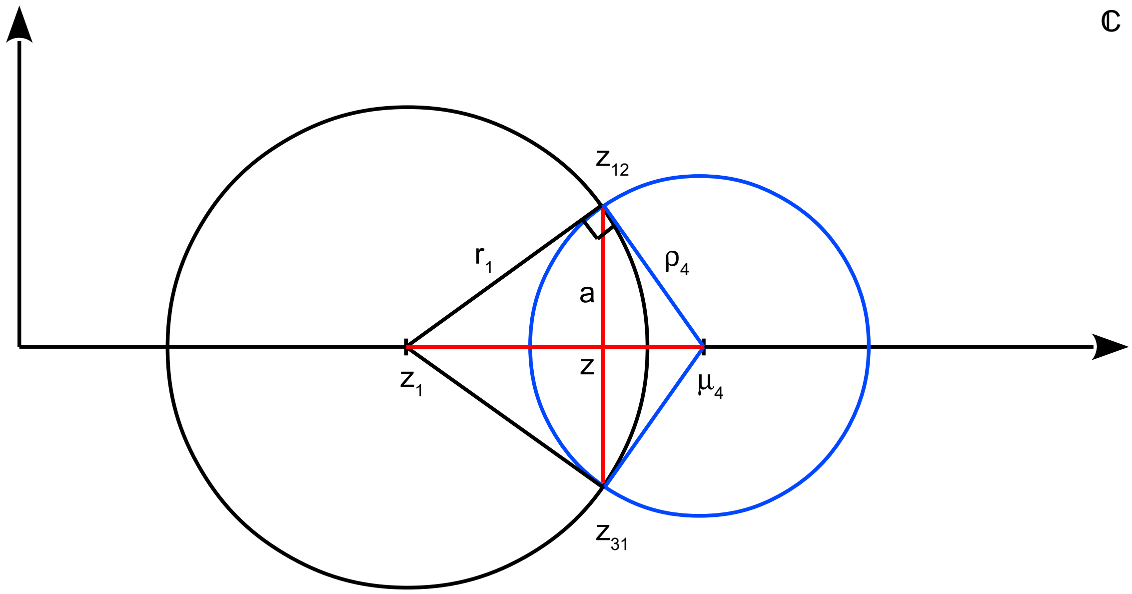
https://www.semanticscholar.org/paper/Complex-Descartes-Circle-Theorem-Northshield/bfbc963fbf592c914f5ba6348844ab712b183726

[2] Fehringer, Arno : Der Vier-Kreise-Satz von Descartes (in elementarer Darstellung), Juli 2018

http://mathematikgarten.npage.de/get_file.php?id=33078777&vnr=385360

Vorbetrachtung 1 :

In der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ seien der Kreis K_{z_1,r_1} und der Kreis I_{μ_4,ρ_4} mit den Mittelpunkten z_1 , μ_4 und den Radien r_1 , ρ_4 derart gegeben, dass die Mittelpunkte auf der reellen Geraden liegen, und dass sich die Kreise rechtwinklig in den Punkten z_{31} , z_{12} schneiden.



$z_{12} = z + ia$ $\qquad$ $z_{31} = z - ia$

$$\boxed{z_1 = z - \sqrt{r_1^2 - a^2}} \qquad \boxed{\mu_4 = z + \sqrt{\rho_4^2 - a^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$|z_{12} - z_{31}|^2 = |2ia|^2 = 4a^2$$

$$\boxed{\frac{|z_{12} - z_{31}|^2}{4} = a^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boxed{\frac{|z_{12} - z_{31}|}{2} = a}$$

$$z_{31} z_{12} = (z - ia)(z + ia)$$

$$z_{31} z_{12} = z^2 + zia - zia - i^2 a^2$$

$$z_{31} z_{12} = z^2 - i^2 a^2$$

$$\boxed{z_{31} z_{12} = z^2 + a^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Flächenbetrachtung $A_{z_1 z_{31} \mu_4 z_{12}}$ **:**

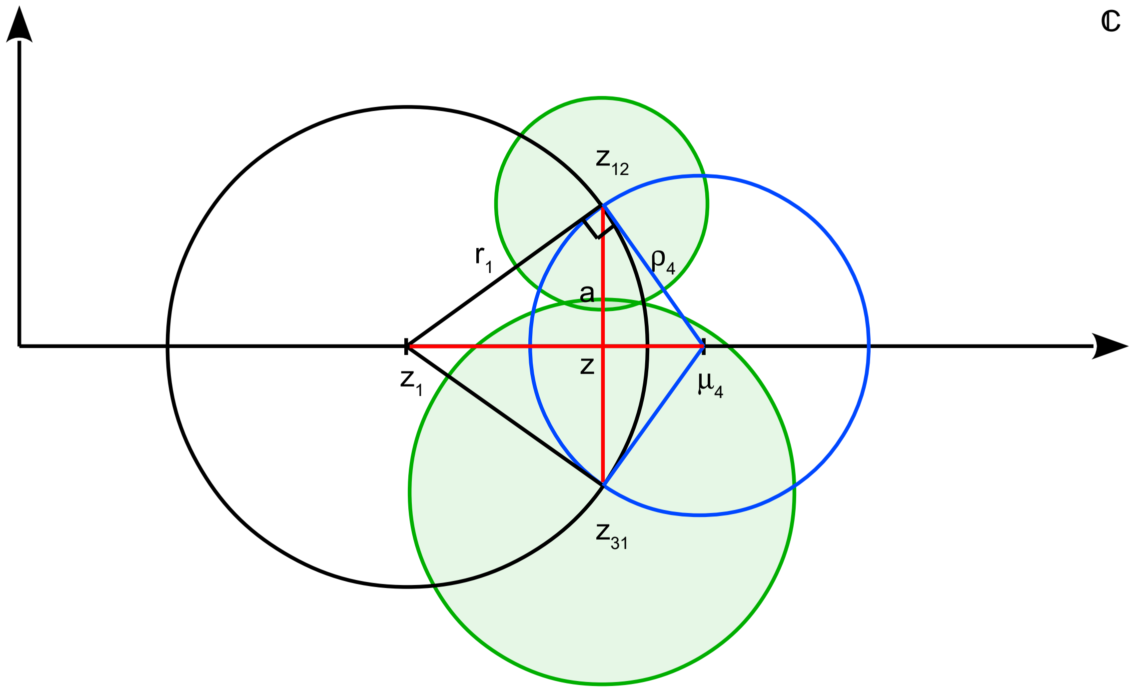
$$2\,\frac{r_1 \rho_4}{2} = \frac{|z_1 - \mu_4||z_{12} - z_{31}|}{2}$$

$$\boxed{r_1 \rho_4 = \frac{|z_1 - \mu_4||z_{12} - z_{31}|}{2}} \qquad \textbf{(4)}$$

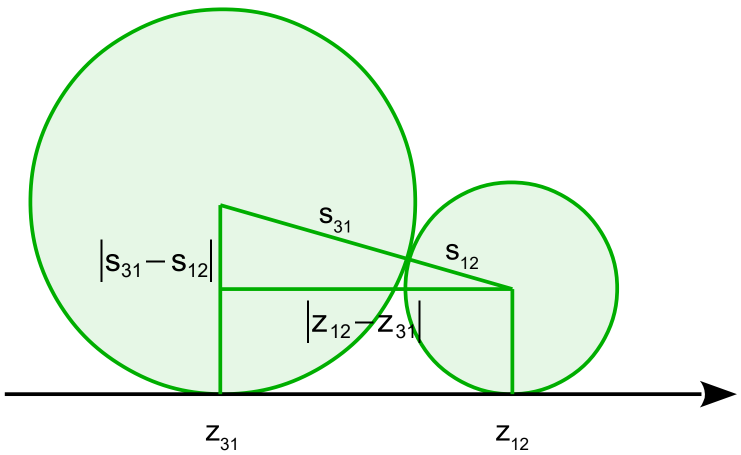
Vorbetrachtung 2 :

In der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ seien der Kreis K_{z_1,r_1} und der Kreis I_{μ_4,ρ_4} mit den Mittelpunkten z_1 , μ_4 und den Radien r_1 , ρ_4 derart gegeben, dass die Mittelpunkte auf der reellen Geraden liegen, und dass sich die Kreise rechtwinklig in den Punkten z_{31} , z_{12} schneiden.

Im Raum $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ seien Sphären $S_{31} := S_{z_{31},s_{31}}$, m $S_{12} := S_{z_{12},s_{12}}$ it den Radien s_{31} , s_{12} gegeben, derart dass sie sich gegenseitig berühren, und dass sie die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in den Punkten z_{31} , z_{12} berühren .



Betrachtung von „rechts“ :



$$|z_{12}-z_{31}|^2 = (s_{31}+s_{12})^2 - (s_{31}-s_{12})^2$$
$$|z_{12}-z_{31}|^2 = s_{31}^2 + 2s_{31}s_{12} + s_{12}^2 - s_{31}^2 + 2s_{31}s_{12} - s_{12}^2$$

$$\boxed{|z_{12}-z_{31}|^2 = 4s_{31}s_{12}} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{s_{31}s_{12}} = \frac{4}{|z_{12}-z_{31}|^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Hätte man nun 3 sich berührende derartige Sphären $S_{z_{12},s_{12}}$, $S_{z_{23},s_{23}}$, $S_{z_{31},s_{31}}$ ergäben sich folgende Gleichungen :

I $\quad \left|z_{12}-z_{31}\right|^2 = 4\,s_{12}\,s_{31}$

II $\quad \left|z_{23}-z_{12}\right|^2 = 4\,s_{23}\,s_{12}$

III $\quad \left|z_{31}-z_{23}\right|^2 = 4\,s_{31}\,s_{23}$

II und III nach $4\,s_{23}$ umformen und gleichsetzen :

$$\frac{\left|z_{23}-z_{12}\right|^2}{s_{12}} = 4\,s_{23} \quad , \quad \frac{\left|z_{31}-z_{23}\right|^2}{s_{31}} = 4\,s_{23}$$

$$\frac{\left|z_{23}-z_{12}\right|^2}{s_{12}} = \frac{\left|z_{31}-z_{23}\right|^2}{s_{31}}$$

$$s_{31} = \frac{\left|z_{31}-z_{23}\right|^2}{\left|z_{23}-z_{12}\right|^2}\,s_{12}$$

s_{31} **in I :**

$$\left|z_{12}-z_{31}\right|^2 = 4\,s_{12}\,s_{31}$$

$$\left|z_{12}-z_{31}\right|^2 = 4\,s_{12}\,\frac{\left|z_{31}-z_{23}\right|^2}{\left|z_{23}-z_{12}\right|^2}\,s_{12}$$

$$\frac{\left|z_{12}-z_{31}\right|^2\,\left|z_{23}-z_{12}\right|^2}{\left|z_{31}-z_{23}\right|^2} = 4\,s_{12}{}^2$$

$$\frac{\left|z_{12}-z_{31}\right|\,\left|z_{23}-z_{12}\right|}{\left|z_{31}-z_{23}\right|} = 2\,s_{12}$$

$$\frac{\left|z_{12}-z_{31}\right|\,\left|z_{23}-z_{12}\right|}{2\left|z_{31}-z_{23}\right|} = s_{12}$$

$$s_{12} = \frac{\left|z_{12}-z_{31}\right|\,\left|z_{23}-z_{12}\right|}{2\left|z_{31}-z_{23}\right|} \quad , \quad \frac{1}{s_{12}} = \frac{2\left|z_{31}-z_{23}\right|}{\left|z_{12}-z_{31}\right|\,\left|z_{23}-z_{12}\right|}$$

Zyklische Betrachtung der Gleichungen I, II, III :

$$\boxed{s_{12} = \frac{|z_{12}-z_{31}|\;|z_{23}-z_{12}|}{2|z_{31}-z_{23}|}} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{s_{12}} = \frac{2|z_{31}-z_{23}|}{|z_{12}-z_{31}|\;|z_{23}-z_{12}|}} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\boxed{s_{23} = \frac{|z_{23}-z_{12}|\;|z_{31}-z_{23}|}{2|z_{12}-z_{31}|}} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{s_{23}} = \frac{2|z_{12}-z_{31}|}{|z_{23}-z_{12}|\;|z_{31}-z_{23}|}} \qquad \textbf{(7)}$$

$$\boxed{s_{31} = \frac{|z_{31}-z_{23}|\;|z_{12}-z_{31}|}{2|z_{23}-z_{12}|}} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{s_{31}} = \frac{2|z_{23}-z_{12}|}{|z_{31}-z_{23}|\;|z_{12}-z_{31}|}} \qquad \textbf{(8)}$$

Die Radien der sich gegenseitig berührenden Sphären sind also eindeutig durch die Berührpunkte z_{ij} , $i \neq j$, $i,j \in \{1;2;3\}$ der Sphären mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ bestimmt.
Die Mittelpunkte der Sphären in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ sind dann $(z_{ij}|s_{ij})$, $i \neq j$, $i,j \in \{1;2;3\}$.

Hieraus ergeben sich nun

$$\frac{1}{s_{12}\,s_{23}} = \frac{2|z_{31}-z_{23}|}{|z_{12}-z_{31}|\;|z_{23}-z_{12}|}\;\frac{2|z_{12}-z_{31}|}{|z_{23}-z_{12}|\;|z_{31}-z_{23}|}$$

$$\boxed{\frac{1}{s_{12}\,s_{23}} = \frac{4}{|z_{12}-w_{23}|^2}} \quad , \qquad \textbf{(9)}$$

und analog

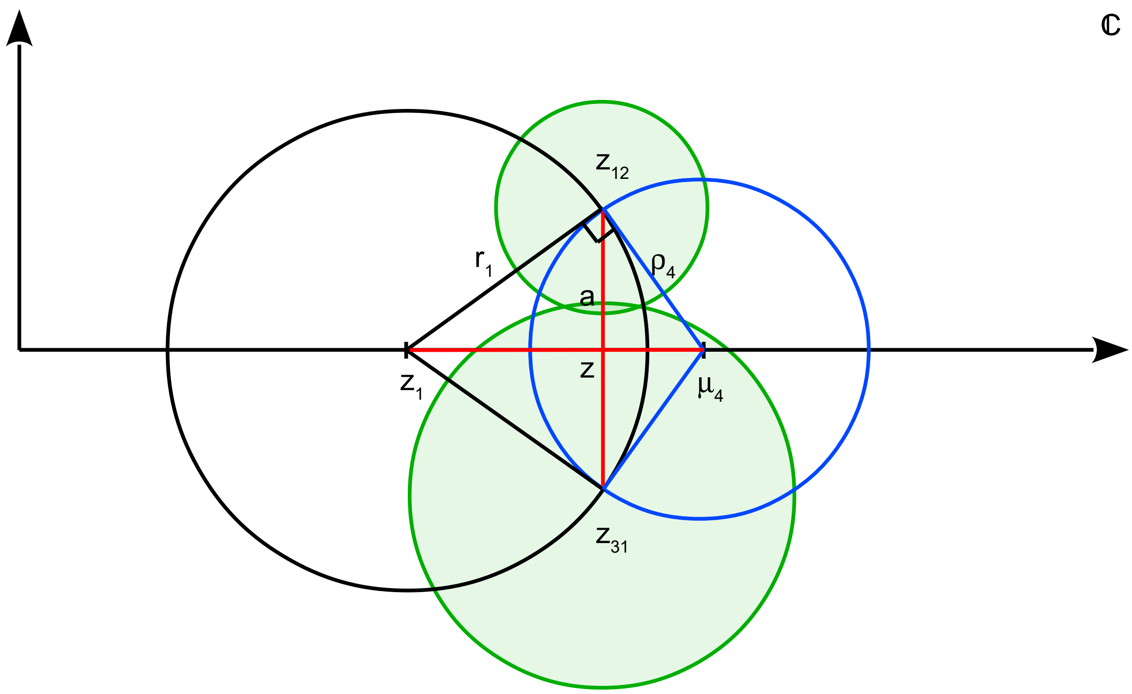
$$\boxed{\frac{1}{s_{23}\,s_{31}} = \frac{4}{|z_{23}-z_{31}|^2}} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\boxed{\frac{1}{s_{31}\,s_{12}} = \frac{4}{|z_{31}-z_{12}|^2}} \qquad \textbf{(11)}$$

Lemma 1 :

In der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ seien der Kreis K_{z_1, r_1} und der Kreis I_{μ_4, ρ_4} mit den Mittelpunkten z_1 , μ_4 und den Radien r_1 , ρ_4 derart gegeben, dass die Mittelpunkte auf der reellen Geraden liegen, und dass sich die Kreise rechtwinklig in den Punkten z_{31} , z_{12} schneiden.

Im Raum $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ seien Sphären $S_{31} := S_{z_{31}, s_{31}}$, $S_{12} := S_{z_{12}, s_{12}}$ mit den Radien s_{31} , s_{12} gegeben, derart dass sie sich gegenseitig berühren, und dass sie die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in den Punkten z_{31} , z_{12} berühren .



Dann gilt :

(a) $$\boxed{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{31}\, s_{12}} = \frac{4}{\left|z_{12} - z_{31}\right|^2}}$$

(b) $$\boxed{\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_{31}\, z_{12}}{s_{31}\, s_{12}} = \frac{4\, z_{31}\, z_{12}}{\left|z_{12} - z_{31}\right|^2}}$$

Beweis zu (a) :

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{r_1^2 + \rho_4^2}{r_1^2\rho_4^2}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{\left|z_1-\mu_4\right|^2}{\left(r_1\rho_4\right)^2} \qquad \text{Mit Gleichung } \mathbf{(4)}: \quad r_1\rho_4 = \frac{\left|z_1-\mu_4\right|\left|z_{12}-z_{31}\right|}{2}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{\left|z_1-\mu_4\right|^2}{\left(\frac{\left|z_1-\mu_4\right|\left|z_{12}-z_{31}\right|}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{\left|z_1-\mu_4\right|^2}{\frac{\left|z_1-\mu_4\right|^2\left|z_{12}-z_{31}\right|^2}{4}}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{4\left|z_1-\mu_4\right|^2}{\left|z_1-\mu_4\right|^2\left|z_{12}-z_{31}\right|^2}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{4}{\left|z_{12}-z_{31}\right|^2} \qquad \text{Mit Gleichung } \mathbf{(5)}: \quad \frac{1}{s_{31}s_{12}} = \frac{4}{\left|z_{12}-z_{31}\right|^2}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{4}{\left|z_{12}-z_{31}\right|^2} = \frac{1}{s_{31}s_{12}} \qquad \text{Also ist } \mathbf{(a)} \text{ gezeigt .}$$

Beweis zu (b) :

Nach Gleichung **(1)** ist

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} = \frac{\left(z-\sqrt{r_1^2-a^2}\right)^2}{r_1^2} \qquad\qquad \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{\left(z+\sqrt{\rho_4^2-a^2}\right)^2}{\rho_4^2}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} = \frac{\left(z^2 - 2z\sqrt{r_1^2-a^2} + r_1^2-a^2\right)}{r_1^2} \qquad\qquad \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{\left(z^2 + 2z\sqrt{\rho_4^2-a^2} + \rho_4^2-a^2\right)}{\rho_4^2}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} = \frac{z^2}{r_1^2} - \frac{2z\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + 1 - \frac{a^2}{r_1^2} \qquad\qquad \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z^2}{\rho_4^2} + \frac{2z\sqrt{r_4^2-a^2}}{\rho_4^2} + 1 - \frac{a^2}{\rho_4^2}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z^2}{r_1^2} - \frac{2z\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + 1 - \frac{a^2}{r_1^2} + \frac{z^2}{\rho_4^2} + \frac{2z\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2} + 1 - \frac{a^2}{\rho_4^2}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{\rho_4^2}\right)z^2 + 2z\left(- \frac{\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + \frac{\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2}\right) + 2 - \left(\frac{a^2}{\rho_4^2} + \frac{a^2}{r_1^2}\right)$$

Wegen **Lemma 1 (a)** , **(1)** , **(2)**

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{4}{|z_{12}-z_{31}|^2} = \frac{1}{a^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{a^2}{r_1^2} + \frac{a^2}{\rho_4^2} = 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \frac{a^2}{r_1^2} &= 1 - \frac{a^2}{\rho_4^2} \\ \frac{a^2}{\rho_4^2} &= 1 - \frac{a^2}{r_1^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
- \frac{\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + \frac{\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2} &= - \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{r_1^2}}}{r_1} + \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho_4^2}}}{\rho_4} \\
- \frac{\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + \frac{\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2} &= - \frac{\sqrt{\frac{a^2}{\rho_4^2}}}{r_1} + \frac{\sqrt{\frac{a^2}{r_1^2}}}{\rho_4} \\
- \frac{\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + \frac{\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2} &= - \frac{a}{r_1\rho_4} + \frac{a}{\rho_1 r_4} \\
- \frac{\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + \frac{\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2} &= 0
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} &= \left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{\rho_4^2}\right)z^2 + 2z\left(- \frac{\sqrt{r_1^2-a^2}}{r_1^2} + \frac{\sqrt{\rho_4^2-a^2}}{\rho_4^2}\right) + 2 - \left(\frac{a^2}{\rho_4^2} + \frac{a^2}{r_1^2}\right) \\
\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} &= \left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{\rho_4^2}\right)z^2 + 2z\cdot 0 + 2 - 1 \\
\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} &= \left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{\rho_4^2}\right)z^2 + 1
\end{aligned}$$

Wieder wegen **(a)**

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{4}{|z_{12}-z_{31}|^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{s_{31}s_{12}} \quad\Rightarrow\quad 1 = \frac{a^2}{s_{31}s_{12}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{31}s_{12}}$$

folgt weiter

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{31}s_{12}} z^2 + \frac{a^2}{s_{31}s_{12}}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{31}s_{12}}\left(z^2 + a^2\right)$$

Gleichung **(3)** $z_{31}z_{12} = z^2+a^2$

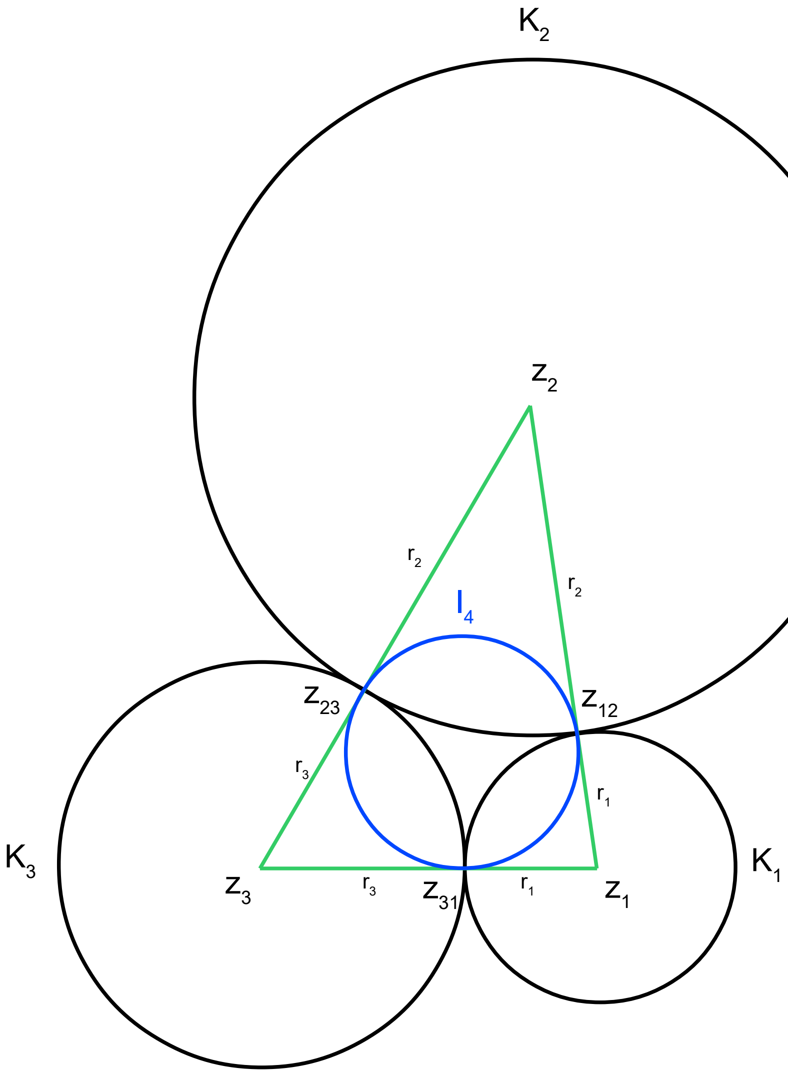
$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_{31}z_{12}}{s_{31}s_{12}}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_{31}z_{12}}{s_{31}s_{12}} = \frac{4\,z_{31}z_{12}}{\left|z_{12}-z_{31}\right|^2}$$

Also ist **(b)** gezeigt .

Vorbetrachtung 3

Gegeben sein drei sich gegenseitig berührende Kreise $K_i := K_{z_i r_i}$, $i \in \{1;2;3\}$.
Dann geht der Inkreis $I_4 := I_{\mu_4 \rho_4}$ des Dreiecks $\Delta z_1 z_2 z_3$ durch die drei Berührpunkte z_{12} , z_{23} , z_{31} und schneidet damit die drei Kreise rechtwinklig.



Der Inkreis I_4 definiert auf dem Dreieck $\Delta z_1 z_2 z_3$ die Tangentenabschnitte t_1 , t_2 , t_3 mit

$$t_2 = |z_1 z_2| - t_1$$

$$t_3 = |z_2 z_3| - t_2$$

$$t_1 = |z_3 z_1| - t_3 \; .$$

Also folgt

$$t_1 = |z_3 z_1| - t_3$$

$$t_1 = |z_3 z_1| - \left(|z_2 z_3| - t_2\right)$$

$$t_1 = |z_3 z_1| - \left(|z_2 z_3| - \left(|z_1 z_2| - t_1\right)\right)$$

$$t_1 = |z_3 z_1| - |z_2 z_3| + |z_1 z_2| - t_1$$

$$2t_1 = |z_3 z_1| - |z_2 z_3| + |z_1 z_2|$$

$$t_1 = \frac{|z_3 z_1| - |z_2 z_3| + |z_1 z_2|}{2}$$

$$t_1 = \frac{|z_3 z_1| + |z_1 z_2| + |z_2 z_3| - 2|z_2 z_3|}{2}$$

$$t_1 = \frac{|z_3 z_1| + |z_1 z_2| + |z_2 z_3|}{2} - |z_2 z_3|$$

$$\underline{t_1 = \frac{U}{2} - |z_2 z_3|}$$, wobei U der Umfang des Dreiecks ist.

Durch zyklische Vertauschung erhält man die anderen Tangentenabschnitte

$$\underline{t_2 = \frac{U}{2} - |z_3 z_1|}$$

$$\underline{t_3 = \frac{U}{2} - |z_1 z_2|}$$

Man zeigt nun, dass die Tangentenabschnitte t_1 , t_2 , t_3 jeweils identisch mit den Radien r_1 , r_2 , r_3 der drei Kreise sind :

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = U$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{U}{2}$$

$$r_1 = \frac{U}{2} - \left(r_2 + r_3\right) = \frac{U}{2} - |z_2 z_3|$$

$$r_2 = \frac{U}{2} - \left(r_3 + r_1\right) = \frac{U}{2} - |z_3 z_1|$$

$$r_3 = \frac{U}{2} - \left(r_1 + r_2\right) = \frac{U}{2} - |z_1 z_2|$$

Also geht der Inkreis $I_4 := I_{\mu_4 \rho_4}$ des Dreiecks $\Delta z_1 z_2 z_3$ durch die drei Berührpunkte Berührpunkte z_{12} , z_{23} , z_{31} und schneidet damit die drei Kreise rechtwinklig.

Nach der **Heronschen Formel** gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $\Delta z_1 z_2 z_3$:

$$A = \sqrt{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - |z_1 z_2|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_2 z_3|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_3 z_1|\right)}$$

$$A^2 = \frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - |z_1 z_2|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_2 z_3|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_3 z_1|\right)$$

Ist der Radius der Inkreises I_4 gleich ρ_4 , so gilt außerdem

$$A = \frac{U}{2}\,\rho_4$$

$$\rho_4 = \frac{A}{\frac{U}{2}}$$

$$\rho_4^{\,2} = \frac{A^2}{\left(\frac{U}{2}\right)^2}$$

$$\rho_4^{\,2} = \frac{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - |z_1 z_2|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_2 z_3|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_3 z_1|\right)}{\left(\frac{U}{2}\right)^2}$$

$$\rho_4^{\,2} = \frac{\left(\frac{U}{2} - |z_1 z_2|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_2 z_3|\right)\left(\frac{U}{2} - |z_3 z_1|\right)}{\frac{U}{2}}$$

Wegen

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{U}{2}$$

$$r_1 = \frac{U}{2} - |z_2 z_3|$$

$$r_2 = \frac{U}{2} - |z_3 z_1|$$

$$r_3 = \frac{U}{2} - |z_1 z_2|$$

folgt

$$\rho_4^{\,2} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

$$\frac{1}{\rho_4^{\,2}} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3}$$

$$\frac{1}{\rho_4^{\,2}} = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$$

$$\underline{\frac{1}{\rho_4} = \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}}}$$

Lemma 2

In der komplexen Ebene seien drei sich gegenseitig berührende Kreise $K_i := K_{z_i r_i}$, $i \in \{1;2;3\}$ mit den Berührpunkten z_{12} , z_{23} , z_{31} gegeben.
Dann geht der Inkreis $I_4 := I_{\mu_4 \rho_4}$ des Dreiecks $\Delta z_1 z_2 z_3$ durch die drei Berührpunkte und schneidet damit die drei Kreise rechtwinklig (nach **Vorbetrachtung 3**) .

Außerdem seien im Raum $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmten Sphären $S_{ij} := S_{z_{ij} s_{ij}}$ mit den Radien s_{ij} , $i \neq j$, $i, j \in \{1;2;3\}$ gegeben, derart dass sie sich gegenseitig berühren, und dass sie die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in den Punkten z_{ij} berühren .

Dann gilt :

(a) $$\boxed{\frac{1}{s_{ij}} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}} \quad , \quad i \neq j \ , \ i, j \in \{1;2;3\}$$

(b) $$\boxed{\frac{\mu_4^{\ 2}}{\rho_4^{\ 2}} = \frac{z_1}{r_1}\frac{z_2}{r_2} + \frac{z_2}{r_2}\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_3}{r_3}\frac{z_1}{r_1}}$$

Beweis zu (a) :

Nach der **Vorbetrachtung 3** ist

$$\frac{1}{\rho_4^{\ 2}} = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} \quad .$$

Nach **Lemma 1 (a)** gelten dann die drei Gleichungen

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{31} s_{12}} \qquad \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{12} s_{23}} \qquad \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{s_{23} s_{31}}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} = \frac{1}{s_{31} s_{12}} \qquad \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} = \frac{1}{s_{12} s_{23}} \qquad \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} = \frac{1}{s_{23} s_{31}}$$

$$\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{s_{31} s_{12}} \qquad \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = \frac{1}{s_{12} s_{23}} \qquad \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{s_{23} s_{31}}$$

Wenn man zum Beispiel nach $\frac{1}{s_{12}}$ umformen wollte würde man die 1. und 2. Gleichung nach $\frac{1}{s_{31}}$ bzw. nach $\frac{1}{s_{23}}$ umformen und die Terme in die 3. Gleichung einsetzen :

1. $$\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{s_{31}s_{12}} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)s_{12}=\frac{1}{s_{31}}$$

2. $$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)=\frac{1}{s_{12}s_{23}} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)s_{12}=\frac{1}{s_{23}}$$

3. $$\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}\right)=\frac{1}{s_{23}s_{31}}$$

$$\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)s_{12}\ \left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)s_{12}$$

$$1=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)s_{12}\ \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)s_{12}$$

$$1=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2 s_{12}^{\ 2}$$

$$\frac{1}{s_{12}^{\ 2}}=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2$$

$$\underline{\frac{1}{s_{12}}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}$$

In analoger Weise würde man erhalten

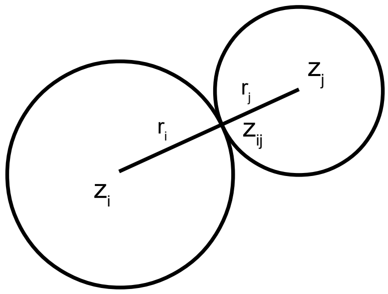
$$\underline{\frac{1}{s_{23}}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}}$$

$$\underline{\frac{1}{s_{31}}=\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}}$$

Damit ist **(a)** gezeigt .

Beweis zu (b) :

Den Berührpunkt $z_{ij} = K_{z_i r_i} \cap K_{z_j r_j}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1;2;3\}$ bekommt man wie folgt:



$$z_{ij} = z_i + r_i \frac{z_j - z_i}{r_i + r_j}$$

$$z_{ij} = \frac{(r_i + r_j) z_i + r_i (z_j - z_i)}{r_i + r_j}$$

$$z_{ij} = \frac{r_i z_i + r_j z_i + r_i z_j - r_i z_i}{r_i + r_j}$$

$$z_{ij} = \frac{r_j z_i + r_i z_j}{r_i + r_j}$$

$$z_{ij} = \frac{\dfrac{r_j z_i + r_i z_j}{r_i r_j}}{\dfrac{r_i + r_j}{r_i r_j}}$$

$$z_{ij} = \frac{\dfrac{r_j z_i + r_i z_j}{r_i r_j}}{\dfrac{r_i + r_j}{r_i r_j}}$$

$$z_{ij} = \frac{\dfrac{r_j z_i}{r_i r_j} + \dfrac{r_i z_j}{r_i r_j}}{\dfrac{r_i}{r_i r_j} + \dfrac{r_j}{r_i r_j}}$$

$$z_{ij} = \frac{\dfrac{z_i}{r_i} + \dfrac{z_j}{r_j}}{\dfrac{1}{r_i} + \dfrac{1}{r_j}} \quad .$$

Also ist

$$z_{12} = \frac{\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \tag{12}$$

$$z_{23} = \frac{\frac{z_2}{r_2} + \frac{z_3}{r_3}}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} \tag{13}$$

$$z_{31} = \frac{\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_1}{r_1}}{\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1}} \tag{14}$$

Nach **Lemma 2 (a)** $\frac{1}{s_{ij}} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1;2;3\}$ folgt :

$$z_{12} = \frac{\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2}}{\frac{1}{s_{12}}} \quad , \quad z_{23} = \frac{\frac{z_2}{r_2} + \frac{z_3}{r_3}}{\frac{1}{s_{23}}} \quad , \quad z_{31} = \frac{\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_1}{r_1}}{\frac{1}{s_{31}}}$$

$$\underline{\frac{z_{12}}{s_{12}} = \frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2}} \tag{15}$$

$$\underline{\frac{z_{23}}{s_{23}} = \frac{z_2}{r_2} + \frac{z_3}{r_3}} \tag{16}$$

$$\underline{\frac{z_{31}}{s_{31}} = \frac{z_3}{r_3} + \frac{z_1}{r_1}} \tag{17}$$

Aus **Lemma 1 (b)** folgt zusammen mit den drei Gleichungen :

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_{31} z_{12}}{s_{31} s_{12}}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_{31}}{s_{31}} \frac{z_{12}}{s_{12}}$$

$$\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \left(\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_1}{r_1}\right)\left(\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2}\right)$$

$$\frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \left(\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_1}{r_1}\right)\left(\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2}\right) - \frac{z_1^2}{r_1^2}$$

$$\frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} - \frac{z_1^2}{r_1^2}$$

$$\frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_1 z_2}{r_1 r_2}$$

$$\frac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1}$$

Damit ist **(b)** gezeigt .

Der komplexe Vier-Kreise-Satz von Descartes :

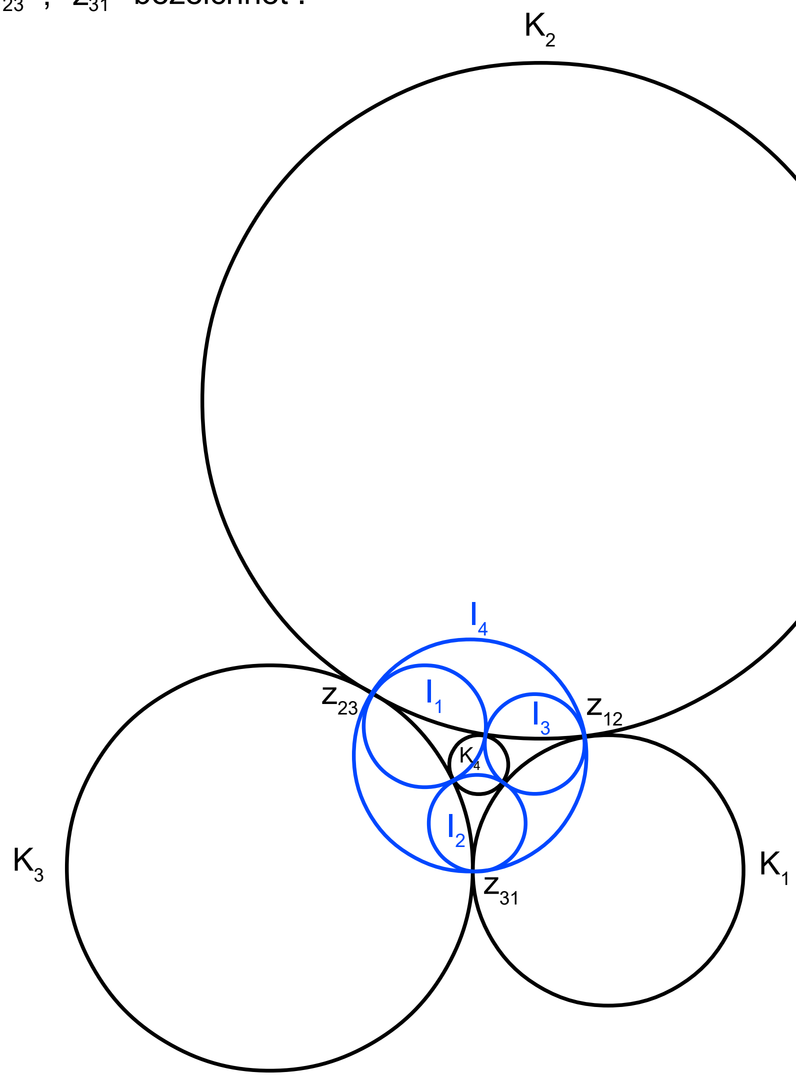
Sind in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ vier sich paarweise berührende Kreise $K_i := K_{z_i r_i}$, $i \in \{1;2;3;4\}$ gegen, so gilt

$$2\left(\frac{z_1^2}{r_1^2} + \frac{z_2^2}{r_2^2} + \frac{z_3^2}{r_3^2} + \frac{z_4^2}{r_4^2}\right) = \left(\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} + \frac{z_3}{r_3} + \frac{z_4}{r_4}\right)^2 \quad .$$

Beweis :

Im Bild sind die Kreise K_1 , K_2 , K_3 , K_4 dargestellt. Die sechs Berührpunkte der Kreise seien $z_{ij} = K_i \cap K_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1;2;3;4\}$.

Man betrachtet nun die sich paarweise berührenden Kreise $I_i := I_{\mu_i \rho_i}$, $i \in \{1;2;3;4\}$, welche durch jeweils drei der Berührpunkte gehen und die jeweiligen Kreise senkrecht schneiden.
Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist nur der Kreis I_4 durch die Berührpunkte z_{12} , z_{23} , z_{31} bezeichnet .



Außerdem betrachtet man die sechs Sphären $S_{ij} := S_{z_{ij} s_{ij}} \quad i \neq j \ , \ i,j \in \{1;2;3;4\}$, welche sich paarweise und die komplexe Ebene in den Punkten z_{ij} berühren, und für die nach Lemma 2 (a) gilt : $\frac{1}{s_{ij}} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}$.

Die Sphären sind nicht eingezeichnet, aber sie stehen zu den Kreisen $K_1 - K_4$ und den Kreisen $l_1 - l_4$ in gleicher Beziehung (**Lemma 2 (a)**) , das heißt :

$$\frac{1}{s_{12}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \qquad = \qquad \frac{1}{s_{34}} = \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4}$$

$$\frac{1}{s_{13}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \qquad = \qquad \frac{1}{s_{24}} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_4}$$

$$\frac{1}{s_{14}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} \qquad = \qquad \frac{1}{s_{23}} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}$$

$$\frac{1}{s_{23}} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \qquad = \qquad \frac{1}{s_{14}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_4}$$

$$\frac{1}{s_{24}} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \qquad = \qquad \frac{1}{s_{13}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_3}$$

$$\frac{1}{s_{34}} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \qquad = \qquad \frac{1}{s_{12}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

Daraus folgt dann die Gleichungen

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} \tag{18}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_4} \tag{19}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} \tag{20}$$

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_4} \tag{21}$$

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_3} \tag{22}$$

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \tag{23}$$

Aus **(12)** folgt

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) z_{12}$$

Mit **(18)** folgt

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) z_{12}$$

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} = \left(\frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4}\right) z_{34}$$

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} = \frac{\mu_3}{\rho_3} + \frac{\mu_4}{\rho_4} \qquad \textbf{(24)}$$

Entsprechend folgen die Gleichungen

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_3}{r_3} = \frac{\mu_2}{\rho_4} + \frac{\mu_4}{\rho_4} \qquad \textbf{(25)}$$

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_4}{r_4} = \frac{\mu_2}{\rho_2} + \frac{\mu_3}{\rho_3} \qquad \textbf{(26)}$$

$$\frac{z_2}{r_2} + \frac{z_3}{r_3} = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_4}{\rho_4} \qquad \textbf{(27)}$$

$$\frac{z_2}{r_2} + \frac{z_4}{r_4} = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_3}{\rho_3} \qquad \textbf{(28)}$$

$$\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_4}{r_4} = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \qquad \textbf{(29)}$$

Zum Schluss betrachtet man folgenden Ausdruck :

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\frac{z_1}{r_1} + 2\frac{z_2}{r_2} + 2\frac{z_3}{r_3} - 2\frac{z_4}{r_4}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 3\frac{z_1}{r_1} + 3\frac{z_2}{r_2} + 3\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_4}{r_4} - 3\frac{z_4}{r_4} - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2} - \frac{z_3}{r_3}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 3\frac{z_1}{r_1} + 3\frac{z_2}{r_2} + 3\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_4}{r_4} - \left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_4}{r_4}\right)-\left(\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_4}{r_4}\right)-\left(\frac{z_3}{r_3}+\frac{z_4}{r_4}\right)$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\frac{z_1}{r_1} + 2\frac{z_2}{r_2} + 3\frac{z_3}{r_3} + \frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} + \frac{z_4}{r_4} - \left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_4}{r_4}\right)-\left(\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_4}{r_4}\right)-\left(\frac{z_3}{r_3}+\frac{z_4}{r_4}\right)$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}\right) + \left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_3}{r_3}\right) + \left(\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}\right) + \left(\frac{z_3}{r_3}+\frac{z_4}{r_4}\right) - \left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_4}{r_4}\right)-\left(\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_4}{r_4}\right)-\left(\frac{z_3}{r_3}+\frac{z_4}{r_4}\right)$$

Nach **(15) – (17)** :

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{z_{12}}{s_{12}}\right) + \frac{z_{13}}{s_{13}} + \frac{z_{23}}{s_{23}} + \frac{z_{34}}{s_{34}} - \frac{z_{14}}{s_{14}} - \frac{z_{24}}{s_{24}} - \frac{z_{34}}{s_{34}}$$

Transformation nach **(24) – (29)** :

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{z_{34}}{s_{34}}\right) + \frac{z_{24}}{s_{24}} + \frac{z_{14}}{s_{14}} + \frac{z_{12}}{s_{12}} - \frac{z_{23}}{s_{23}} - \frac{z_{13}}{s_{13}} - \frac{z_{12}}{s_{12}}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{\mu_3}{\rho_3}+\frac{\mu_4}{\rho_4}\right) + \frac{\mu_2}{\rho_2}+\frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_2}{\rho_2} - \left(\frac{\mu_2}{\rho_2}+\frac{\mu_3}{\rho_3}\right) - \left(\frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_3}{\rho_3}\right) - \left(\frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_2}{\rho_2}\right)$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{\mu_3}{\rho_3}+\frac{\mu_4}{\rho_4}\right) + \frac{\mu_2}{\rho_2}+\frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\mu_2}{\rho_2}-\frac{\mu_3}{\rho_3} - \frac{\mu_1}{\rho_1}-\frac{\mu_3}{\rho_3} - \frac{\mu_1}{\rho_1}-\frac{\mu_2}{\rho_2}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{\mu_3}{\rho_3}+\frac{\mu_4}{\rho_4}\right) + \frac{\mu_2}{\rho_2}+\frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\mu_2}{\rho_2}-\frac{\mu_3}{\rho_3} - \frac{\mu_3}{\rho_3} - \frac{\mu_2}{\rho_2}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{\mu_3}{\rho_3}+\frac{\mu_4}{\rho_4}\right) + \frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_4}{\rho_4} - \frac{\mu_3}{\rho_3} - \frac{\mu_3}{\rho_3}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 2\left(\frac{\mu_4}{\rho_4}\right) + \frac{\mu_4}{\rho_4} + \frac{\mu_4}{\rho_4}$$

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = 4\frac{\mu_4}{\rho_4}$$

Nach **Lemma 2 (b)** ist $\dfrac{\mu_4^2}{\rho_4^2} = \dfrac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \dfrac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \dfrac{z_3 z_1}{r_3 r_1}$, also

$$2\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right) = \pm\ 4\sqrt{\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1}}$$

$$\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4} = \pm\ 2\sqrt{\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1}}$$

$$\left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}-\frac{z_4}{r_4}\right)^2 = 4\left(\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2+\left(\frac{z_3}{r_3}\right)^2+\left(\frac{z_4}{r_4}\right)^2 &+ 2\,\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + 2\,\frac{z_1 z_3}{r_1 r_3} - 2\,\frac{z_1 z_4}{r_1 r_4} \quad = \quad 4\left(\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1}\right) \\
&+ 2\,\frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} - 2\frac{z_2 z_4}{r_2 r_4} \\
&- 2\,\frac{z_3 z_4}{r_3 r_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2+\left(\frac{z_3}{r_3}\right)^2+\left(\frac{z_4}{r_4}\right)^2 &\qquad\qquad - 2\,\frac{z_1 z_4}{r_1 r_4} \quad = \quad 2\left(\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_3 z_1}{r_3 r_1}\right) \\
&\qquad - 2\frac{z_2 z_4}{r_2 r_4} \\
&- 2\,\frac{z_3 z_4}{r_3 r_4}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2+\left(\frac{z_3}{r_3}\right)^2+\left(\frac{z_4}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} + \frac{z_1 z_3}{r_1 r_3} + \frac{z_1 z_4}{r_1 r_4} + \frac{z_2 z_3}{r_2 r_3} + \frac{z_2 z_4}{r_2 r_4} + \frac{z_3 z_4}{r_3 r_4}\right)
$$

$$
2\left(\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2+\left(\frac{z_3}{r_3}\right)^2+\left(\frac{z_4}{r_4}\right)^2\right) = \left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2+\left(\frac{z_3}{r_3}\right)^2+\left(\frac{z_4}{r_4}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2}+\frac{z_1 z_3}{r_1 r_3}+\frac{z_1 z_4}{r_1 r_4}+\frac{z_2 z_3}{r_2 r_3}+\frac{z_2 z_4}{r_2 r_4}+\frac{z_3 z_4}{r_3 r_4}\right)
$$

$$
2\left(\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{z_2}{r_2}\right)^2+\left(\frac{z_3}{r_3}\right)^2+\left(\frac{z_4}{r_4}\right)^2\right) = \left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}+\frac{z_4}{r_4}\right)^2
$$

$$
2\left(\frac{z_1^2}{r_1^2}+\frac{z_2^2}{r_2^2}+\frac{z_3^2}{r_3^2}+\frac{z_4^2}{r_4^2}\right) = \left(\frac{z_1}{r_1}+\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_3}{r_3}+\frac{z_4}{r_4}\right)^2
$$

Damit ist der komplexe Vier-Kreise-Satz bewiesen .