# Die Eulersche Zahl e

**(Leonhard Euler , 1707 – 1783, Schweizer Mathematiker)**

Man betrachtet die unterjährige Zinseszinsung des Kapitals $K_0 = 1$ zum Zinssatz $p = 100\% = 1$ pro Jahr in $n$ Zinsperioden:

$$K = K_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$
$$K = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Gibt es den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ?

**Behauptung:**

$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung und hat demzufolge das Zentrum

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

**Beweis:**

$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton steigend, was man durch Abschätzung mit Hilfe der **Bernoullischen Ungleichung** $(1+x)^n \geq 1+nx$ , $x \geq -1$ , für zeigen kann:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \geq \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1$$

$f_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend:

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2-1+1}{(n+1)^2-1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

Außerdem sind

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

und

$$f_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} < \frac{4}{n} \quad ,$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n - e_n = 0$ .

Also haben wir eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum e

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] \text{ und } e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Die Zahl e heißt **Eulersche Zahl**, nach **Leonhard Euler** , 1707 – 1783, Schweizer Mathematiker .

Ein Näherungswert ist $e \approx 2{,}718$ .

Leonhard Euler (1707 - 1783), Pastell von Emanuel Handmann, 1756

https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

# Stetige Verzinsung allgemein

Man betrachtet die unterjährige Zinseszinsung eines Kapitals $K_0 = 1$ zum Zinssatz $p$ pro Jahr in $n$ Zinsperioden:

$$K = K_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \quad , \quad p \in \mathbb{Q} \quad , \quad p \geq 0$$

$$K = \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \quad , \quad p \in \mathbb{Q} \quad , \quad p \geq 0$$

Gibt es den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$ ?

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $0 \leq \frac{p}{n} \leq 1$ ist, also $\frac{n}{p} \geq 1$ .

Zu jedem $n$ gibt es dann ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$k_n \leq \frac{n}{p} \leq k_n+1 \quad \text{, also}$$

$$\frac{1}{k_n+1} \leq \frac{p}{n} \leq \frac{1}{k_n} \quad .$$

Dann folgt:

$$1 + \frac{1}{k_n+1} \leq 1 + \frac{p}{n} \leq 1 + \frac{1}{k_n}$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leq \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} \leq \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}\right)^p \leq \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq \left(\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\right)^p$$

Die linke und die rechte Seite streben wegen der Stetigkeit der Funktion $y = x^p$ , $p \in \mathbb{Q}$ jeweils gegen $(e\cdot 1)^p = e^p$ .

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p$ .

## Definition :

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ für $x \geq 0$ , und $f(x) = \frac{1}{e^{-x}}$ für $x < 0$ heißt **Expontentialfunktion zur Basis** $e$ .

# Ableitung der Exponentialfunktion

$$\left(e^x\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$
$$\left(e^x\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$
$$\left(e^x\right)' = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

**Frage :** $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = ?$

Setzt man speziell $h = \frac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$ , so folgt :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
$$1+\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n-1}$$
$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}$$
$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1}$$
$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n-1}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n-1} = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$ .

Setzt man speziell $h = -\frac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$ , so folgt :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} < e^{-1} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$
$$\frac{n-1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n+1}$$
$$1-\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < 1-\frac{1}{n+1}$$
$$-\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < -\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

$$1-\frac{1}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = 1$ .

Also ist $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ und es folgt :

$$\left(e^x\right)' = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

**Die Ableitung der Funktion** $y = e^x$ **ist gleich der Funktion** $y = e^x$ **.**

# Ableitung der Exponentialfunktion (ausführlich)

$$\left(e^x\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$
$$\left(e^x\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$
$$\left(e^x\right)' = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

**Frage :** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = \ ?$

Setzt man speziell $h = \dfrac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$ , so folgt :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
$$1+\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n-1}$$
$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}$$
$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1}$$
$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n-1}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{n-1} = 1$ folgt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1}$ .

Setzt man speziell $h = -\frac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$ , so folgt :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} < e^{-1} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$
$$\frac{n-1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n+1}$$
$$1-\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < 1-\frac{1}{n+1}$$
$$-\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < -\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

$$1-\frac{1}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1$ folgt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = 1}$ .

Sei nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $h_n > 0$ , eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ .

Dann gilt:

$|h_n| \le 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ , und

$$k_n \le \frac{1}{h_n} \le k_n+1 ,$$

also

$$\frac{1}{k_n+1} \le |h_n| \le \frac{1}{k_n} , \quad k_n \in \mathbb{N} ,$$

also

$$-\frac{1}{k_n} \leq h_n \leq -\frac{1}{k_n+1} < 0 \qquad \text{oder} \qquad 0 < \frac{1}{k_n+1} \leq h_n \leq \frac{1}{k_n} \quad , \quad k_n \in \mathbb{N} \quad .$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$ .

Dann folgt :

$$-\frac{1}{k_n} \leq h_n \leq -\frac{1}{k_n+1} \qquad \text{oder} \qquad e^{\frac{1}{k_n+1}} \leq e^{h_n} \leq e^{\frac{1}{k_n}}$$

$$e^{-\frac{1}{k_n}} - 1 \leq e^{h_n} - 1 \leq e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1 \qquad \text{oder} \qquad e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1 \leq e^{h_n} - 1 \leq e^{\frac{1}{k_n}} - 1$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{k_n}} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1}{h_n} \qquad \text{oder} \qquad \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{k_n}} - 1}{h_n}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{k_n}} - 1}{-\frac{1}{k_n+1}} \geq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1}{-\frac{1}{k_n}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1}{\frac{1}{k_n+1}} \leq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{k_n}} - 1}{\frac{1}{k_n}}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{k_n}} - 1}{-\frac{1}{k_n}} \cdot \frac{k_n+1}{k_n} \geq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1}{-\frac{1}{k_n+1}} \cdot \frac{k_n}{k_{n+1}} \quad \text{oder} \quad \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1}{\frac{1}{k_{n+1}}} \leq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{k_n}} - 1}{\frac{1}{k_n}}$$

Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} = 1 \cdot 1 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} = 1 \quad .$$

Also ist $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ und es folgt :

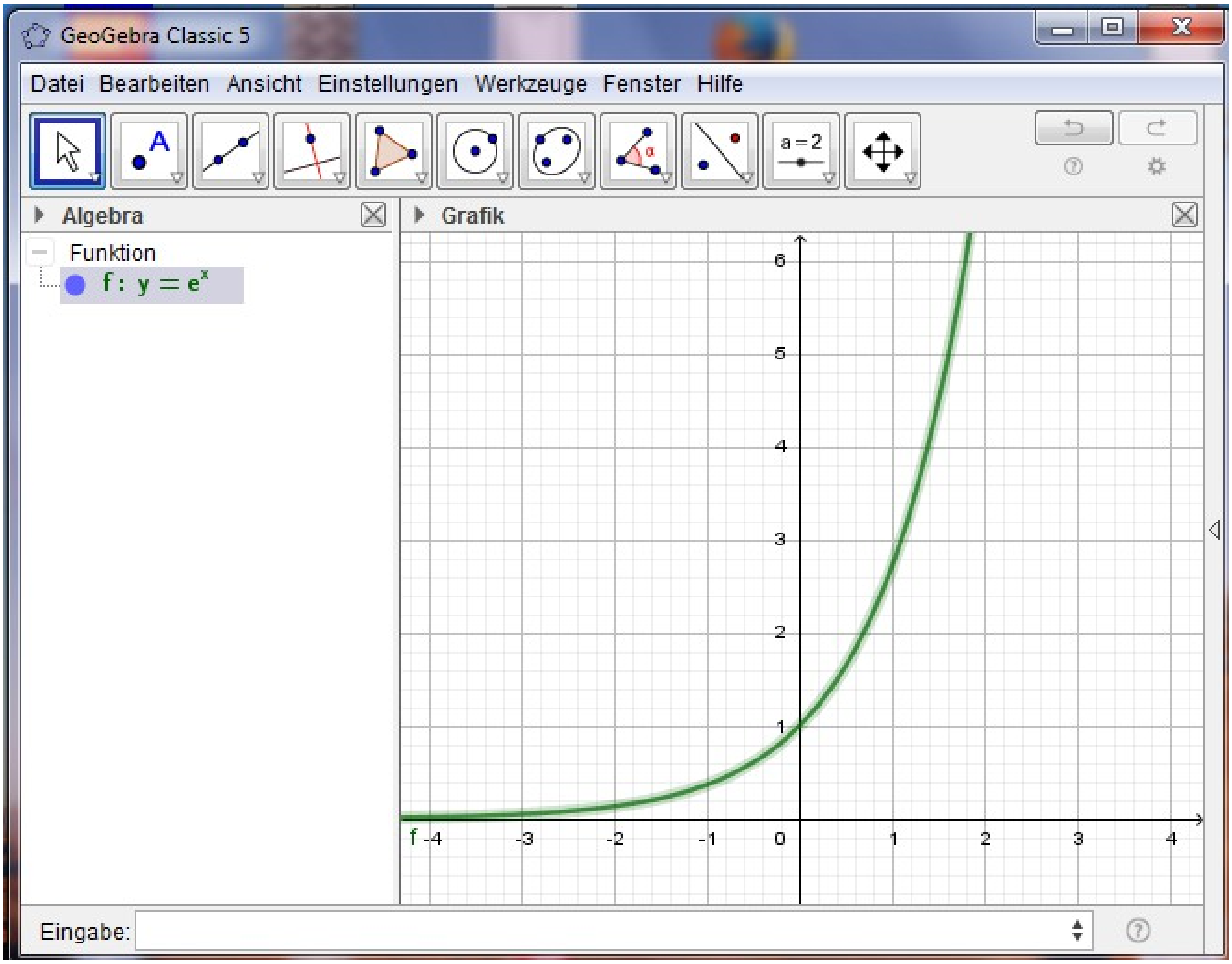
$$\left(e^x\right)' = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x} \quad .$$

**Die Ableitung der Funktion $y = e^x$ ist gleich der Funktion $y = e^x$ .**

# Schaubild der Exponentialfunktion $y = e^x$

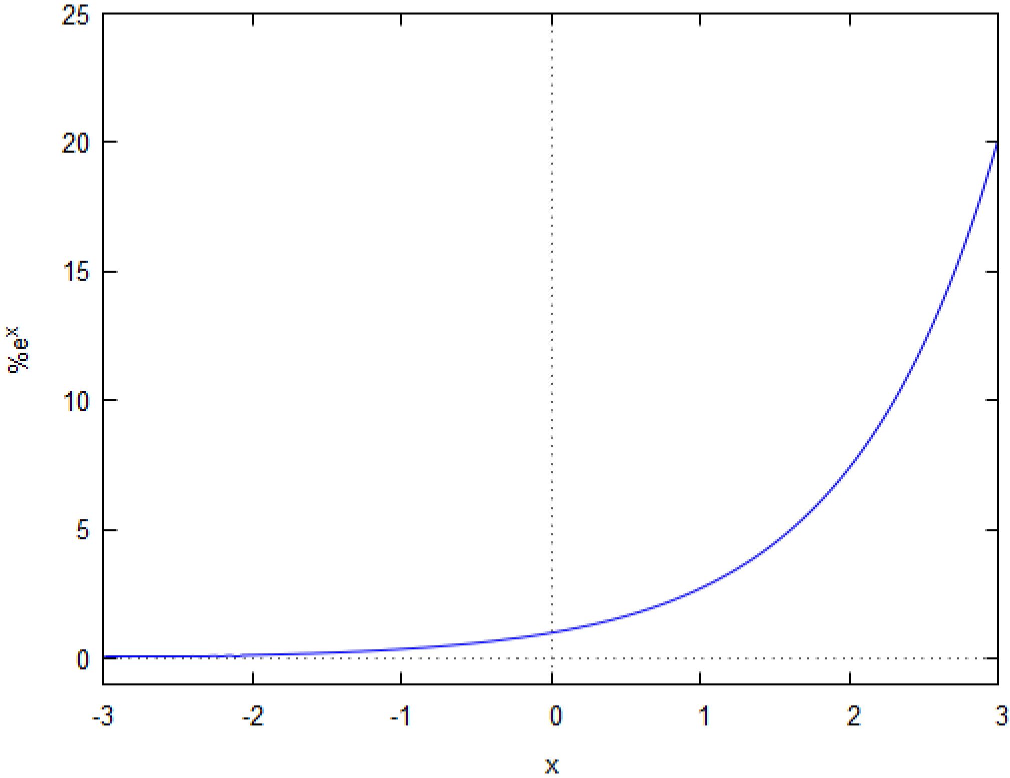
GeoGebra Classic 5.0.493.0-d



# Schaubild der Exponentialfunktion $y = e^x$

wxMaxima17.10.1

wxplot2d([exp(x)], [x,-3,3], [y,-1,25])$



# Ableitung der Exponentialfunktion (Alternative)

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x) = a^x$ , $a \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ ,

heißt **Expontentialfunktion zur Basis** $a$ .

**Ableitung der Exponentialfunktion :**

$$\left(a^x\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$\left(a^x\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$$

$$\left(a^x\right)' = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Wenn der Grenzwert $g := \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ existiert, wäre $\left(a^x\right)' = a^x \cdot g$ , die Ableitungsfunktion also proportional zur ursprünglichen Funktion mit dem Proportionalitätsfaktor $g$ .

## Die Frage ist nun :

Gibt es eine Basis $a$ , so dass der entsprechende Proportionalitätsfaktor $g = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ ist , und dass also gilt

$$\left(a^x\right)' = a^x \qquad ?$$

## Plausibilitätsbettrachtung :

Falls $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = 1$ ist, würde gelten :

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt :

$$1 - \epsilon < \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$$

$$\frac{1 - \epsilon}{n} < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1 + \epsilon}{n}$$

$$1 + \frac{1 - \epsilon}{n} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1 + \epsilon}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1 - \epsilon}{n}\right)^n < a < \left(1 + \frac{1 + \epsilon}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1 - \epsilon}{n}\right)^n \leq a \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1 + \epsilon}{n}\right)^n$$

$$e^{1-\epsilon} \leq a \leq e^{1+\epsilon}$$

$$e \cdot e^{-\epsilon} \leq a \leq e \cdot e^{\epsilon}$$

Für $\epsilon = \dfrac{1}{k}$ , $k \in \mathbb{N}$ , würde $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}} = 1$ gelten , und es folgte :

$$e \cdot e^{-\frac{1}{k}} \leq a \leq e \cdot e^{\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} e \cdot e^{-\frac{1}{k}} \leq a \leq \lim_{k\to\infty} e \cdot e^{\frac{1}{k}}$$

$$e \cdot 1 \leq a \leq e \cdot 1$$

$$e \leq a \leq e$$

$a = e$ **Eulersche Zahl**

# Folgerung :

Die Exponentialfunktion $y = e^x$ mit der Eulerschen Zahl $e \approx 2{,}718$ als Basis reproduziert sich beim Ableiten :

$$\boxed{y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x}$$

**Bemerkung :**

Bei der Definition der Exponentialfunktionen $y = e^x$ bzw. $y = a^x$ , $a \in \mathbb{R}_0^+$ , auf $\mathbb{R}$ , und auch bei der Herleitung der Ableitungen, wird deren stetige Fortsetzbarkeit auf $\mathbb{R}$ sowie die Vererbung der Potenzgesetze für reelle Exponenten vorausgesetzt !

Vergleiche hierzu :

**Arno Fehringer :** Stetige Fortsetzung der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{R}$ , 2016
https://mathematikgarten.hpage.com/get_file.php?id=31388087&vnr=474731