Geometrie in der komplexen Zahlenebene

Arno Fehringer

September 2019

Quellen :

[1] **Ling-shin Hahn** : Complex Numbers and Geometry. The Mathematical Assoziation of America 1994

[2] **Ilka Agricola; Thomas Friedrich** : Elementargeometrie. Springer Spektrum , 4. Aufl. 2014

[3] **Günter Aumann** : Kreisgeometrie. Springer Verlag, 2015

[4] **Samm Luo ; Cosmin Pohoata :** Let's talk about Symmedians! ; MATHEMATICAL REFLECTIONS 4 (2013)

https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf.

[5] **Roger A. Johnson :** Advanced Euclidean Geometrie . Dover 1960, republished 2007

Komplexe Zahlen [Kurzwiederholung]

Für die imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$ gilt $i \cdot i = i^2 = -1$. Die Zahlen $\sqrt{-a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ haben die Darstellung $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{a} = i \cdot a$.

Beachte :

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist falsch !

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i \cdot \sqrt{a} \cdot i \sqrt{b} = i^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = (-1) \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$ ist richtig !

Die **Menge der komplexen Zahlen** ist definiert als :

$$\mathbb{C} = \{ z = x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Der Multiplikationspunkt kann auch weggelassen werden !

Die Zahlen x , y heißen **Realteil** und **Imaginärteil** von z :

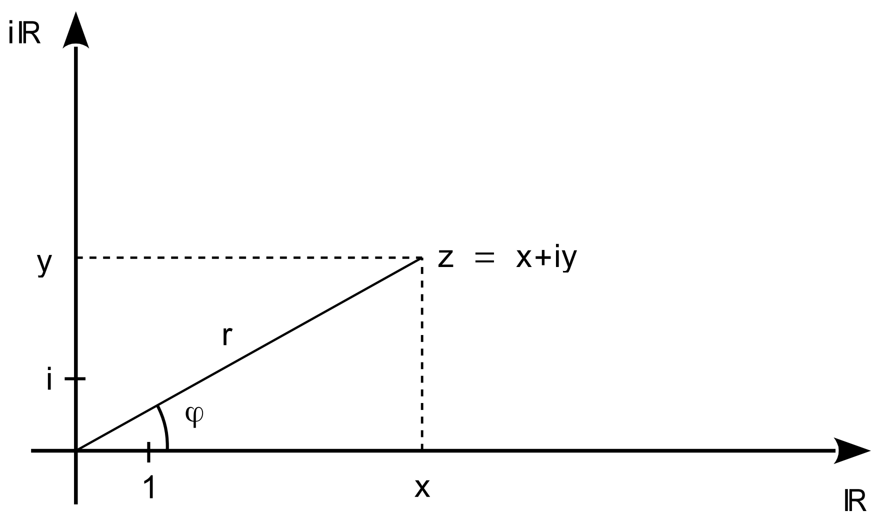
$$x = \Re(z) \quad , \quad y = \Im(z)$$

Die Menge $\mathbb{C}$ bildet zusammen mit der Addition und Multiplikation einen **Körper** :

$$z_1 + z_2 = x_1 + i \cdot y_1 + x_1 + i \cdot y_1$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i \cdot (y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene

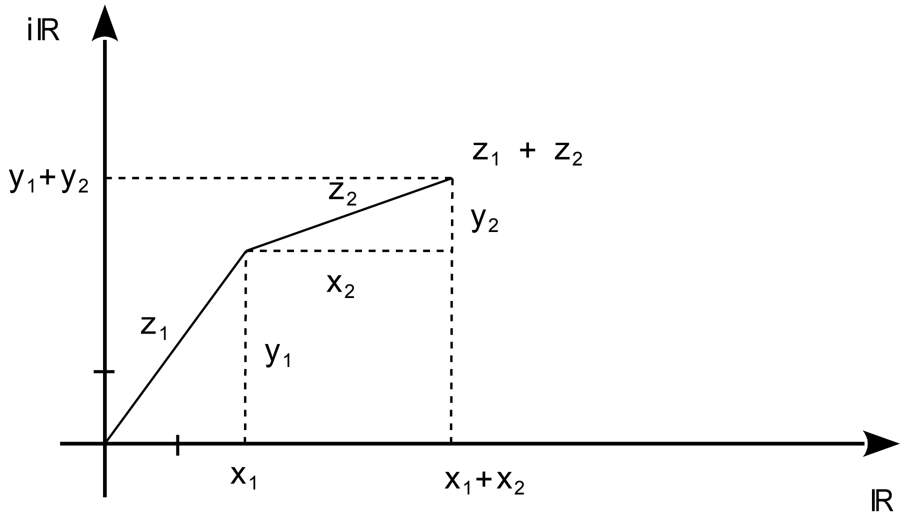


$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2)$$
$$z = r\cos(\varphi) + i(r\sin(\varphi))$$
$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Die Zahl $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt die **Länge von** z , geschrieben $|z|$.

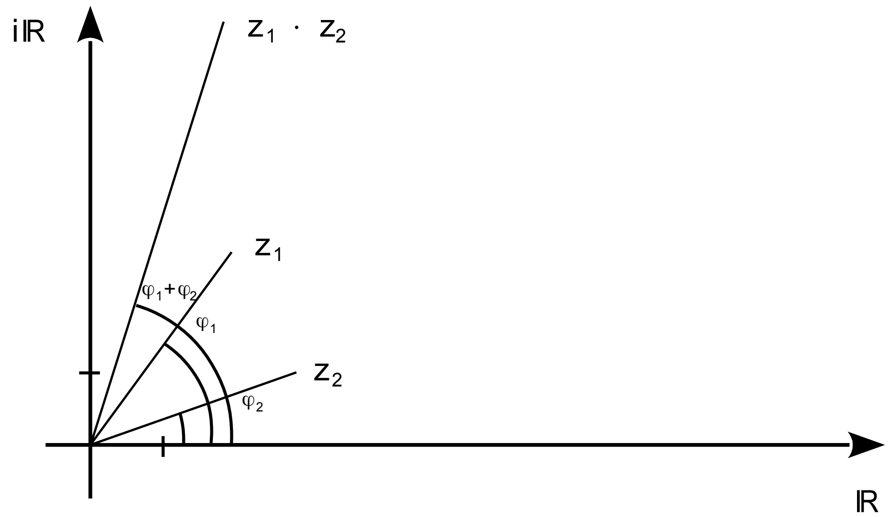
Die Zahl $\varphi = \arg(z)$ heißt die **Argument von** z .

Die Addition entspricht der Vektoraddition :



$$z_1 + z_2 = x_1+x_2 + i\cdot\left(y_1+y_2\right)$$

Die Multiplikation ist eine Drehstreckung :



$$z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1)\right)r_2\left(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)\right)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\left(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\left(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\right)\right)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\left(\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right)$$

Bemerkung :

Die Multiplikation mit der imaginären Einheit i ist eine Drehung um $90°$.

Konsequenzen :

(1) Für $z = r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)$, $\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\right) = r\left(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)\right)$

folgt :

$z\bar{z} = r^2 = x^2 + y^2$, $\arg(z\bar{z}) = \varphi + (-\varphi) = 0$

$\boxed{z\bar{z} = |z|}$

Die Zahl $\bar{z}$ heißt die zu z **konjugiert komplex Zahl** .

(2) Es gilt :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

(3) Für $z = \Re(z) + i\Im(z)$, $\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z)$ folgt :

$$\boxed{\frac{z+\bar{z}}{2} = \Re(z)} \quad , \quad \boxed{\frac{z-\bar{z}}{2i} = \Im(z)}$$

(4) Für $z = \bar{z}$ ist $\Im(z) = 0$, das heißt z ist **reell** .

Für $z = -\bar{z}$ ist $\Re(z) = 0$, das heißt z ist i**maginär** .

Die Formel von de Moivre
(Abraham de Moivre , 1667 – 1754, frz. Mathematiker)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i(\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi + i(\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

Durch Vollständige Induktion zeigt man, dass gilt :

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Ähnliche Dreiecke

Die Zahlen z_1 , z_2 , z sollen die Eckpunkte eines Dreiecks $\Delta z_1 z_2 z$ in der komplexen Zahlenebene darstellen.

Gegeben seien die **ähnlichen** und **gleichsinnig orientierten** Dreiecke $\Delta z_1 z_2 z$, $\Delta w_1 w_2 w$. Die Schreibweise ist $\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w$.

Mit

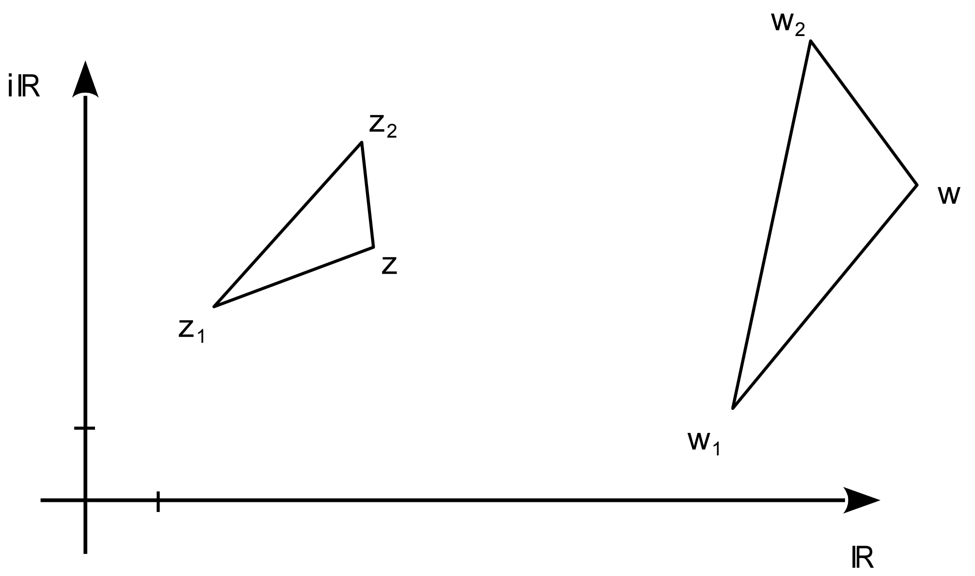
$$z_2 - z_1 = |z_2 - z_1|\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right) \quad , \quad z - z_1 = |z - z_1|\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$

und

$$w_2 - w_1 = |w_2 - w_1|\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right) \quad , \quad w - w_1 = |w - w_1|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

gelte etwa

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w - w_1|} \quad , \quad \varphi_2 - \varphi = \sphericalangle z_1 = \sphericalangle w_1 = \theta_2 - \theta$$



Es folgt für $\Delta z_1 z_2 z$:

$$\frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}{(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{|z_2 - z_1|\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right) \cdot |z - z_1|\left(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)\right)}{|z - z_1|^2}$$

$$\frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{|z_2-z_1|\left(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)\right) \cdot \left(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)\right)}{|z-z_1|}$$

$$\frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{|z_2-z_1|}{|z-z_1|} \left(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)\right) \cdot \left(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)\right)$$

$$\frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{|z_2-z_1|}{|z-z_1|} \left(\cos(\varphi_2)\cos(\varphi) + \sin(\varphi_2)\sin(\varphi) + i\left(\sin(\varphi_2)\cos(\varphi) - \cos(\varphi_2)\sin(\varphi)\right)\right)$$

$$\underline{\frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{|z_2-z_1|}{|z-z_1|} \left(\cos(\varphi_2-\varphi) + i\sin(\varphi_2-\varphi)\right)}$$

Analog folgt für $\Delta w_1 w_2 w$:

$$\underline{\frac{w_2-w_1}{w-w_1} = \frac{|w_2-w_1|}{|w-w_1|} \left(\cos(\theta_2-\theta) + i\sin(\theta_2-\theta)\right)}$$

Wegen $\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w$ ist $\frac{|z_2-z_1|}{|z-z_1|} = \frac{|w_2-w_1|}{|w-w_1|}$, $\varphi_2-\varphi = \theta_2-\theta$, und es folgt :

$$\boxed{\frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{w_2-w_1}{w-w_1}}$$

Satz über gleichsinnig ähnliche Dreiecke

$$\boxed{\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w \text{ gleichsinnig} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{w_2-w_1}{w-w_1}}$$

Ist $\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w$ gegensinnig, so ist $\Delta w_1 w_2 w \sim \Delta \overline{w}_1 \overline{w}_2 \overline{w}$ gegensinnig und somit $\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta \overline{w}_1 \overline{w}_2 \overline{w}$ gleichsinnig, und es folgt der

Satz über gegensinnig ähnliche Dreiecke

$$\boxed{\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w \text{ gegensinnig} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{\overline{w}_2-\overline{w}_1}{\overline{w}-\overline{w}_1}}$$

Determinantendarstellung der Verhältnisgleichungen ähnlicher Dreiecke

$\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w$ gleichsinnig

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w - w_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 w - z_2 w_1 - z_1 w + z_1 w = z w_2 - z w_1 - z_1 w_2 + z_1 w_1$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 w - z_2 w_1 - z_1 w = z w_2 - z w_1 - z_1 w_2$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 w - z_2 w_1 - z_1 w - z w_2 + z w_1 + z_1 w_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 (w_2 - w) - w_1 (z_2 - w) + z_2 w - z w_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z & w & 1 \end{vmatrix} = 0$$

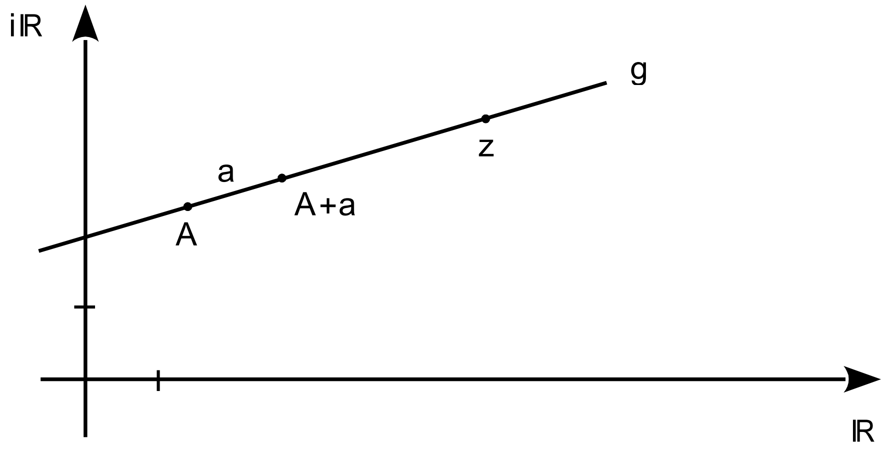
Analog :

$\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta w_1 w_2 w$ gegensinnig

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{\overline{w} - \overline{w}_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z_1 & \overline{w}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{w}_2 & 1 \\ z & \overline{w} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Gleichung der Geraden g durch A in Richtung a



$$g: \quad z = A + sa \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z-A}{a} = s \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

$$g: \quad \boxed{\frac{z-A}{a} = \frac{\bar{z}-\bar{A}}{\bar{a}}}$$

$$\bar{a}z - \bar{a}A = a\bar{z} - a\bar{A}$$

$$g: \quad \boxed{\bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A}}$$

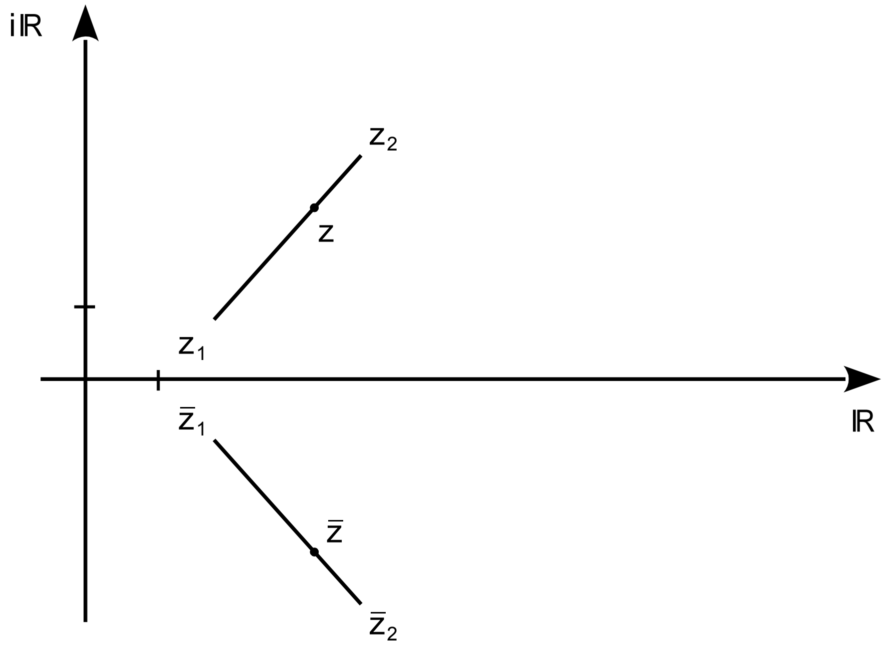
Schnittpunkt der Geraden g und h

$$\left.\begin{array}{lll} g: & \bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A} & \Big|\ \cdot b \\ h: & \bar{b}z - b\bar{z} = \bar{b}B - b\bar{B} & \Big|\ \cdot a \end{array}\right] -$$

$$\left(\bar{a}b - a\bar{b}\right)z = \left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)b - \left(\bar{b}B - b\bar{B}\right)a$$

$$\boxed{z = \frac{\left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)b - \left(\bar{b}B - b\bar{B}\right)a}{\bar{a}b - a\bar{b}}}$$

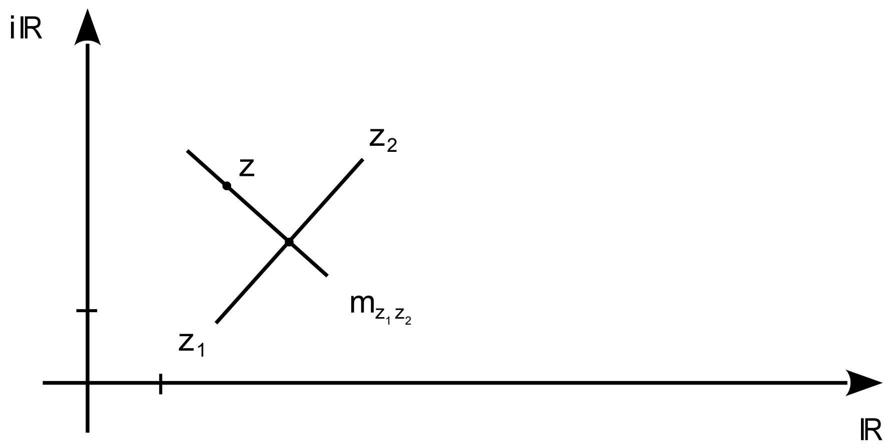
Gleichung der Geraden $g_{z_1 z_2}$ durch z_1 , z_2



Die Linien $\Lambda z_1 z_2 z$, $\Lambda \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}$ sind kongruent, $\Lambda z_1 z_2 z \cong \Lambda \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}$, und es gilt :

$$\boxed{g_{z_1 z_2} \; : \quad \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

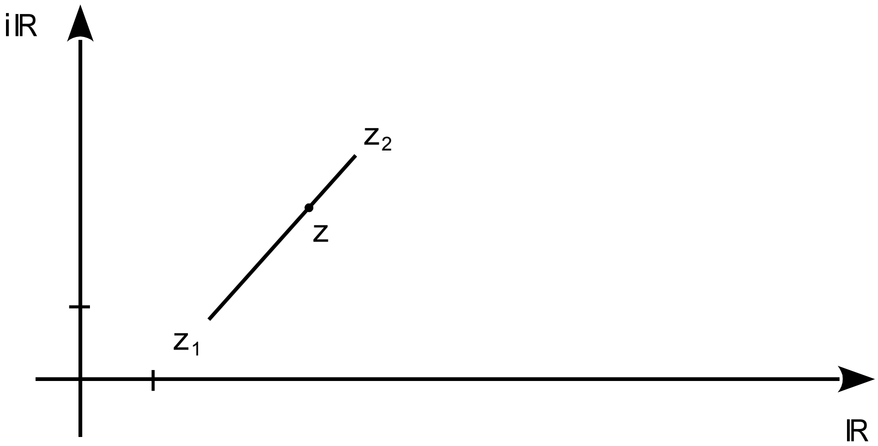
Gleichung der Mittelsenkrechten $m_{z_1 z_2}$



$$\Delta z_1 z_2 z \sim \Delta z_2 z_1 z \;\text{ gegensinnig } \Leftrightarrow \quad \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z} - \bar{z}_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{m_{z_1 z_2} \; : \quad \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z} - \bar{z}_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Gleichung der Geraden $g_{z_1 z_2}$ durch z_1 , z_2 [Alternative]



$$g_{z_1 z_2} \quad : \qquad z = z_1 + s\left(z_2 - z_1\right) \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = s \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

$$g_{z_1 z_2} \quad : \qquad \boxed{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}}$$

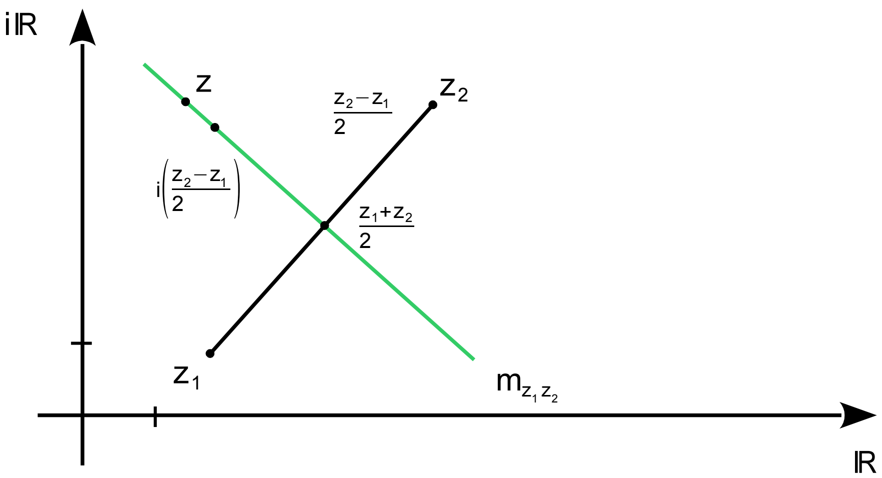
$$\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)z - \left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)z_1 = \left(z_2 - z_1\right)\bar{z} - \left(z_2 - z_1\right)\bar{z}_1$$

$$g_{z_1 z_2} \quad : \qquad \boxed{\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)z - \left(z_2 - z_1\right)\bar{z} = \left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)z_1 - \left(z_2 - z_1\right)\bar{z}_1}$$

$$\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)z - \left(z_2 - z_1\right)\bar{z} = z_1\bar{z}_2 - \underline{z_1\bar{z}_1} - \bar{z}_1 z_2 + \underline{z_1\bar{z}_1}$$

$$g_{z_1 z_2} \quad : \qquad \boxed{\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)z - \left(z_2 - z_1\right)\bar{z} = \bar{z}_2 z_1 - z_2\bar{z}_1}$$

Gleichung der Mittelsenkrechten $m_{z_1 z_2}$ **[Alternative]**



Die Mittelsenkrechte $m_{z_1 z_2}$ geht durch den Punkt $\frac{z_1+z_2}{2}$ in Richtung $i\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$ senkrecht zu $\frac{z_2-z_1}{2}$. Die Multiplikation mit i , $|i| = 1$, bedeutet eine Drehung um $90°$ entgegen des Uhrzeigersinns .

$$m_{z_1 z_2} : \quad z = \frac{z_1+z_2}{2} + t\,i\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z - \frac{z_1+z_2}{2}}{\frac{z_2-z_1}{2}} = t\,i \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z - \frac{z_1+z_2}{2}}{\frac{z_2-z_2}{2}} = - \frac{\bar{z} - \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{2}}{\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_2}{2}}$$

$$\frac{2z - (z_1+z_2)}{z_2-z_1} = - \frac{2\bar{z} - (\bar{z}_1+\bar{z}_2)}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$$

$$\frac{2z - (z_1+z_2)}{z_2-z_1} = \frac{-2\bar{z} + (\bar{z}_1+\bar{z}_2)}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$$

$$2(\bar{z}_2-\bar{z}_1)z - (\bar{z}_2-\bar{z}_1)(z_1+z_2) = -2(z_2-z_1)\bar{z} + (z_2-z_1)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$2(\bar{z}_2-\bar{z}_1)z + 2(z_2-z_1)\bar{z} = (\bar{z}_2-\bar{z}_1)(z_1+z_2) + (z_2-z_1)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$2(\bar{z}_2-\bar{z}_1)z + 2(z_2-z_1)\bar{z} = \underline{z_1\bar{z}_2} + \bar{z}_2 z_2 - \bar{z}_1 z_1 - \underline{\bar{z}_1 z_2} + \underline{\bar{z}_1 z_2} + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 - \underline{z_1\bar{z}_2}$$

$$2(\bar{z}_2-\bar{z}_1)z + 2(z_2-z_1)\bar{z} = 2\bar{z}_2 z_2 - 2z_1\bar{z}_1$$

$$m_{z_1 z_2} : \quad \boxed{(\bar{z}_2-\bar{z}_1)z + (z_2-z_1)\bar{z} = \bar{z}_2 z_2 - z_1\bar{z}_1}$$

Bemerkung :

Die aufgrund der Ähnlichkeitsbetrachtungen von Dreiecken gewonnene Formel für die Mittelsenkrechte $m_{z_1 z_2}$: $\dfrac{z_2-z_1}{z-z_1} = \dfrac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{\bar{z}-\bar{z}_2}$ ist äquivalent zur alternativ gefundenen, die man durch Umformung erhält :

$$\frac{z_2-z_1}{z-z_1} = \frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{\bar{z}-\bar{z}_2}$$

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}$$

$$\left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)z - \left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)z_1 = \left(z_2-z_1\right)\bar{z} - \left(z_2-z_1\right)\bar{z}_2$$

$$\left(z_2-z_1\right)\bar{z}_2 - \left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)z_1 = -\left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)z + \left(z_2-z_1\right)\bar{z}$$

$$\left(z_2-z_1\right)\bar{z}_2 - \left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)z_1 = \left(\bar{z}_2-\bar{z}_1\right)z + z\left(z_2-z_1\right)\bar{z}$$

$$\bar{z}_2 z_2 - \underline{z_1\bar{z}_2} - z_1\bar{z}_1 + \underline{z_1\bar{z}_2} = \left(\bar{z}_2-\bar{z}_1\right)z + z\left(z_2-z_1\right)\bar{z}$$

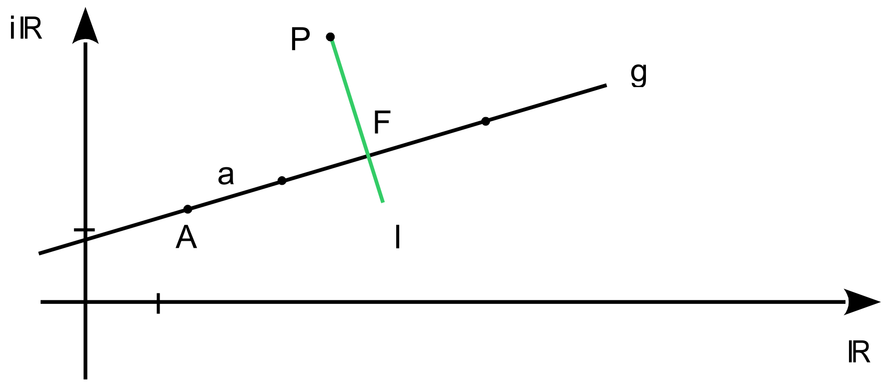
$$\bar{z}_2 z_2 - z_1\bar{z}_1 = \left(\bar{z}_2-\bar{z}_1\right)z + z\left(z_2-z_1\right)\bar{z}$$

$$\left(\bar{z}_2-\bar{z}_1\right)z + z\left(z_2-z_1\right)\bar{z} = \bar{z}_2 z_2 - z_1\bar{z}_1$$

Es gilt für die Mittelsenkrechte also auch die Verhältnisgleichung :

$$m_{z_1 z_2} : \quad \boxed{\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}}$$

Gleichung der Lotgeraden l von P auf g



$$g: \quad \bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A}$$

Lotgerade

$$l: \quad z = P + t \cdot i a$$

$$\frac{z-P}{a} = ti$$

$$\frac{z-P}{a} = -\frac{\bar{z}-\bar{P}}{\bar{a}}$$

$$\boxed{\bar{a}z + a\bar{z} = \bar{a}P + a\bar{P}}$$

Lotfußpunkt F

$$\left.\begin{array}{ll} g: & \bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A} \\ l: & \bar{a}z + a\bar{z} = \bar{a}P + a\bar{P} \end{array}\right] +$$

$$2\bar{a}z = \bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})$$

$$z = \frac{\bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}$$

$$\boxed{F = \frac{\bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}}$$

Abstand $d(P,g)$ **des Punktes** P **von** g

$$d(P,g) = |P-F|$$

$$P-F = P - \frac{\bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}$$

$$P-F = \frac{2\bar{a}P - \bar{a}(P+A) - a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}$$

$$P-F = \frac{2\bar{a}P-\bar{a}P-\bar{a}A-a\bar{P}+a\bar{A}}{2\bar{a}}$$

$$P-F = \frac{\bar{a}P-\bar{a}A-a\bar{P}+a\bar{A}}{2\bar{a}}$$

$$\boxed{P-F = \frac{\bar{a}(P-A)-a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}} \quad , \quad \boxed{F-P = \frac{\bar{a}(A-P)-a(\bar{A}-\bar{P})}{2\bar{a}}}$$

$$|P-F|^2 = \frac{\bar{a}(P-A)-a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}} \cdot \frac{a(\bar{P}-\bar{A})-\bar{a}(P-A)}{2a}$$

$$|P-F|^2 = \frac{\bar{a}(P-A)-a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}} \cdot -\frac{\bar{a}(P-A)-a(\bar{P}-\bar{A})}{2a}$$

$$|P-F|^2 = -\frac{\left(\bar{a}(P-A)-a(\bar{P}-\bar{A})\right)^2}{4a\bar{a}}$$

$$\boxed{|P-F| = \pm i\,\frac{\bar{a}(P-A)-a(\bar{P}-\bar{A})}{2|a|}}$$

Vgl. Seite 20 !

Bedingung für Parallelität und Orthogonalität der Geraden g und h

$g: \quad \bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A}$

$h: \quad \bar{b}z + b\bar{z} = \bar{b}B + b\bar{B}$

$b \parallel a \quad \Leftrightarrow \quad b = va \ , \quad v \in \mathbb{R}$

$$\frac{b}{a} = v$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

$$\bar{a}b = a\bar{b}$$

$$\boxed{\bar{a}b - a\bar{b} = 0}$$

$b \perp a \quad \Leftrightarrow \quad b = via \ , \quad v \in \mathbb{R}$

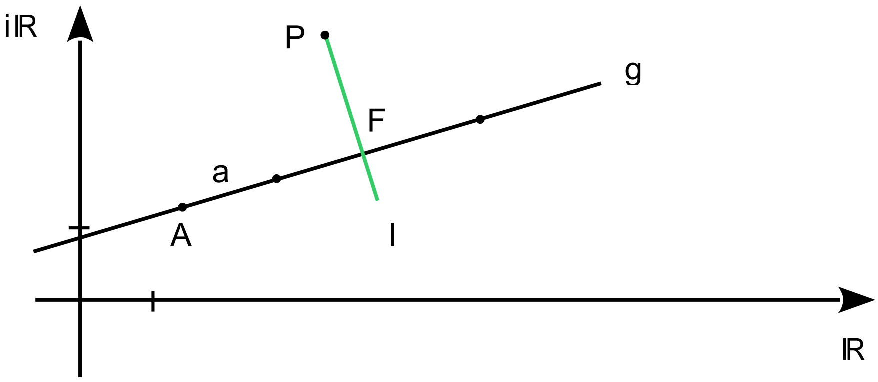
$$\frac{b}{a} = vi$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

$$\bar{a}b = -a\bar{b}$$

$$\boxed{\bar{a}b + a\bar{b} = 0}$$

Nochmals Lotfußpunkt F **von** P **auf** g



$$\left.\begin{array}{llr} a \perp F-P & \Leftrightarrow & \bar{a}(F-P) + a(\bar{F}-\bar{P}) = 0 \\ a \parallel F-A & \Leftrightarrow & \bar{a}(F-A) - a(\bar{F}-\bar{A}) = 0 \end{array}\right] \; +$$

$$\bar{a}(2F-P-A) + a(-\bar{P}+\bar{a}) = 0$$

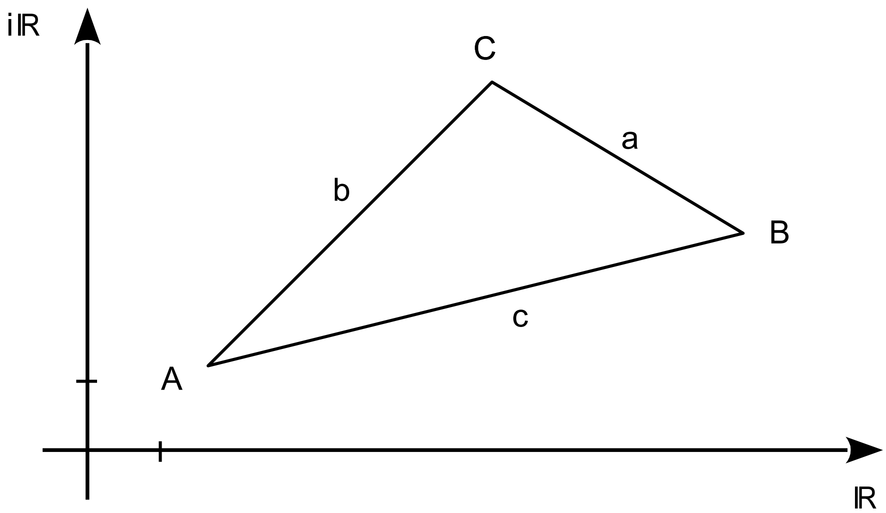
$$\bar{a}(2F-(P+A)) - a(\bar{P}-\bar{A}) = 0$$

$$2\bar{a}F-\bar{a}(P+A) - a(\bar{P}-\bar{A}) = 0$$

$$2\bar{a}F = \bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})$$

$$\boxed{F = \frac{\bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}}$$

Kosinussatz



Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit den Seiten $b = C - A$, $c = B - A$, $a = C - B$, also nicht in der üblichen zyklischen Anordnung.

$$|a|^2 = a\bar{a}$$

$$|a|^2 = (-b+c)(-\bar{b}+\bar{c})$$

$$\boxed{|a|^2 = |b|^2 + |c|^2 - (\bar{b}c + b\bar{c})}$$ **Kosinussatz**

Was bedeutet $(\bar{b}c + b\bar{c})$?

Mit $b = |b|(\cos\varphi_b + i\sin\varphi_b)$, $c = |c|(\cos\varphi_c + i\sin\varphi_c)$ folgt :

$$(\bar{b}c + b\bar{c}) = |b||c|(\cos\varphi_b - i\sin\varphi_b)(\cos\varphi_c + i\sin\varphi_c) + |b||c|(\cos\varphi_b + i\sin\varphi_b)(\cos\varphi_c - i\sin\varphi_c)$$

$$\begin{aligned}(\bar{b}c + b\bar{c}) = {} & |b||c|(\cos\varphi_b\cos\varphi_c + \sin\varphi_b\sin\varphi_c - i(\sin\varphi_b\cos\varphi_c - \cos\varphi_b\sin\varphi_c)) \\ & + |b||c|(\cos\varphi_b\cos\varphi_c + \sin\varphi_b\sin\varphi_c + i(\sin\varphi_b\cos\varphi_c - \cos\varphi_b\sin\varphi_c))\end{aligned}$$

$$(\bar{b}c + b\bar{c}) = 2\,|b||c|\cos(\varphi_b - \varphi_c) \qquad , \qquad \varphi_b - \varphi_c = \alpha$$

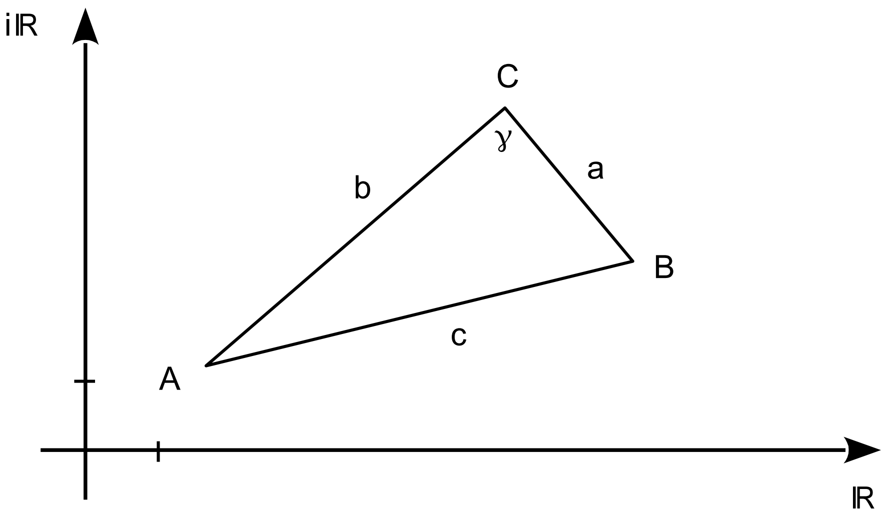
$$(\bar{b}c + b\bar{c}) = 2\,|b||c|\cos\alpha$$

Inneres Produkt der Zahlen b , c :

$$\boxed{b \odot c \;:=\; \frac{\bar{b}c + b\bar{c}}{2} = |b||c|\cos\alpha}$$

Bemerkung :
Das **innere Produkt** ist gleich dem **Skalarprodukt** in der geometrischen Darstellung, wenn man sich auf die entsprechenden Vektoren für b , c bezieht.

Satz des Pythagoras



Gegeben sei das Dreieck $\Delta\,ABC$ mit den Seiten $a = B - C$, $b = A - C$ und dem Winkel γ .

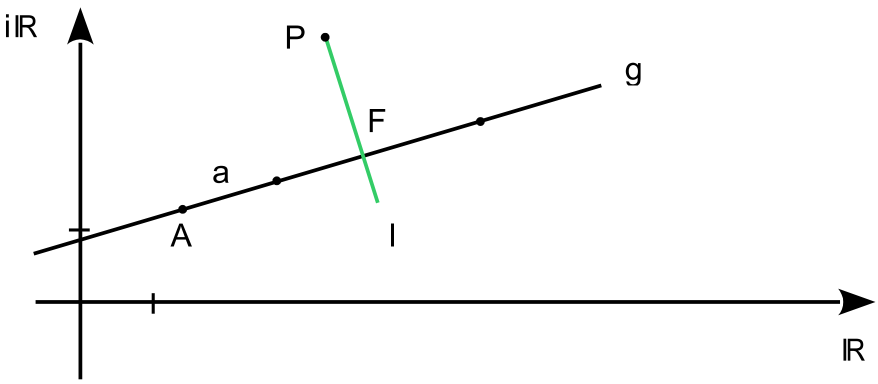
Nach dem **Kosinussatz** gilt :

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - \left(\bar{a}b + a\bar{b}\right)$$

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\,\frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2} \quad , \quad \frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2} = |a||b|\left(\cos\gamma\right)$$

$$\gamma = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad |a||b|\left(\cos 90^\circ\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{a}b + a\bar{b} = 0}$$

Revision : Abstand $d(P,g)$ des Punktes P von g



$$i\frac{a}{|a|} \odot P-A \quad := \quad \frac{\overline{i\frac{a}{|a|}}(P-A) + i\frac{a}{|a|}(\overline{P}-\overline{A})}{2} = \left|i\frac{a}{|a|}\right||P-A|\cos(<P)$$

$$\frac{\overline{i\frac{a}{|a|}}(P-A) + i\frac{a}{|a|}(\overline{P}-\overline{A})}{2} = |P-A|\cos(<P)$$

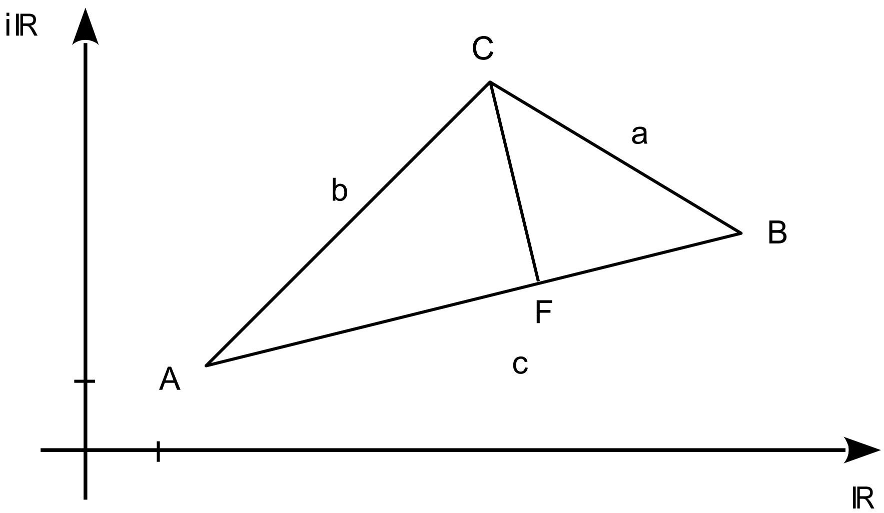
$$\frac{\overline{i\frac{a}{|a|}}(P-A) + i\frac{a}{|a|}(\overline{P}-\overline{A})}{2} = d(P,g)$$

$$\frac{\overline{ia}(P-A) + ia(\overline{P}-\overline{A})}{2|a|} = d(P,g)$$

$$-i\,\frac{\left(\overline{a}(P-A) - a(\overline{P}-\overline{A})\right)}{2|a|} = d(P,g)$$

$$\boxed{d(P,g) = -i\,\frac{\left(\overline{a}(P-A) - a(\overline{P}-\overline{A})\right)}{2|a|}}$$

Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC



Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit den Seiten $b = C-A$, $c = B-A$, $a = C-B$, also nicht in der üblichen zyklischen Anordnung.

Nach der **Lotfußpunktfomel** $F = \dfrac{\bar{a}(P+A) + a(\bar{P}-\bar{A})}{2\bar{a}}$ gilt mit t $P = C$, $\bar{a} = \bar{c}$:

$$F = \frac{\bar{c}(C+A) + c(\bar{C}-\bar{A})}{2\bar{c}}$$

$$C-F = C - \frac{\bar{c}(C+A) + c(\bar{C}-\bar{A})}{2\bar{c}}$$

$$C-F = \frac{2\bar{c}C - \bar{c}(C+A) - c(\bar{C}-\bar{A})}{2\bar{c}}$$

$$C-F = \frac{\bar{c}(C-A) - c(\bar{C}-\bar{A})}{2\bar{c}}$$

$$C-F = \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2\bar{c}} \quad , \quad \overline{C-F} = -\frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2c}$$

$$|C-F|^2 = \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2\bar{c}} \cdot \left(-\frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2c}\right)$$

$$|C-F|^2 = -\frac{(\bar{c}b - c\bar{b})^2}{4|c|^2}$$

$$|h|^2 := |C-F|^2 = -\frac{(\bar{c}b - c\bar{b})^2}{4|c|^2}$$

Was ist nun $\bar{c}b - c\bar{b}$?

Mit $b = |b|(\cos\varphi_b + i\sin\varphi_b)$, $c = |c|(\cos\varphi_c + i\sin\varphi_c)$ folgt :

$$\bar{c}b - c\bar{b} = |b||c|(\cos\varphi_c - i\sin\varphi_c)(\cos\varphi_b + i\sin\varphi_b) - |b||c|(\cos\varphi_c + i\sin\varphi_c)(\cos\varphi_b - i\sin\varphi_b)$$

$$\bar{c}b - c\bar{b} = |b||c|(\cos\varphi_c\cos\varphi_b + \sin\varphi_c\sin\varphi_b - i(\sin\varphi_c\cos\varphi_b - \cos\varphi_c\sin\varphi_b))$$

$$- |b||c|(\cos\varphi_c\cos\varphi_b + \sin\varphi_c\sin\varphi_b + i(\sin\varphi_c\cos\varphi_b - \cos\varphi_c\sin\varphi_b))$$

$$\bar{c}b - c\bar{b} = -2i\ |b||c|\sin(\varphi_c - \varphi_b)$$

$$\bar{c}b - c\bar{b} = 2i\ |b||c|\sin(\varphi_b - \varphi_c) \quad , \quad \varphi_b - \varphi_c = \alpha$$

$$\bar{c}b - c\bar{b} = 2i\ |b||c|\sin\alpha$$

$\dfrac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2i} = |c| \cdot |b|\sin\alpha$ **Fläche des von c , b aufgespannten Parallelogramms**

Äußeres Produkt der Zahlen c , b :

$$\boxed{c \otimes b \quad := \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2i} = |c||b|\sin\alpha}$$

Bemerkung :
Das **äußere Produkt** ist gleich dem **Kreuzprodukt** in der geometrischen Darstellung, wenn man sich auf die entsprechenden Vektoren für c , b bezieht.

Damit folgt für den **Flächeninhalt des Dreiecks** ΔABC **:**

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\ (\ c \otimes b\ )$$

$$\boxed{A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2i}} \quad \text{mit} \quad c = B - A \ , \quad b = C - A$$

Andererseits ist $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |c| \cdot |h|$, und deshalb

$$|c||h| = \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2i} \ , \quad |h| = \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2|c|i} \ , \quad |h|^2 = \frac{(\bar{c}b - c\bar{b})^2}{4|c|^2 i^2} = -\frac{(\bar{c}b - c\bar{b})^2}{4|c|^2} \ ,$$

was bereits aus der Lotfußpunktformel $|h|^2 := |C - F|^2 = -\dfrac{(\bar{c}b - c\bar{b})^2}{4|c|^2}$ folgte .

Den **Flächeninhalt des Dreiecks** ΔABC kann man auch „symmetrischer“ darstellen :

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2i} \quad \text{mit} \quad \bar{c} = \bar{B} - \bar{A} \ , \quad \bar{b} = \bar{C} - \bar{A}$$

Jetzt geht man zur zyklischen Beschreibung des Dreiecks über, das heißt, man muss $-b$ durch b ersetzen, und es folgt zunächst

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\bar{c}b + c\bar{b}}{2i}$$

$$\boxed{A_\Delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{c}b - c\bar{b}}{2i}} \quad \text{mit} \quad a = C - B \ , \quad b = A - C \ , \quad c = B - A$$

Mit $\bar{c} = \bar{B} - \bar{A}$, $\bar{b} = \bar{A} - \bar{C}$ folgt weiter

$$A_\Delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\bar{B} - \bar{A})b - c(\bar{A} - \bar{C})}{2i}$$

$$A_\Delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{B}b - \bar{A}b - \bar{A}c + \bar{C}c}{2i}$$

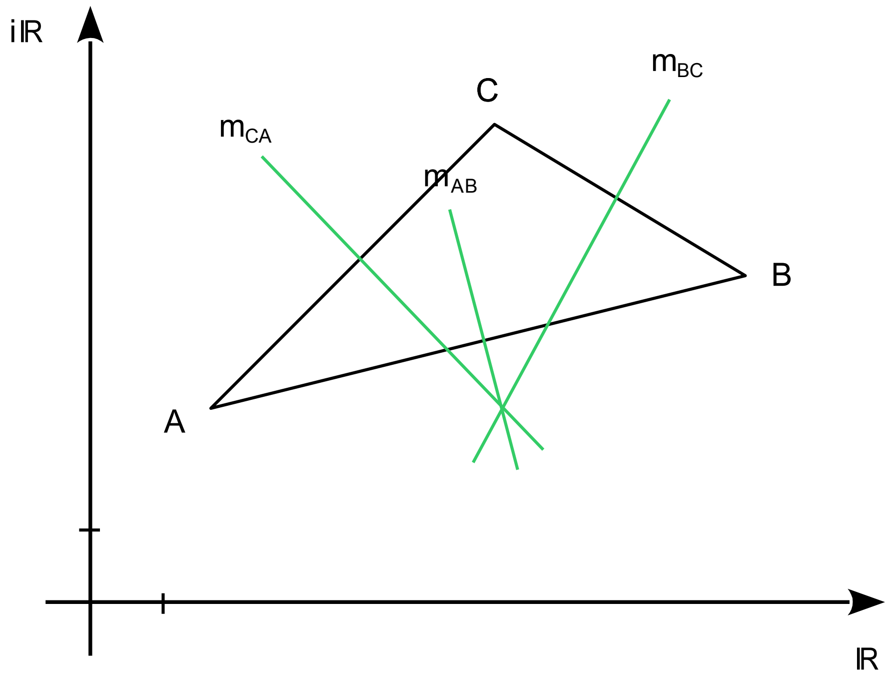
$$A_\Delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-\bar{A}(b+c) + \bar{B}b + \bar{C}c}{2i} \quad , \quad b + c = -a$$

$$\boxed{A_\Delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{A}a + \bar{B}b + \bar{C}c}{2i}} \quad \text{mit} \quad a = C - B \ , \quad b = A - C \ , \quad c = B - A$$

Folgerung :

$$\boxed{\bar{A}a + \bar{B}b + \bar{C}c = -4i \cdot A_\Delta} \quad \text{mit} \quad a = C - B \ , \quad b = A - C \ , \quad c = B - A$$

Gleichungen der Mittelsenkrechten, Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden und Höhen im Dreieck sowie Schnittpunkte



Mittelsenkrechte

$$m_{AB} \quad : \qquad (\overline{B}-\overline{A})z + (B-A)\overline{z} = \overline{B}B - A\overline{A}$$

$$m_{BC} \quad : \qquad (\overline{C}-\overline{B})z + (C-B)\overline{z} = \overline{C}C - B\overline{B}$$

$$m_{CA} \quad : \qquad (\overline{A}-\overline{C})z + (A-C)\overline{z} = \overline{A}A - C\overline{C}$$

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Addiert man zwei Gleichungen, so erhält man die dritte Gleichung .
Erfüllt ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ zwei Gleichungen, so auch die Dritte .

Um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu bestimmen, kann man etwa das folgende Gleichungssystem lösen :

$$\left.\begin{array}{ll} (\overline{B}-\overline{A})z + (B-A)\overline{z} = \overline{B}B - A\overline{A} & \Big| \cdot(C-B) \\ (\overline{C}-\overline{B})z + (C-B)\overline{z} = \overline{C}C - B\overline{B} & \Big| \cdot(B-A) \end{array}\right] -$$

$$\left((\overline{B}-\overline{A})(C-B) - (B-A)(\overline{C}-\overline{B})\right)z = (\overline{B}B - A\overline{A})(C-B) - (\overline{C}C - B\overline{B})(B-A)$$

$$z = \frac{(\overline{B}B - A\overline{A})(C-B) - (\overline{C}C - B\overline{B})(B-A)}{(\overline{B}-\overline{A})(C-B) - (B-A)(\overline{C}-\overline{B})}$$

Umformen des Zählers und des Nenners ergibt :

Zähler :

$$
\begin{aligned}
& \left(\overline{B}B \;-\; A\overline{A}\right)\left(C-B\right) \;-\; \left(\overline{C}C \;-\; B\overline{B}\right)\left(B-A\right) \\
= \;& \overline{B}BC \;-\; A\overline{A}C \;-\; \overline{B}BB \;+\; A\overline{A}B \;-\; \overline{C}CB \;+\; BB\overline{B} \;+\; A\overline{C}C \;-\; AB\overline{B} \\
= \;& \overline{B}BC \;-\; A\overline{A}C \;+\; A\overline{A}B \;-\; \overline{C}CB \;+\; A\overline{C}C \;-\; AB\overline{B} \\
= \;& A\overline{A}\left(B-C\right) \;+\; B\overline{B}\left(C-A\right) \;+\; C\overline{C}\left(A-B\right) \\
= \;& |A|^2\left(B-C\right) \;+\; |B|^2\left(C-A\right) \;+\; |C|^2\left(A-B\right)
\end{aligned}
$$

Nenner :

$$
\begin{aligned}
& \left(\overline{B}-\overline{A}\right)\left(C-B\right) \;-\; \left(B-A\right)\left(\overline{C}-\overline{B}\right) \\
= \;& \overline{B}C-\overline{B}B-\overline{A}C+\overline{A}B \;-\; \left[B\overline{C}-B\overline{B}-A\overline{C}+A\overline{B}\right] \\
= \;& \overline{B}C-\overline{B}B-\overline{A}C+\overline{A}B-B\overline{C}+B\overline{B}+A\overline{C}-A\overline{B} \\
= \;& \overline{B}C-\overline{A}C+\overline{A}B-B\overline{C}+A\overline{C}-A\overline{B} \\
= \;& \overline{A}B-A\overline{B} \;+\; \overline{B}C-B\overline{C} \;+\; \overline{C}A-C\overline{A} \\
= \;& \overline{A}\left(B-C\right) \;+\; \overline{B}\left(C-A\right) \;+\; \overline{C}\left(A-B\right)
\end{aligned}
$$

Also folgt für den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck ΔABC **:**

$$
z \;=\; \frac{|A|^2\left(B-C\right) \;+\; |B|^2\left(C-A\right) \;+\; |C|^2\left(A-B\right)}{\overline{A}\left(B-C\right) \;+\; \overline{B}\left(C-A\right) \;+\; \overline{C}\left(A-B\right)}
$$

$$
\boxed{z \;=\; \frac{|A|^2\left(C-B\right) \;+\; |B|^2\left(A-C\right) \;+\; |C|^2\left(B-A\right)}{\overline{A}\left(C-B\right) \;+\; \overline{B}\left(A-C\right) \;+\; \overline{C}\left(B-A\right)}}
$$

Mit $a=C-B$, $b=A-C$, $c=B-A$ folgt auch

$$
z \;=\; \frac{|A|^2 a \;+\; |B|^2 b \;+\; |C|^2 c}{\overline{A}a \;+\; \overline{B}b \;+\; \overline{C}c}
$$

$$
\boxed{U \;=\; \frac{|A|^2 a \;+\; |B|^2 b \;+\; |C|^2 c}{\overline{A}a \;+\; \overline{B}b \;+\; \overline{C}c}}
$$

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der **Mittelpunkt der Umkreises** des Dreiecks ΔABC .

Berechnung des Umkreisradius R

Der Umkreismittelpunkt ist $U = \dfrac{|A|^2 a + |B|^2 b + |C|^2 c}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$

Der Umkreisradius ist

$$R^2 = |U - A|^2$$

$$U - A = \frac{|A|^2 a + |B|^2 b + |C|^2 c}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c} - A$$

$$U - A = \frac{|A|^2 a + |B|^2 b + |C|^2 c - A\left(\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c\right)}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$$

$$U - A = \frac{|A|^2 a + |B|^2 b + |C|^2 c - |A|^2 a - A\overline{B}b - A\overline{C}c}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$$

$$U - A = \frac{|B|^2 b + |C|^2 c - A\overline{B}b - A\overline{C}c}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$$

$$U - A = \frac{B\overline{B}b + C\overline{C}c - A\overline{B}b - A\overline{C}c}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$$

$$U - A = \frac{\overline{B}b(B - A) + \overline{C}c(C - A)}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c} \quad , \quad B - A = c \ , \quad C - A = -b$$

$$U - A = \frac{\overline{B}bc - \overline{C}cb}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$$

$$U - A = \frac{bc\left(\overline{B} - \overline{C}\right)}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c} \quad , \quad B - C = -a$$

$$U - A = \frac{-\overline{a}bc}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}$$

Nach der **Folgerung** im Zusammenhang mit der Dreiecksfläche ist

$$\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c = -4i \cdot A_\Delta \quad \text{mit} \quad a = C - B \ , \ b = A - C \ , \ c = B - A \ ,$$

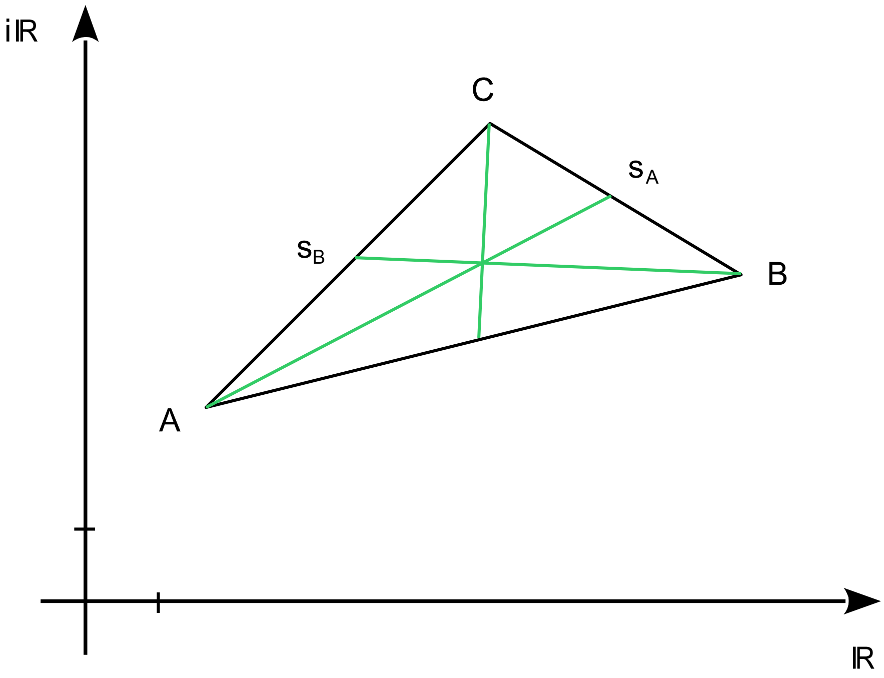
also

$$U - A = \frac{-\overline{a}bc}{-4i \cdot A_\Delta} \ .$$

$$|U - A|^2 = \frac{-\overline{a}bc}{-4i \cdot A_\Delta} \cdot \frac{-a\overline{b}\overline{c}}{4i \cdot A_\Delta}$$

$$|U - A|^2 = \frac{|a|^2|b|^2|c|^2}{4^2 \cdot {A_\Delta}^2} \quad \text{und somit} \quad \boxed{R = \frac{|a||b||c|}{4 \cdot A_\Delta}}$$

Seitenhalbierende



Seitenhalbierende

$$s_A \quad : \qquad z = \frac{B+C}{2} + s\left(\frac{B+C}{2} - A\right)$$

$$2z = B+C + s\left(B+C - 2A\right)$$

$$\frac{2z - B+C}{B+C - 2A} = s$$

$$\frac{2z - \left(B+C\right)}{B+C - 2A} = \frac{2\overline{z} - \left(\overline{B}+\overline{C}\right)}{\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}}$$

$$2\left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)z - \left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)\left(B+C\right) = 2\left(B+C - 2A\right)\overline{z} - \left(B+C - 2A\right)\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$$

$$2\left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)z - 2\left(B+C - 2A\right)\overline{z} = \left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)\left(B+C\right) - \left(B+C - 2A\right)\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$$

$$2\left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)z - 2\left(B+C - 2A\right)\overline{z} = 2\left(\overline{B}+\overline{C}\right)A - 2\left(B+C\right)\overline{A}$$

$$\left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)z - \left(B+C - 2A\right)\overline{z} = \left(\overline{B}+\overline{C}\right)A - \left(B+C\right)\overline{A}$$

$$\left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)z - \left(B+C - 2A\right)\overline{z} = \overline{B}A - B\overline{A} + \overline{C}A - C\overline{A}$$

Seitenhalbierende im Dreieck $\Delta\, ABC$

$$s_A \quad : \qquad \left(\overline{B}+\overline{C} - 2\overline{A}\right)z - \left(B+C - 2A\right)\overline{z} = \overline{B}A - B\overline{A} + \overline{C}A - C\overline{A}$$

$$s_B \quad : \qquad \left(\overline{C}+\overline{A} - 2\overline{B}\right)z - \left(C+A - 2B\right)\overline{z} = \overline{C}B - C\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$s_C \quad : \qquad \left(\overline{A}+\overline{B} - 2\overline{C}\right)z - \left(A+B - 2C\right)\overline{z} = \overline{A}C - A\overline{C} + \overline{B}C - B\overline{C}$$

Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

$$\left.\begin{array}{llll} s_A & : & (\bar{B}+\bar{C}-2\bar{A})z - (B+C-2A)\bar{z} = \bar{B}A - B\bar{A} + \bar{C}A - C\bar{A} & \Big|\ \cdot(C+A-2B) \\ s_B & : & (\bar{C}+\bar{A}-2\bar{B})z - (C+A-2B)\bar{z} = \bar{C}B - C\bar{B} + \bar{A}B - A\bar{B} & \Big|\ \cdot(B+C-2A) \end{array}\right] -$$

$$z = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Zähler :

$$(\bar{B}A - B\bar{A} + \bar{C}A - C\bar{A})(C+A-2B) - (B+C-2A)(\bar{C}B - C\bar{B} + \bar{A}B - A\bar{B})$$

$$\begin{aligned} = \ & A\bar{B}C - \bar{A}BC + AC\bar{C} - \bar{A}C^2 \\ & A^2\bar{B} - A\bar{A}B + A^2\bar{C} - A\bar{A}C \\ & -2AB\bar{B} + 2\bar{A}B^2 - 2AB\bar{C} + 2\bar{A}BC \\ - & \left[\begin{array}{l} B^2\bar{C} - B\bar{B}C + \bar{A}B^2 - AB\bar{B} \\ BC\bar{C} - B\bar{B}C + \bar{A}B^2 - AB\bar{B} \\ -2ABC\bar{C} + 2A\bar{B}C - 2A\bar{A}B + 2A^2\bar{B} \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \ & \cancel{A\bar{B}C} - \cancel{\bar{A}BC} + AC\bar{C} - \bar{A}C^2 \\ & A^2\bar{B} - A\bar{A}B + A^2\bar{C} - A\bar{A}C \\ & -\cancel{2}AB\bar{B} + \cancel{2}\bar{A}B^2 - \cancel{2AB\bar{C}} + \cancel{2\bar{A}BC} \\ - & \left[\begin{array}{l} B^2\bar{C} - B\bar{B}C + \cancel{\bar{A}B^2} - \cancel{AB\bar{B}} \\ BC\bar{C} - \bar{B}C^2 + \cancel{\bar{A}BC} - \cancel{A\bar{B}C} \\ -\cancel{2AB\bar{C}} + \cancel{2A\bar{B}C} - 2A\bar{A}B + 2A^2\bar{B} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Die Terme mit 3 Variablen verschwinden !

$$\begin{aligned} = \ & A\bar{A}B - A^2\bar{B} + A^2\bar{C} - A\bar{A}C \\ + \ & B\bar{B}C - B^2\bar{C} + \bar{A}B^2 - AB\bar{B} \\ + \ & C\bar{C}A - \bar{A}C^2 + \bar{B}C^2 - BC\bar{C} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & A[\bar{A}B - A\bar{B} \qquad\qquad\qquad\qquad + \bar{C}A - C\bar{A}] \\
+ \quad & B[\bar{A}B - A\bar{B} + \bar{B}C - B\bar{C}] \\
+ \quad & C[\qquad\qquad\quad + \bar{B}C - B\bar{C} + \bar{C}A - C\bar{A}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & A[\bar{A}B - A\bar{B} + \underline{\bar{B}C - B\bar{C}} + \bar{C}A - C\bar{A}] \\
+ \quad & B[\bar{A}B - A\bar{B} + \bar{B}C - B\bar{C} + \underline{\bar{C}A - C\bar{A}}] \\
+ \quad & C[\underline{\bar{A}B - A\bar{B}} + \bar{B}C - B\bar{C} + \bar{C}A - C\bar{A}]
\end{aligned}
$$

Die hinzugefügten Terme ergeben zusammen Null, denn

$$[\underline{C\bar{A}B - CA\bar{B}} + \underline{A\bar{B}C - AB\bar{C}} + \underline{B\bar{C}A - BC\bar{A}}] = 0 \quad .$$

Also folgt für den **Zähler** weiter

$$= \underline{(A + B + C)[\bar{A}B - A\bar{B} + \bar{B}C - B\bar{C} + \bar{C}A - C\bar{A}]} \quad .$$

Nenner :

$$
\begin{aligned}
& (\bar{B}+\bar{C}-2\bar{A})(C+A-2B) - (B+C-2A)(\bar{C}+\bar{A}-2\bar{B}) \\
= \quad & \bar{B}C+A\bar{B}-2B\bar{B} + C\bar{C}+A\bar{C}-2B\bar{C} - 2\bar{A}C-2A\bar{A}+4\bar{A}B \\
- \quad & [\, B\bar{C}+B\bar{A}-2B\bar{B} + C\bar{C}+\bar{A}C-2\bar{B}C - 2A\bar{C}-2A\bar{A}+4A\bar{B}] \\
= \quad & 3\bar{B}C + 3A\bar{C} - 3B\bar{C} - 3\bar{A}C + 3\bar{A}B - 3A\bar{B} \\
= \quad & 3(\bar{A}B - A\bar{B}) + 3(\bar{B}C - B\bar{C}) + 3(\bar{C}A - C\bar{A}) \\
= \quad & \underline{3[\bar{A}B - A\bar{B} + \bar{B}C - B\bar{C} + \bar{C}A - C\bar{A}]}
\end{aligned}
$$

Also folgt für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ΔABC **:**

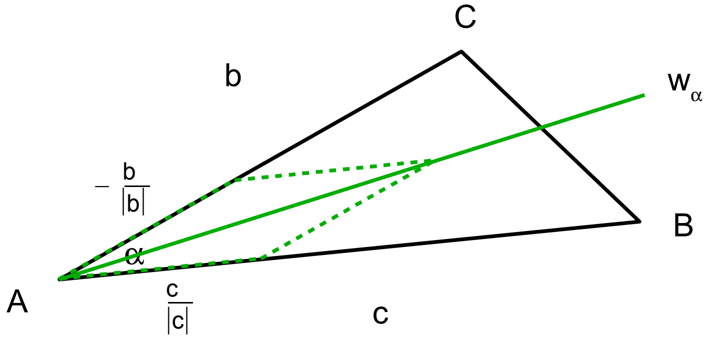
$$z = \frac{(A + B + C)[\bar{A}B - A\bar{B} + \bar{B}C - B\bar{C} + \bar{C}A - C\bar{A}]}{3[\bar{A}B - A\bar{B} + \bar{B}C - B\bar{C} + \bar{C}A - C\bar{A}]}$$

$$z = \frac{(A + B + C)}{3}$$

$$\boxed{S = \frac{(A + B + C)}{3}}$$

Gleichungen der Winkelhalbierenden im Dreieck

Die folgenden Überlegungen basieren auf der Tatsache, dass die Diagonalen in einer Raute die Winkelhalbierenden sind.



Die Seiten sind **zyklisch** orientiert, das heißt

$a = C - B \quad , \quad b = A - C \quad , \quad c = B - A$

Die **Richtung der Innenwinkelhalbierenden** w_α ist gegeben durch

$$\frac{c}{|c|} - \frac{b}{|b|} = \frac{|b|c - |c|b}{|c||b|} \quad .$$

Die **Gleichung der Innenwinkelhalbierenden** w_α ist dann

$$w_\alpha \quad : \quad \frac{|b|\bar{c} - |c|\bar{b}}{|b||c|}\, z - \frac{|b|c - |c|b}{|b||c|}\, \bar{z} = \frac{|b|\bar{c} - |c|\bar{b}}{|b||c|}\, A - \frac{|b|c - |c|b}{|b||c|}\, \bar{A}$$

$$w_\alpha \quad : \quad \left(|b|\bar{c} - |c|\bar{b}\right) z - \left(|b|c - |c|b\right) \bar{z} = \left(|b|\bar{c} - |c|\bar{b}\right) A - \left(|b|c - |c|b\right) \bar{A}$$

Zyklische Vertauschung liefert die **Gleichungen der Innenwinkelhalbierenden**

$$w_\alpha \quad : \quad \boxed{\left(|b|\bar{c} - |c|\bar{b}\right) z - \left(|b|c - |c|b\right) \bar{z} = \left(|b|\bar{c} - |c|\bar{b}\right) A - \left(|b|c - |c|b\right) \bar{A}}$$

$$w_\beta \quad : \quad \boxed{\left(|c|\bar{a} - |a|\bar{c}\right) z - \left(|c|a - |a|c\right) \bar{z} = \left(|c|\bar{a} - |a|\bar{c}\right) B - \left(|c|a - |a|c\right) \bar{B}}$$

$$w_\gamma \quad : \quad \boxed{\left(|a|\bar{b} - |b|\bar{a}\right) z - \left(|a|b - |b|a\right) \bar{z} = \left(|a|\bar{b} - |b|\bar{a}\right) C - \left(|a|b - |b|a\right) \bar{C}}$$

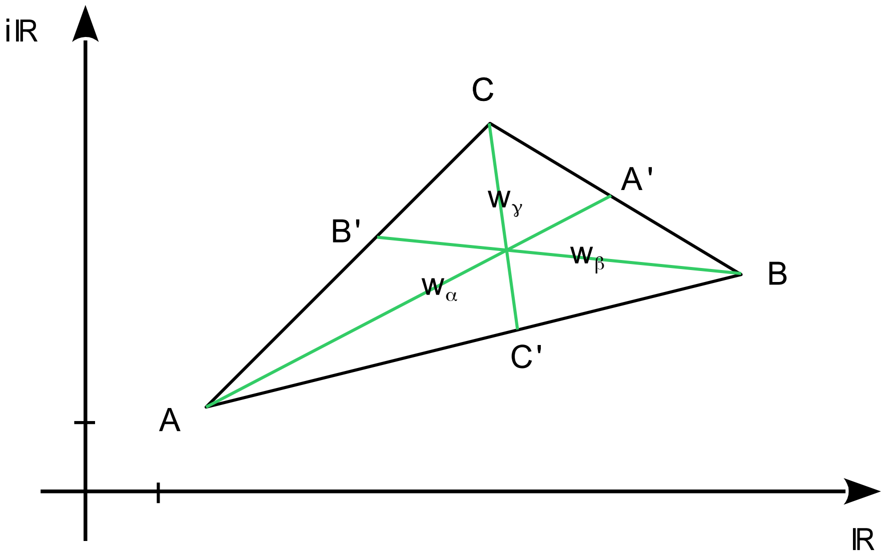
Die **Gleichungen der Außenwinkelhalbierenden** erhält man entsprechend zu

$$w_\alpha' \quad : \quad \boxed{\left(|b|\bar{c} + |c|\bar{b}\right) z - \left(|b|c + |c|b\right) \bar{z} = \left(|b|\bar{c} + |c|\bar{b}\right) A - \left(|b|c + |c|b\right) \bar{A}}$$

$$w_\beta' \quad : \quad \boxed{\left(|c|\bar{a} + |a|\bar{c}\right) z - \left(|c|a + |a|c\right) \bar{z} = \left(|c|\bar{a} + |a|\bar{c}\right) B - \left(|c|a + |a|c\right) \bar{B}}$$

$$w_\gamma' \quad : \quad \boxed{\left(|a|\bar{b} + |b|\bar{a}\right) z - \left(|a|b + |b|a\right) \bar{z} = \left(|a|\bar{b} + |b|\bar{a}\right) C - \left(|a|b + |b|a\right) \bar{C}}$$

Inkreismittelunkt und Inkreisradius im Dreieck

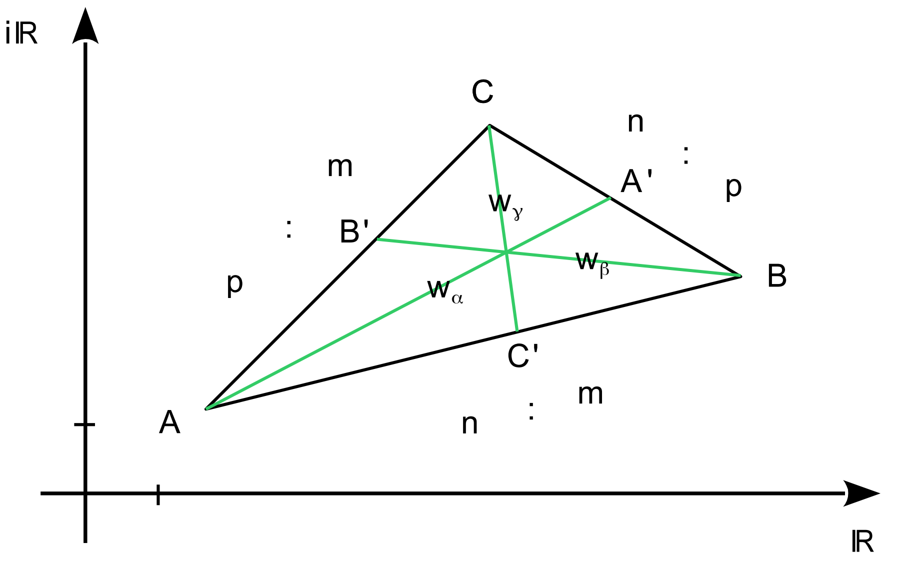


Zu bemerken ist zunächst folgender geometrischer Sachverhalt, den man mit Hilfe des **Sinussatzes** für Dreiecke leicht beweisen kann :

Im Dreieck ΔABC mit den Seiten $c = B-A$, $a = C-B$, $b = A-C$ teilen die Winkelhalbierenden w_γ , w_α , w_β die Gegenseiten in den Punkten C' , A' , B' im Verhältnis der anliegenden Seiten :

$$\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{|a|}{|b|} \quad , \quad \frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|c|}{|a|} \quad , \quad \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{|b|}{|c|}$$

Wählt man zur Bezeichnung der Seitenverhältnisse die Zahlen $\frac{|a|}{|b|} = \frac{m}{n}$, $\frac{|c|}{|a|} = \frac{p}{m}$, $\frac{|b|}{|c|} = \frac{n}{p}$ so würde sich folgendes „symmetrische“ Bild ergeben :



Speziell ist :

$$A' = B + \frac{p}{p+n}\cdot a$$

$$A'-A = B + \frac{p}{p+n}\cdot a - A$$

$$A'-A = B - A + \frac{p}{p+n}\cdot a$$

$$A'-A = c + \frac{p}{p+n}\cdot a$$

$$A'-A = \frac{pc + nc + pa}{p+n}$$

$A'-A = \dfrac{nc + p(c+a)}{p+n}$, wegen $c+a = B-A+C-B = C-A = -b$ folgt

$$A'-A = \frac{nc - pb}{n+p}$$

Analoge Betrachtungen für $B'-B$, $C'-C$ liefern (in zyklischer Vertauschung) also die drei Gleichungen für die Richtungen von w_α , w_β , w_γ

$$A'-A = \frac{nc - pb}{n+p}$$

$$B'-B = \frac{pa - mc}{p+m}$$

$$C'-C = \frac{mb - na}{m+n} \quad ,$$

mit $c = B-A$, $a = C-B$, $b = A-C$ auch in der Form

$$A'-A = \frac{n(B-A) - p(A-C)}{n+p}$$

$$B'-B = \frac{p(C-B) - m(B-A)}{p+m}$$

$$C'-C = \frac{m(A-C) - n(C-B)}{m+n} \quad .$$

Die Gleichung für die Winkelhalbierende w_α ist nun :

$$\left(\overline{A'-A}\right)z - \left(A'-A\right)\overline{z} = \left(\overline{A'-A}\right)A - \left(A'-A\right)\overline{A}$$

$$\frac{n(\overline{B}-\overline{A}) - p(\overline{A}-\overline{C})}{n+p}z - \frac{n(B-A) - p(A-C)}{n+p}\overline{z} = \frac{n(\overline{B}-\overline{A}) - p(\overline{A}-\overline{C})}{n+p}A - \frac{n(B-A) - p(A-C)}{n+p}\overline{A}$$

$$\left[n(\overline{B}-\overline{A}) - p(\overline{A}-\overline{C})\right]z - \left[n(B-A) - p(A-C)\right]\overline{z} = \left[n(\overline{B}-\overline{A}) - p(\overline{A}-\overline{C})\right]A - \left[n(B-A) - p(A-C)\right]\overline{A}$$

Die rechte Seite kann vereinfacht werden :

$$nA\bar{B} - \cancel{nA\bar{A}} - \cancel{pA\bar{A}} + pA\bar{C} - n\bar{A}B + \cancel{nA\bar{A}} + \cancel{pA\bar{A}} - p\bar{A}C$$

$$nA\bar{B} + pA\bar{C} - n\bar{A}B - p\bar{A}C$$

$$nA\bar{B} - n\bar{A}B + pA\bar{C} - p\bar{A}C$$

$$n\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right) + p\left(\bar{C}A - C\bar{A}\right)$$
$$n\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}C - A\bar{C}\right)$$

$$w_\alpha \quad : \quad \left[n\left(\bar{B}-\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}-\bar{C}\right)\right]z - \left[n\left(B-A\right) - p\left(A-C\right)\right]\bar{z} = n\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}C - A\bar{C}\right)$$

Mit zyklischer Vertauschung erhält man nun auch w_β , also insgesamt hat man die Gleichungen für die Winkelhalbieren w_α , w_β :

$$w_\alpha \quad : \quad \left[n\left(\bar{B}-\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}-\bar{C}\right)\right]z - \left[n\left(B-A\right) - p\left(A-C\right)\right]\bar{z} = n\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}C - A\bar{C}\right)$$

$$w_\beta \quad : \quad \left[p\left(\bar{C}-\bar{B}\right) - m\left(\bar{B}-\bar{A}\right)\right]z - \left[p\left(C-B\right) - m\left(B-A\right)\right]\bar{z} = p\left(\bar{C}B - C\bar{B}\right) - m\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right)$$

oder mit $c = B-A$, $a = C-B$, $b = A-C$ auch in der Form

$$w_\alpha \quad : \quad \left[n\bar{c} - p\bar{b}\right]z - \left[nc - pb\right]\bar{z} = n\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}C - A\bar{C}\right)$$

$$w_\beta \quad : \quad \left[p\bar{a} - m\bar{c}\right]z - \left[pa - mc\right]\bar{z} = p\left(\bar{C}B - C\bar{B}\right) - m\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right)$$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

$$z = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Nenner :

Zur Berechnung des Nenners nimmt man das Gleichungssystem in der Form

$$w_\alpha \quad : \quad \left[n\bar{c} - p\bar{b}\right]z - \left[nc - pb\right]\bar{z} = n\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right) - p\left(\bar{A}C - A\bar{C}\right)$$

$$w_\beta \quad : \quad \left[p\bar{a} - m\bar{c}\right]z - \left[pa - mc\right]\bar{z} = p\left(\bar{C}B - C\bar{B}\right) - m\left(\bar{B}A - B\bar{A}\right)$$

$$\left[n\bar{c} - p\bar{b}\right]\left[pa - mc\right] - \left[p\bar{a} - m\bar{c}\right]\left[nc - pb\right]$$

$$npa\bar{c} - \cancel{mnc\bar{c}} - p^2a\bar{b} + pm\bar{b}c - np\bar{a}c + p^2\bar{a}b + \cancel{mnc\bar{c}} - pmb\bar{c}$$

$$mp\left(\bar{b}c - b\bar{c}\right) + np\left(\bar{c}a - c\bar{a}\right) + p^2\left(\bar{a}b - a\bar{b}\right)$$

Wegen

$$\bar b c - b\bar c = (\bar A - \bar C)(B - A) - (A - C)(\bar B - \bar A)$$

$$\bar b c - b\bar c = \underline{\bar A B} - \cancel{A\bar A} - \underline{B\bar C} + \underline{A\bar C} - \underline{A\bar B} + \cancel{A\bar A} + \underline{\bar B C} - \underline{\bar A C}$$

$$\bar b c - b\bar c = A(\bar C - \bar B) + B(\bar A - \bar C) + C(\bar B - \bar a)$$

$$\bar b c - b\bar c = A\bar a + B\bar b + C\bar c$$

und analog durch zyklische Vertauschung

$$\bar c a - c\bar a = A\bar a + B\bar b + C\bar c$$

$$\bar a b - a\bar b = A\bar a + B\bar b + C\bar c$$

folgt für den Nenner weiter

$$mp(A\bar a + B\bar b + C\bar c) + np(A\bar a + B\bar b + C\bar c) + p^2(A\bar a + B\bar b + C\bar c)$$

Nenner = $\underline{(m+n+p)\ p\ (A\bar a + B\bar b + C\bar c)}$

Zähler :

Zur Berechnung des Zählers nimmt man am Besten das Gleichungssystem in der Form

$$w_\alpha \quad : \quad [n(\bar B - \bar A) - p(\bar A - \bar C)]z - [n(B - A) - p(A - C)]\bar z = n(\bar B A - B\bar A) - p(\bar A C - A\bar C)$$

$$w_\beta \quad : \quad [p(\bar C - \bar B) - m(\bar B - \bar A)]z - [p(C - B) - m(B - A)]\bar z = p(\bar C B - C\bar B) - m(\bar B A - B\bar A) \quad .$$

$$[n(\bar B A - B\bar A) - p(\bar A C - A\bar C)][p(C - B) - m(B - A)] - [p(\bar C B - C\bar B) - m(\bar B A - B\bar A)][n(B - A) - p(A - C)]$$

$$= \quad [n\bar B A - nB\bar A - p\bar A C + pA\bar C][pC - pB - mB + mA] - [p\bar C B - pC\bar B - m\bar B A + mB\bar A][nB - nA - pA + pC]$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \cancel{npA\bar B C} - \underline{np\bar A BC} - \underline{p^2\bar A C^2} + \underline{p^2 AC\bar C} \\
& - \underline{npAB\bar B} + \underline{np\bar A B^2} + \underline{p^2\bar A BC} - \cancel{p^2 AB\bar C} \\
& - \cancel{mnAB\bar B} + \cancel{mn\bar A B^2} + \cancel{pm\bar A BC} - \underline{pmAB\bar C} \\
& \cancel{mnA^2\bar B} - \cancel{mnA\bar A B} - \underline{pmA\bar A C} + \underline{pmA^2\bar C}
\end{aligned}$$

$$- \left[\begin{aligned}
& \underline{npB^2\bar C} - \underline{npB\bar B C} - \cancel{mnAB\bar B} + \cancel{mn\bar A B^2} \\
& - \underline{npAB\bar C} + \cancel{npA\bar B C} + \cancel{mnA^2\bar B} - \cancel{mnA\bar A B} \\
& \cancel{-p^2 AB\bar C} + \underline{p^2 A\bar B C} + \underline{pmA^2\bar B} - \underline{pmA\bar A B} \\
& \underline{p^2 BC\bar C} - \underline{p^2\bar B C^2} - \underline{pmA\bar B C} + \cancel{pm\bar A BC}
\end{aligned}\right]$$

$$= \quad pmA\left[-B\overline{C}-\overline{A}C+A\overline{C}-A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{B}C\right]$$

$$+ \quad npB\left[-\overline{A}C-A\overline{B}+\overline{A}B-B\overline{C}+\overline{B}C+A\overline{C}\right]$$

$$+ \quad p^2C\left[-\overline{A}C+A\overline{C}+\overline{A}B-A\overline{B}-B\overline{C}+\overline{B}C\right]$$

$$= \quad pmA\left[A\left(\overline{C}-\overline{B}\right)+B\left(\overline{A}-\overline{C}\right)+C\left(\overline{B}-\overline{A}\right)\right]$$

$$+ \quad npB\left[A\left(\overline{C}-\overline{B}\right)+B\left(\overline{A}-\overline{C}\right)+C\left(\overline{B}-\overline{A}\right)\right]$$

$$+ \quad p^2C\left[A\left(\overline{C}-\overline{B}\right)+B\left(\overline{A}-\overline{C}\right)+C\left(\overline{B}-\overline{A}\right)\right]$$

$$= \quad \left(mA+nB+pC\right)\ p\ \left[A\left(\overline{C}-\overline{B}\right)+B\left(\overline{A}-\overline{C}\right)+C\left(\overline{B}-\overline{A}\right)\right]$$

Zähler = $\underline{\left(mA+nB+pC\right)\ p\ \left(A\overline{a}\ +\ B\overline{b}\ +\ C\overline{c}\right)}$

Also ist der **Schnittpunkt der Winkelhalbierenden**

$$z \ = \ \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

$$z \ = \ \frac{\left(mA+nB+pC\right)\ p\ \left(A\overline{a}\ +\ B\overline{b}\ +\ C\overline{c}\right)}{\left(m+n+p\right)\ p\ \left(A\overline{a}\ +\ B\overline{b}\ +\ C\overline{c}\right)}$$

$$z \ = \ \frac{mA\ +\ nB\ +\ pC}{m\ +\ n\ +\ p}$$

Mit der Resubstitution der Verhältniszahlen $m = |a|$, $n = |b|$, $p = |c|$ ergibt sich

$$z \ = \ \frac{|a|A\ +\ |b|B\ +\ |c|C}{|a|\ +\ |b|\ +\ |c|}$$

$$\boxed{I \ = \ \frac{|a|A\ +\ |b|B\ +\ |c|C}{|a|\ +\ |b|\ +\ |c|}}$$

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der **Mittelpunkt des Inkreises** des Dreiecks $\Delta\, ABC$.

Berechnung des Inkreisradius ρ

Es ist $\boxed{A_\Delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{A}a + \bar{B}b + \bar{C}c}{2i}}$, also $2A_\Delta = -\frac{\bar{A}a + \bar{B}b + \bar{C}c}{2i}$

Andererseits ist

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|a|\rho + \frac{1}{2}|b|\rho + \frac{1}{2}|c|\rho$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left(|a|+|b|+|c|\right)\rho$$

$$\rho = \frac{2A_\Delta}{|a|+|b|+|c|} \quad ,$$

und es folgt

$$\boxed{\rho = -\frac{\bar{A}a + \bar{B}b + \bar{C}c}{2i\left(|a|+|b|+|c|\right)}}$$

Abstand der Berührpunkte T_a , T_b , T_c des Inkreises von den Ecken A , B , C

Setzt man den Wert des Inkreismittelpunktes $\frac{|a|A + |b|B + |c|C}{|a| + |b| + |c|}$ in die Lotfußpunktformel ein, so erhält man :

$$T_c = \frac{\bar{c}\left(\frac{|a|A + |b|B + |c|C}{|a| + |b| + |c|} + A\right) + c\left(\frac{|a|\bar{A} + |b|\bar{B} + |c|\bar{C}}{|a| + |b| + |c|} - \bar{A}\right)}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{\bar{c}\left(\frac{|a|A + |b|B + |c|C}{|a| + |b| + |c|} + A\right) + c\left(\frac{|a|\bar{A} + |b|\bar{B} + |c|\bar{C}}{|a| + |b| + |c|} - \bar{A}\right)}{2\bar{c}} - A$$

$$T_c - A = \frac{\bar{c}\left(\frac{|a|A + |b|B + |c|C}{|a| + |b| + |c|} + A\right) + c\left(\frac{|a|\bar{A} + |b|\bar{B} + |c|\bar{C}}{|a| + |b| + |c|} - \bar{A}\right) - 2\bar{c}A}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{\bar{c}\left(\frac{|a|A + |b|B + |c|C}{|a| + |b| + |c|} - A\right) + c\left(\frac{|a|\bar{A} + |b|\bar{B} + |c|\bar{C}}{|a| + |b| + |c|} - \bar{A}\right)}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{\bar{c}\left(\frac{|a|A + |b|B + |c|C - \left(\left(|a|+|b|+|c|\right)A\right)}{|a| + |b| + |c|}\right) + c\left(\frac{|a|\bar{A} + |b|\bar{B} + |c|\bar{C} - \left(\left(|a|+|b|+|c|\right)\bar{A}\right)}{|a| + |b| + |c|}\right)}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{\bar{c}\left(\frac{|b|(B-A) - |c|(A-C)}{|a| + |b| + |c|}\right) + c\left(\frac{|b|(\bar{B}-\bar{A}) - |c|(\bar{A}-\bar{C})}{|a| + |b| + |c|}\right)}{2\bar{c}}$$

Mit $B-A = c$, $C-A = -b$ folgt :

$$T_c - A = \frac{\bar{c}\left(\frac{|b|c - |c|b}{|a| + |b| + |c|}\right) + c\left(\frac{|b|\bar{c} - |c|\bar{b}}{|a| + |b| + |c|}\right)}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{\frac{|b|c\bar{c} - |c|b\bar{c}}{|a| + |b| + |c|} + \frac{|b|c\bar{c} - |c|\bar{b}c}{|a| + |b| + |c|}}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{\frac{|b||c|^2 - |c|b\bar{c}}{|a| + |b| + |c|} + \frac{|b||c|^2 - |c|\bar{b}c}{|a| + |b| + |c|}}{2\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{|b||c|^2 - |c|b\bar{c} + |b||c|^2 - |c|\bar{b}c}{2\left(|a| + |b| + |c|\right)\bar{c}}$$

$$T_c - A = \frac{2|b||c|^2 - |c|(b\bar{c} + \bar{b}c)}{2\left(|a| + |b| + |c|\right)\bar{c}} \quad , \quad \overline{T_c - A} = \frac{2|b||c|^2 - |c|(b\bar{c} + \bar{b}c)}{2\left(|a| + |b| + |c|\right)c}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{2|b||c|^2 - |c|\left(b\bar{c} + \bar{b}c\right)}{2\left(|a| + |b| + |c|\right)\bar{c}} \cdot \frac{2|b||c|^2 - |c|\left(b\bar{c} + \bar{b}c\right)}{2\left(|a| + |b| + |c|\right)c}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[2|b||c|^2 - |c|\left(b\bar{c} + \bar{b}c\right)\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2|c|^2}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{|c|^2\left[2|b||c| - \left(b\bar{c} + \bar{b}c\right)\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2|c|^2}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[2|b||c| - \left(b\bar{c} + \bar{b}c\right)\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2}$$

Nebenrechnung :

$$b\bar{c} + \bar{b}c = b\left(-\bar{a}-\bar{b}\right) + \left(-\bar{c}-\bar{a}\right)c$$

$$b\bar{c} + \bar{b}c = -b\bar{a} - |b|^2 - |c|^2 - \bar{a}c$$

$$b\bar{c} + \bar{b}c = -\bar{a}\left(b+c\right) - |b|^2 - |c|^2$$

$$b\bar{c} + \bar{b}c = -\bar{a}\left(-a\right) - |b|^2 - |c|^2$$

$$b\bar{c} + \bar{b}c = |a|^2 - |b|^2 - |c|^2$$

$$-\left(b\bar{c} + \bar{b}c\right) = -|a|^2 + |b|^2 + |c|^2$$

Es folgt :

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[2|b||c| - |a|^2 + |b|^2 + |c|^2\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[\left(|b| + |c|\right)^2 - |a|^2\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[|b| + |c| - |a|\right]^2\left[|b| + |c| + |a|\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[-|a| + |b| + |c|\right]^2\left[|a| + |b| + |c|\right]^2}{4\left(|a| + |b| + |c|\right)^2}$$

$$\left|T_c - A\right|^2 = \frac{\left[-|a| + |b| + |c|\right]^2}{4}$$

$$\left|T_c - A\right| = \frac{-|a| + |b| + |c|}{2}$$

$$\left|T_c - A\right| = \frac{|a| + |b| + |c| - 2|a|}{2}$$

$$\left|T_c - A\right| = \frac{|a| + |b| + |c|}{2} - |a|$$

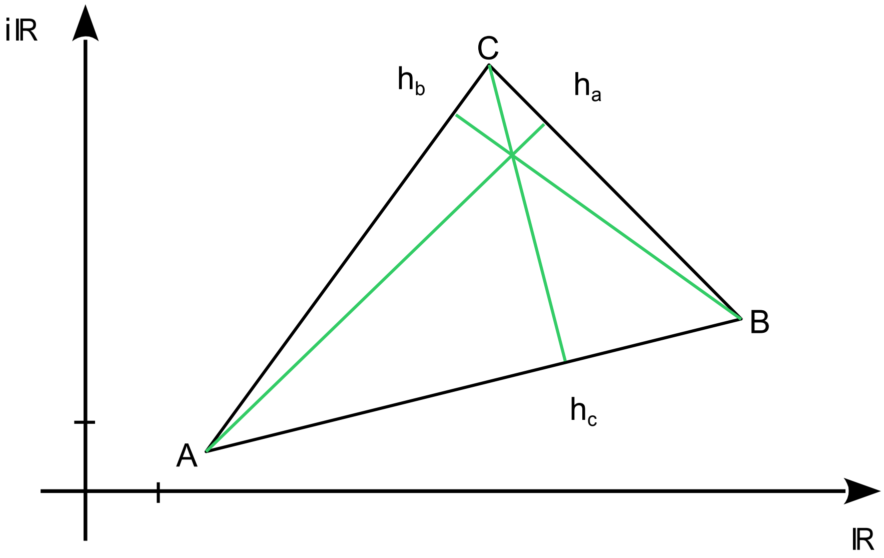
Die **Abstände der Berührpunkte** T_a , T_b , T_c **des Inkreises von den Ecken** A , B , C sind somit nach zyklischer Vertauschung

$$\boxed{|T_a - B| = \frac{|a| + |b| + |c|}{2} - |b|}$$

$$\boxed{|T_b - C| = \frac{|a| + |b| + |c|}{2} - |c|}$$

$$\boxed{|T_c - A| = \frac{|a| + |b| + |c|}{2} - |a|}$$

Höhenlinien



$$h_a \; : \quad z = A + si(C-B) \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z-A}{C-B} = si$$

$$\frac{z-A}{C-B} = -\frac{\overline{z}-\overline{A}}{\overline{C}-\overline{B}}$$

$$(\overline{C}-\overline{B})z + (C-B)\overline{z} = (\overline{C}-\overline{B})A + (C-B)\overline{A}$$

Schnittpunkt der Höhenlinien

$$h_a \; : \quad (\overline{C}-\overline{B})z + (C-B)\overline{z} = (\overline{C}-\overline{B})A + (C-B)\overline{A}$$

$$h_b \; : \quad (\overline{A}-\overline{C})z + (A-C)\overline{z} = (\overline{A}-\overline{C})B + (A-C)\overline{B}$$

$$z = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Nenner :

$$(\overline{C}-\overline{B})(A-C) - (\overline{A}-\overline{C})(C-B)$$

$$= A\overline{C}-C\overline{C}-A\overline{B}+\overline{B}C-\overline{A}C+\overline{A}B+C\overline{C}-B\overline{C}$$

$$= A\overline{C}-A\overline{B}+\overline{B}C-\overline{A}C+\overline{A}B-B\overline{C}$$

$$= A(\overline{C}-\overline{B})+B(\overline{A}-\overline{C})+C(\overline{B}-\overline{A})$$

$$= \underline{A\overline{a} + B\overline{b} + C\overline{c}}$$

Zähler :

$$\left(\left(\overline{C}-\overline{B}\right)A \;+\; \left(C-B\right)\overline{A}\right)\left(A-C\right) \;-\; \left(\left(\overline{A}-\overline{C}\right)B \;+\; \left(A-C\right)\overline{B}\right)\left(C-B\right)$$

$$= \quad \left(A\overline{C}-A\overline{B}+\overline{A}C-\overline{A}B\right)\left(A-C\right) \;-\; \left(\overline{A}B-B\overline{C}+A\overline{B}-\overline{B}C\right)\left(C-B\right)$$

$$= \quad A^2\overline{C}-A^2\overline{B}+A\overline{A}C-A\overline{A}B-AC\overline{C}+\cancel{A\overline{B}C}-\overline{A}C^2+\cancel{\overline{A}BC}$$

$$- \quad \left[\cancel{\overline{A}BC}-BC\overline{C}+\cancel{A\overline{B}C}-\overline{B}C^2-\overline{A}B^2+B^2\overline{C}-AB\overline{B}+B\overline{B}C\right]$$

$$= \quad A^2\overline{C}-A^2\overline{B}+A\overline{A}C-A\overline{A}B-AC\overline{C}-\overline{A}C^2$$

$$- \quad \left[-BC\overline{C}-\overline{B}C^2-\overline{A}B^2+B^2\overline{C}-AB\overline{B}+B\overline{B}C\right]$$

$$= \quad \underline{A^2\overline{C}}-\underline{A^2\overline{B}}+\underline{A\overline{A}C}-\underline{A\overline{A}B}-\underline{AC\overline{C}}-\underline{\overline{A}C^2}+\underline{BC\overline{C}}+\underline{\overline{B}C^2}+\underline{\overline{A}B^2}-\underline{B^2\overline{C}}+\underline{AB\overline{B}}-\underline{B\overline{B}C}$$

$$= \quad A\left(\overline{A}\left(C-B\right)+A\left(\overline{C}-\overline{B}\right)\right) \;+\; B\left(\overline{B}\left(A-C\right)+B\left(\overline{A}-\overline{C}\right)\right) \;+\; C\left(\overline{C}\left(B-A\right)+C\left(\overline{B}-\overline{A}\right)\right)$$

$$= \quad \underline{A\left(\overline{A}a+A\overline{a}\right) \;+\; B\left(\overline{B}b+B\overline{b}\right) \;+\; C\left(\overline{C}c+C\overline{c}\right)}$$

Also ist der **Schnittpunkt der Höhenlinien** gleich

$$z \;=\; \frac{A\left(\overline{A}a+A\overline{a}\right) \;+\; B\left(\overline{B}b+B\overline{b}\right) \;+\; C\left(\overline{C}c+C\overline{c}\right)}{A\overline{a} \;+\; B\overline{b} \;+\; C\overline{c}}$$

$$\boxed{H \;=\; \frac{A\left(\overline{A}a+A\overline{a}\right) \;+\; B\left(\overline{B}b+B\overline{b}\right) \;+\; C\left(\overline{C}c+C\overline{c}\right)}{A\overline{a} \;+\; B\overline{b} \;+\; C\overline{c}}}$$

Der Fußpunkt A' **der Höhe** h_a **von** A **auf** $a=C-B$ **erhält man durch einsetzen in die die Lotfußpunktformel**

$$\boxed{F \;=\; \frac{\overline{a}\left(P+A\right) \;+\; a\left(\overline{P}-\overline{A}\right)}{2\overline{a}}} \;.$$

Mit $F \;=\; A'$, $P \;=\; A$, $A \;=\; B$, $a \;=\; C-B$ ergibt sich

$$A' \;=\; \frac{\left(\overline{C}-\overline{B}\right)\left(A+B\right) \;+\; \left(C-B\right)\left(\overline{A}-\overline{B}\right)}{2\left(\overline{C}-\overline{B}\right)}$$

$$A' \;=\; \frac{A\overline{C}-B\overline{C}-A\overline{B}-B\overline{B}-\overline{A}C+\overline{B}C+\overline{A}B-B\overline{B}}{2\left(\overline{C}-\overline{B}\right)}$$

$$A' \;=\; \frac{A\overline{C}-B\overline{C}-A\overline{B}-\overline{A}C+\overline{B}C+\overline{A}B}{2\left(\overline{C}-\overline{B}\right)}$$

$$A' \;=\; \frac{A\left(\overline{C}-\overline{B}\right) \;+\; B\left(\overline{A}-\overline{C}\right) \;+\; C\left(\overline{B}-\overline{A}\right)}{2\left(\overline{C}-\overline{B}\right)}$$

$$A' \;=\; \frac{A\overline{a} \;+\; B\overline{b} \;+\; C\overline{c}}{2\overline{a}}$$

Zyklische Vertauschung liefert die **Höhenfußpunkte** A' **,** B' **,** C' **im** ΔABC

$$\boxed{A' = \frac{A\overline{a} + B\overline{b} + C\overline{c}}{2\overline{a}}}$$

$$\boxed{B' = \frac{A\overline{a} + B\overline{b} + C\overline{c}}{2\overline{b}}}$$

$$\boxed{A' = \frac{A\overline{a} + B\overline{b} + C\overline{c}}{2\overline{c}}}$$

Die Lösungen der komplexen Gleichung $\omega^3 = 1$

Betrachtung mit Hilfe von Polarkoordinaten

Sei $\omega = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\omega^3 = 1$.

Dann folgt nacheinander unter Beachtung der **Formel von de Moivre** :

$$\omega^3 = 1$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos k\cdot 2\pi + i\sin k\cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos k\cdot 2\pi + i\sin k\cdot 2\pi$$

$$3\varphi = k \cdot 2\pi$$

$$\varphi = k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 1}$$

$$\varphi_1 = 1 \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$\varphi_1 = 1 \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = \cos 2\cdot\frac{2}{3}\pi + i\sin 2\cdot\frac{2}{3}\pi}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0,1,2$ wiederholen sich diese Werte .

Die Zahlen ω_0 , ω_1 , ω_2 liegen auf dem Einheitskreis mit Zentrum im Ursprung und bilden ein gleichseitiges Dreieck .

Es ist weiter nach der **Formel von de Moivre** :

$$\omega_2 = \cos 2\cdot\frac{2}{3}\pi + i\sin 2\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$\omega_2 = \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2$$

$$\boxed{\omega_2 = \omega_1^{\,2}}$$

Betrachtung mit Hilfe von Kartesischen Koordinaten

$$\omega^3 = 1$$

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\omega - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = 1} \quad \text{oder} \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\omega_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$$

$$\omega_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

$$\omega_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Es folgt :

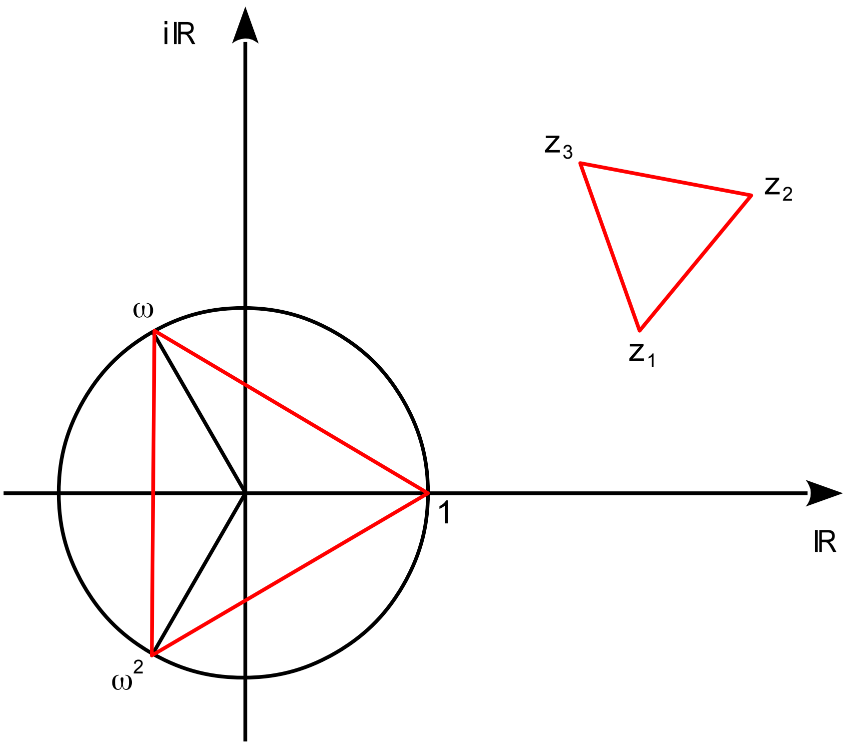
$$\boxed{\omega_2 = \overline{\omega_1}}$$

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0}$$

Anwendung des Satzes über gleichsinnig ähnliche Dreiecke auf gleichseitige Dreiecke und das Dreieck $\Delta 1 \omega \omega^2$ mit $\omega^3 = 1$.

Zur Vereinfachung seien die Wurzeln der Gleichung $\omega^3 = 1$ mit 1 , ω , ω^2 bezeichnet , wobei $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist.



Das Dreieck $\Delta z_1 z_2 z_3$ sei gleichseitig und damit ähnlich zum Dreieck $\Delta 1 \omega \omega^2$.
Dann gilt :

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\omega - 1}{\omega^2 - 1}$$

$$\omega^2(z_2 - z_1) - (z_2 - z_1) = \omega(z_3 - z_1) - (z_3 - z_1)$$

$$\omega^2(z_2 - z_1) - (z_2 - z_1) - \omega(z_3 - z_1) + (z_3 - z_1) = 0$$

$$\omega^2(z_2 - z_1) - z_2 + z_1 - \omega(z_3 - z_1) + z_3 - z_1 = 0$$

$$\omega^2(z_2 - z_1) - z_2 - \omega(z_3 - z_1) + z_3 = 0$$

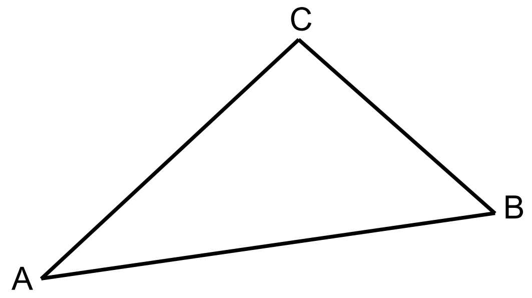
$$\omega^2(z_2 - z_1) - \omega(z_3 - z_1) + z_3 - z_2 = 0$$

$$\omega^2(z_2 - z_1) + \omega(z_1 - z_3) + 1(z_3 - z_2) = 0$$

$$\boxed{1(z_3 - z_2) + \omega(z_1 - z_3) + \omega^2(z_2 - z_1) = 0}$$

Der Fermat-Punkt

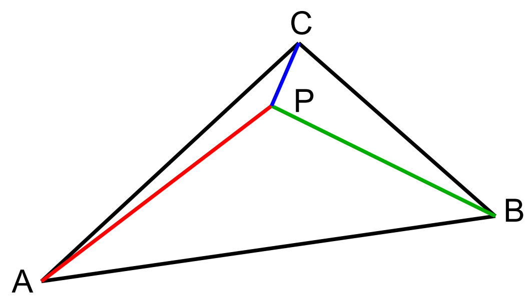
Gegeben sei ein Dreieck ΔABC dessen Innenwinkel alle kleiner als $120°$ sind.



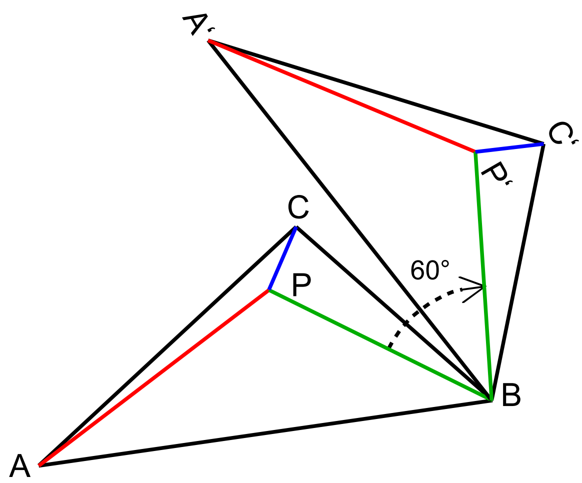
Gesucht ist ein Punkt P im Innern des Dreiecks, so dass die Summe der Entfernungen des Punktes zu den Ecken des Dreiecks minimal wird :

$|P-A| + |P-B| + |P-C|$ minimal !

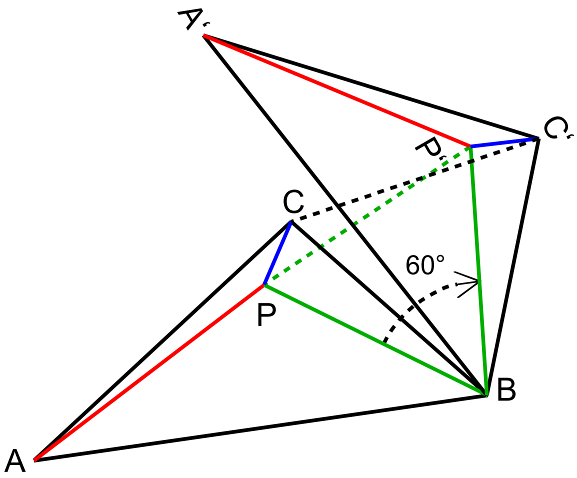
Man wählt zunächst im Innern des Dreiecks einen beliebigen Punkt P und verbindet ihn mit den Ecken A , B , C .



Dann dreht man die Figur $ABC;P$ um $60°$ um den Punkt B und erhält die Figur $A'BC';P'$.

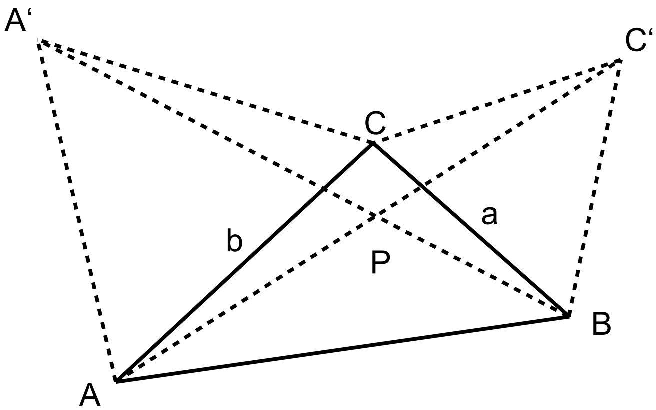


Ergänzt man die Figur durch die Verbindungslinien CC' , PP' , so ergeben sich die gleichseitigen Dreiecke $\Delta BPP'$, $\Delta BCC'$, und der Streckenzug $APP'C'$ hat die Länge $|P-A| + |P-B| + |P-C|$.

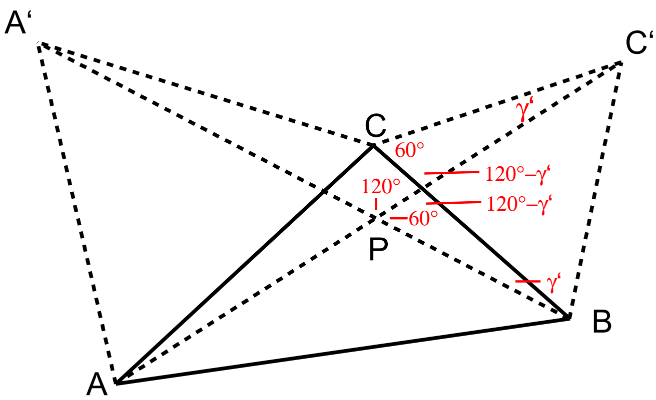


Die Länge des Streckenzuges wird minimal, wenn die Punkte P , P' auf der Strecke AC' liegen !

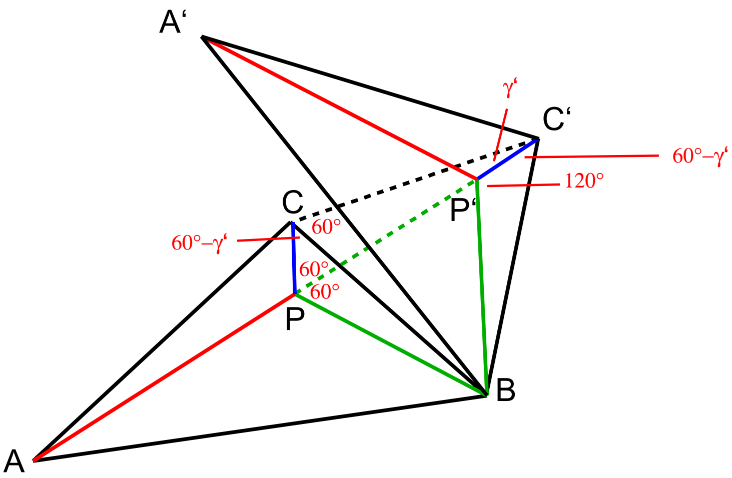
Die **Konstruktion des gesuchten Punktes** P **i**st also folgendermaßen :
Man errichtet über den Seiten a und b gleichseitige Dreiecke $\Delta BCC'$ und $\Delta CAA'$.
Der Schnittpunkte der Verbindungslinien AC' und BA' ergibt den Punkt P .



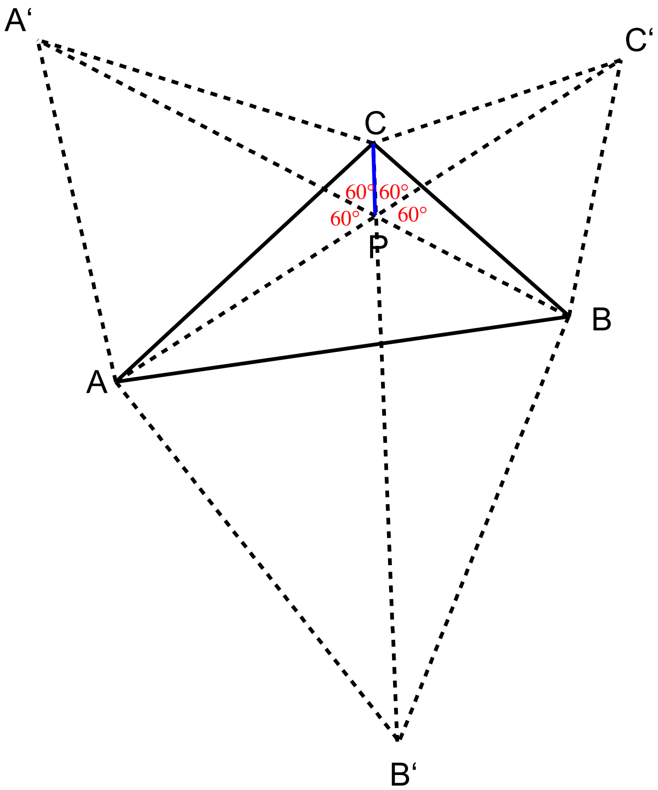
Nach dem Kongruenzaxiom sws ist $\Delta BCC' \cong \Delta CAA'$, und die weitere Betrachtung ergibt, dass der Winkel zwischen den Richtungen AC' und BA' ein $120°$ - Winkel ist : $\boxed{\sphericalangle AC',BA' = 120°}$



Darüberhinaus sieht man , dass die Linie AC' den Winkel $<BPC$ in zwei $60°$ -Winkel zerlegt. Somit ist $\boxed{<BPC = 120°}$.
Entsprechendes ergibt sich für die Linie BA' und den Winkel $<CPA$, es ist $\boxed{<CPA = 120°}$



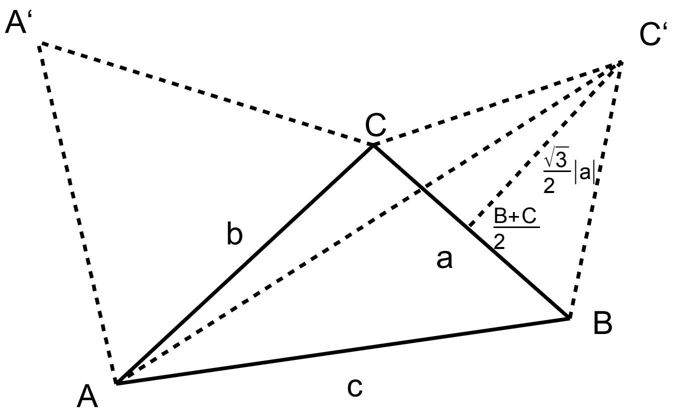
Zur Eindeutigkeit der Konstruktion müsste man jetzt noch zeigen, dass P auf der Verbindungslinie CB' liegt, wobei das Dreieck $\Delta ABB'$ auf der Seite c errichtet und gleichseitig ist .



Man sieht, dass $\boxed{<CPB' = 60°+60°+60° = 180°}$ ist !

Der auf diese Weise konstruierte Punkt heißt **Fermat-Punkt**. Er wird mit F bezeichnet.

Berechnung des Fermat-Punktes



$$C' = \frac{B+C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}|a|\left(-\frac{a}{|a|}i\right)$$

$$C' = \frac{B+C}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = \frac{B+C}{2} - A - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = \frac{B+C-2A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = \frac{B-A+C-A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = \frac{c-b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = \frac{-b-a-b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = \frac{-2b-a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = -b - \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

$$C'-A = -b + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a$$

$$C'-A = -b + \overline{\omega}a$$

$$\boxed{C'-A = \overline{\omega}a - b}$$ **Richtung der Linie** AC'

Bemerkung : Die Zahlen 1 , $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^2 = \overline{\omega}$ sind die drei Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

Analog :

$$A'-B = \varpi b - c$$

$$A'-B = \varpi b + a + b$$

$$A'-B = a + (1+\varpi)b \qquad 1+\varpi = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1+\varpi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1+\varpi = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$1+\varpi = -\omega$$

$$A'-B = a - \omega b \qquad \omega\varpi = 1$$

$$A'-B = \omega\varpi a - \omega b$$

$$\boxed{A'-B = \omega(\varpi a - b)}$$ **Richtung der Linie** BA'

Gleichungen der Linien AC' , AC' **:**

$$AC' : \quad (\omega\bar{a}-\bar{b})z - (\varpi a-b)\bar{z} = (\omega\bar{a}-\bar{b})A - (\varpi a-b)\bar{A}$$

$$BA' : \quad \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})z - \omega(\varpi a-b)\bar{z} = \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})B - \omega(\varpi a-b)\bar{B}$$

Schnittpunkt der Linien AC' , AC' **:**

$$F := z = \frac{\begin{vmatrix} (\omega\bar{a}-\bar{b})A - (\varpi a-b)\bar{A} & -(\varpi a-b) \\ \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})B - \omega(\varpi a-b)\bar{B} & -\omega(\varpi a-b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega\bar{a}-\bar{b} & -(\varpi a-b) \\ \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b}) & -\omega(\varpi a-b) \end{vmatrix}}$$

$$F = \frac{\begin{vmatrix} (\omega\bar{a}-\bar{b})A & -\varpi a-b \\ \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})B & -\omega(\varpi a-b) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\varpi a-b)\bar{A} & -(\varpi a-b) \\ \omega(\varpi a-b)\bar{B} & -\omega(\varpi a-b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega\bar{a}-\bar{b} & -(\varpi a-b) \\ \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b}) & -\omega(\varpi a-b) \end{vmatrix}}$$

$$F = \frac{-\omega(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b)A + \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b)B + \omega(\varpi a-b)^2\bar{A} - \omega(\varpi a-b)^2\bar{B}}{-\omega(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b) + \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b)}$$

$$F = \frac{-\omega(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b)A + \varpi(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b)B + \omega(\varpi a-b)^2\bar{A} - \omega(\varpi a-b)^2\bar{B}}{-(\omega-\varpi)(\omega\bar{a}-\bar{b})(\varpi a-b)}$$

$$F = \frac{-\omega\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)A \; + \; \varpi\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)B \; + \; \omega\left(\varpi a-b\right)\bar{A} \; - \; \omega\left(\varpi a-b\right)\bar{B}}{-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)}$$

$$F = \frac{-\omega\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)A \; + \; \omega\left(\varpi a-b\right)\bar{A} \; + \; \varpi\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)B \; - \; \omega\left(\varpi a-b\right)\bar{B}}{-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)}$$

$$F = \frac{-\omega\left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)A \; - \; \left(\varpi a-b\right)\bar{A}\right] \; + \; \left[\varpi\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)B \; - \; \omega\left(\varpi a-b\right)\bar{B}\right]}{-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)}$$

$$F = \frac{-\omega\left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)A \; - \; \left(\varpi a-b\right)\bar{A}\right] \; + \; \left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)\varpi B \; - \; \left(\varpi a-b\right)\omega\bar{B}\right]}{-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)}$$

Jetzt kann man die Ausdrücke für Nenner und Zähler noch etwas „symmetrischer“ gestalten :

Nenner :

$$\begin{aligned}
-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right) &= -\left(\omega-\omega^2\right)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right) \\
-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right) &= \left(1-\omega^2\right)\bar{a} + \left(\omega-\omega^2\right)\bar{b} \\
-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right) &= 1\bar{a} - \omega^2\bar{a} + \omega\bar{b} - \omega^2\bar{b} \\
-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right) &= 1\bar{a} + \omega\bar{b} + \omega^2\left(-\bar{a}-\bar{b}\right) \\
\underline{-(\omega-\varpi)\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)} &\underline{= 1\bar{a} + \omega\bar{b} + \omega^2\bar{c}}
\end{aligned}$$

Zähler :

$$-\omega\left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)A \; - \; \left(\varpi a-b\right)\bar{A}\right] \; + \; \left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)\varpi B \; - \; \left(\varpi a-b\right)\omega\bar{B}\right]$$

$$= \; -\omega\left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)A \; - \; \left(\varpi a-b\right)\bar{A}\right] \; + \; \left[\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)\varpi B \; - \; \left(\varpi a-b\right)\omega\bar{B}\right]$$

$$= \; \left[\underbrace{-\omega\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)}_{=:\mathrm{I}}A \; + \; \underbrace{\omega\left(\varpi a-b\right)}_{=:\mathrm{II}}\bar{A}\right] \; + \; \left[\underbrace{\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)\varpi}_{=:\mathrm{III}}B \; - \; \underbrace{\left(\varpi a-b\right)\omega}_{=:\mathrm{IV}}\bar{B}\right]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= -\omega\left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right) \\
\mathrm{I} &= -\omega\left(\omega\left(\bar{C}-\bar{B}\right)-\left(\bar{A}-\bar{C}\right)\right) \\
\mathrm{I} &= \omega^2\bar{C}-\omega^2\bar{B}-\bar{A}+\bar{C} \\
\mathrm{I} &= -\omega^2\bar{C}+\omega^2\bar{B}+\omega\bar{A}-\omega\bar{C} \\
\mathrm{I} &= \omega\bar{A}+\omega^2\bar{B}+\left(-\omega^2-\omega\right)\bar{C} && -\omega^2-\omega = 1 \\
\underline{\mathrm{I}} &\underline{= \omega\bar{A}+\omega^2\bar{B}+\bar{C}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \omega\left(\varpi a-b\right) \\
\mathrm{II} &= \omega\left(\varpi\left(C-B\right)-\left(A-C\right)\right) \\
\mathrm{II} &= C-B-\omega A+\omega C \\
\mathrm{II} &= -\omega A-B+\left(1+\omega\right)C \\
\underline{\mathrm{II}} &\underline{= -\omega A-B-\omega^2C}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{III} = \left(\omega\bar{a}-\bar{b}\right)\varpi$$

$$\mathrm{III} = \left(\omega\left(\overline{C}-\overline{B}\right)-\left(\overline{A}-\overline{C}\right)\right)\varpi$$
$$\mathrm{III} = -\varpi\overline{A}-\overline{B}-\overline{C}+\varpi\overline{C}$$
$$\mathrm{III} = -\varpi\overline{A}-\overline{B}-\left(1+\varpi\right)\overline{C} \qquad 1+\varpi = 1+\omega^2 = -\omega$$
$$\mathrm{III} = -\varpi\overline{A}-\overline{B}-\omega\overline{C} \qquad -\varpi = -\omega^2$$
$$\underline{\mathrm{III} = -\omega^2\overline{A}-\overline{B}-\omega\overline{C}}$$

$$\mathrm{IV} = -\left(\varpi a-b\right)\omega$$
$$\mathrm{IV} = -\left(\varpi\left(C-B\right)-\left(A-C\right)\right)\omega$$
$$\mathrm{IV} = -C+B+\omega A-\omega C$$
$$\mathrm{IV} = \omega A+B+\left(-1-\omega\right)C \qquad -1-\omega = -\omega^2$$
$$\underline{\mathrm{IV} = \omega A+B+\omega^2 C}$$

Zähler :

$$= \mathrm{I}\cdot A + \mathrm{II}\cdot\overline{A} + \mathrm{III}\cdot B + \mathrm{IV}\cdot\overline{B}$$

$$= \left(\omega\overline{A}+\omega^2\overline{B}+\overline{C}\right)A + \left(-\omega A-B-\omega^2 C\right)\overline{A} + \left(-\omega^2\overline{A}-\overline{B}-\omega\overline{C}\right)B + \left(\omega A+B+\omega^2 C\right)\overline{B}$$

$$\begin{aligned}
= \;& \cancel{\omega A\overline{A}} + \underline{\omega^2 A\overline{B}} + \underline{A\overline{C}} \\
& \cancel{-\omega A\overline{A}} - \underline{\overline{A}B} + \underline{\omega^2\overline{A}C} \\
& \underline{-\omega^2\overline{A}B} \cancel{- B\overline{B}} - \underline{\omega B\overline{C}} \\
& \underline{\omega A\overline{B}} \cancel{+ B\overline{B}} + \underline{\omega^2\overline{B}C}
\end{aligned}$$

$$= \underline{\left(\omega+\omega^2\right)A\overline{B} + A\overline{C}} + \underline{\left(-1-\omega^2\right)\overline{A}B - \omega B\overline{C}} + \underline{\omega^2\overline{B}C-\omega^2\overline{A}C}$$

$$= -A\overline{B} + A\overline{C} + \omega\overline{A}B - \omega B\overline{C} + \omega^2\overline{B}C-\omega^2\overline{A}C$$

$$= \left(\overline{C}-\overline{B}\right)A + \omega\left(\overline{A}-\overline{C}\right)B + \omega^2\left(\overline{B}-\overline{A}\right)C$$

$$= \overline{a}A + \omega\overline{b}B + \omega^2\overline{c}C$$

$$= \underline{1\overline{a}A + \omega\overline{b}B + \omega^2\overline{c}C}$$

Damit folgt für den **Fermat-Punkt** :

$$\boxed{F = \frac{1\overline{a}A + \omega\overline{b}B + \omega^2\overline{c}C}{1\overline{a} + \omega\overline{b} + \omega^2\overline{c}}}$$

Schnittmengen Kreis - Gerade

Spezialfall : $K_{0;r_1}$, g

I $z\bar{z} = r_1^2$
II $\bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A}$

I nach $\bar{z}$ **:**

$$z\bar{z} = r_1^2$$
$$\bar{z} = \frac{r_1^2}{z}$$

$\bar{z}$ **in II :**

$$\bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A}$$
$$\bar{a}z - a\frac{r_1^2}{z} = \bar{a}A - a\bar{A}$$
$$\bar{a}z^2 - ar_1^2 = \left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)z$$
$$\bar{a}z^2 - \left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)z - ar_1^2 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{\bar{a}A - a\bar{A} \pm \sqrt{\left(-\left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)\right)^2 - 4\bar{a}\left(-ar_1^2\right)}}{2\bar{a}}$$

$$z_{1/2} = \frac{\bar{a}A - a\bar{A} \pm \sqrt{\left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)^2 + 4|a|^2 r_1^2}}{2\bar{a}}$$

Was bedeutet der Ausdruck $\bar{a}A - a\bar{A}$ **im Radikanden ?**

Betrachte die Abstandsformel eines Punktes P von der Geraden g mit $\bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A}$:

$$d(P,g)^2 = -\frac{\left(\bar{a}(P-A) - a(\bar{P}-\bar{A})\right)^2}{4|a|^2}$$

Setzt man $P = 0$, folgt

$$d(0,g)^2 = -\frac{\left(\bar{a}(0-A) - a(\bar{0}-\bar{A})\right)^2}{4|a|^2}$$
$$d(0,g)^2 = -\frac{\left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)^2}{4|a|^2}$$
$$\left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)^2 = -4|a|^2\, d(0,g)^2 \quad ,$$

und für den Radikanden R

$$R = \left(\bar{a}A - a\bar{A}\right)^2 + 4|a|^2 r_1^2 \quad ,$$
$$R = -4|a|^2\, d(0,g)^2 + 4|a|^2 r_1^2 \quad .$$

1. Fall : $R > 0$

$$-4|a|^2\ d(0,g)^2 + 4|a|^2 r_1^{\,2} > 0$$

$$d(0,g)^2 - r_1^{\,2} < 0$$

$$d(0,g)^2 < r_1^{\,2}$$

$\boxed{d(0,g) < r_1}$ **Es gibt zwei Schnittpunkte**

$$\boxed{z_{1/2} = \frac{\bar{a}A - a\bar{A} \pm \sqrt{(\bar{a}A - a\bar{A})^2 + 4|a|^2 r_1^{\,2}}}{2\bar{a}}}$$

2. Fall : $R = 0$

$$-4|a|^2\ d(0,g)^2 + 4|a|^2 r_1^{\,2} = 0$$

$$d(0,g)^2 - r_1^{\,2} = 0$$

$$d(0,g)^2 = r_1^{\,2}$$

$\boxed{d(0,g) = r_1}$ **Es gibt genau einen Berührpunkt**

$$\boxed{z = \frac{\bar{a}A - a\bar{A}}{2\bar{a}}}$$

3. Fall : $R < 0$

$$-4|a|^2\ d(0,g)^2 + 4|a|^2 r_1^{\,2} < 0$$

$$d(0,g)^2 - r_1^{\,2} > 0$$

$$d(0,g)^2 > r_1^{\,2}$$

$\boxed{d(0,g) > r_1}$ **Es gibt keinen Schnittpunkt**

Schnittmengen Kreis - Gerade

Allgemeiner Fall : $K_{M;r}$, g

$$\begin{array}{ll} \text{I} & (z-M)(\bar{z}-\bar{M}) = r^2 \\ \text{II} & \bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}A - a\bar{A} \end{array}$$

Substitution : $z' := z-M \quad \Leftrightarrow \quad z := z'+M$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & z'\overline{z'} = r^2 \\ \text{II} & \bar{a}(z'+M) - a(\overline{z'}+\bar{M}) = \bar{a}A - a\bar{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & z'\overline{z'} = r^2 \\ \text{II} & \bar{a}z' - a\overline{z'} = \bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M}) \end{array}$$

Substitution : $A' := A-M \quad \Leftrightarrow \quad A := A'+M$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & z'\overline{z'} = r^2 \\ \text{II} & \bar{a}z' - a\overline{z'} = \bar{a}A' - a\overline{A'} \end{array}$$

Es gibt genau zwei, eine oder keine Lösung entsprechend $R > 0$, $R = 0$ oder $R < 0$:

$$z'_{1/2} = \frac{\bar{a}A' - a\overline{A'} \pm \sqrt{(\bar{a}A' - a\overline{A'})^2 + 4|a|^2 r^2}}{2\bar{a}}$$

Die Resubstitution liefert nun für das originale Gleichungssystem entsprechend zwei, genau eine oder keine Lösung:

$$z_{1/2} - M = \frac{\bar{a}A' - a\overline{A'} \pm \sqrt{(\bar{a}A' - a\overline{A'})^2 + 4|a|^2 r^2}}{2\bar{a}}$$

$$z_{1/2} = M + \frac{\bar{a}A' - a\overline{A'} \pm \sqrt{(\bar{a}A' - a\overline{A'})^2 + 4|a|^2 r^2}}{2\bar{a}}$$

$$z_{1/2} = M + \frac{\bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M}) \pm \sqrt{(\bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M}))^2 + 4|a|^2 r^2}}{2\bar{a}}$$

Der Abstand des Mittelpunktes M von der Geraden g ist :

$$d(M,g)^2 = -\frac{\left(\bar{a}(M-A)-a(\bar{M}-\bar{A})\right)^2}{4|a|^2}$$
$$d(M,g)^2 = -\frac{\left(\bar{a}(A-M)-a(\bar{A}-\bar{M})\right)^2}{4|a|^2}$$
$$\left(\bar{a}(A-M)-a(\bar{A}-\bar{M})\right)^2 = -\ 4|a|^2\ d(M,g)^2$$

Damit folgt für den Radikanden :

$$R = \left(\bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M})\right)^2 + 4|a|^2 r^2$$
$$R = -\ 4|a|^2\ d(M,g)^2 + 4|a|^2 r^2$$

Es gibt drei Fälle zu unterscheiden :

1. Fall : $R > 0$

$$-4|a|^2\ d(M,g)^2 + 4|a|^2 r^2 > 0$$
$$d(M,g)^2 - r^2 < 0$$
$$d(M,g)^2 < r^2$$
$$\boxed{d(M,g) < r}$$ **Es gibt zwei Schnittpunkte**

$$\boxed{z_{1/2} = M + \frac{\bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M}) \pm \sqrt{\left(\bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M})\right)^2 + 4|a|^2 r^2}}{2\bar{a}}}$$

2. Fall : $R = 0$

$$-4|a|^2\ d(M,g)^2 + 4|a|^2 r^2 = 0$$
$$d(M,g)^2 - r^2 = 0$$
$$d(M,g)^2 = r^2$$
$$\boxed{d(M,g) = r}$$ **Es gibt genau einen Berührpunkt**

$$\boxed{z = M + \frac{\bar{a}(A-M) - a(\bar{A}-\bar{M})}{2\bar{a}}}$$

3. Fall : $R < 0$

$$-4|a|^2\ d(M,g)^2 + 4|a|^2 r^2 < 0$$
$$d(M,g)^2 - r^2 > 0$$
$$d(M,g)^2 > r^2$$
$$\boxed{d(M,g) > r}$$ **Es gibt keinen Schnittpunkt**

Schnittmenge zweier Kreise $K_{M;r}$, $K_{N;s}$

I $\quad (z-M)(\bar{z}-\bar{M}) = r^2 \qquad$ o. B. d. A. $\quad r > s$
II $\quad (z-N)(\bar{z}-\bar{N}) = s^2$

I $\quad z\bar{z} - \bar{M}z - M\bar{z} + |M|^2 = r^2$
II $\quad z\bar{z} - \bar{N}z - N\bar{z} + |N|^2 = s^2$

I-II : $\quad (\bar{N}-\bar{M})z + (N-M)\bar{z} + |M|^2 - |N|^2 = r^2 - s^2$

$$(\bar{N}-\bar{M})z + (N-M)\bar{z} = r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2$$

$$(\bar{N}-\bar{M})iz + (N-M)i\bar{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)$$

$$i = -\bar{i}$$

$$(\bar{N}-\bar{M})(-\bar{i})z + (N-M)i\bar{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)$$

$$(\bar{M}-\bar{N})\bar{i}z - (M-N)i\bar{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)$$

$$\boxed{\overline{(M-N)i}\,z - (M-N)i\bar{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)}$$

Chordale

Dies ist die Gleichung einer Geraden in **Richtung** $(M-N)i$ **, also orthogonal zur Geraden durch die Mittelpunkte** M **,** N **in Richtung** $M-N$.
Falls Kreisschnittpunkte existieren, läuft diese Gerade durch die Schnittpunkte .
Die Gerade heißt **Chordale** .
Die Gerade durch M **,** N **heißt Mediane .**

Berechnung des Schnittpunkts von Mediane und Chordale

$$m: \quad \overline{(M-N)}z - (M-N)\overline{z} = \overline{(M-N)}N - (M-N)\overline{N}$$

$$m: \quad (\overline{M}-\overline{N})z - (M-N)\overline{z} = (\overline{M}-\overline{N})N - (M-N)\overline{N}$$

$$m: \quad (\overline{M}-\overline{N})z - (M-N)\overline{z} = \overline{M}N - N\overline{N} - M\overline{N} + N\overline{N}$$

$$m: \quad (\overline{M}-\overline{N})z - (M-N)\overline{z} = \overline{M}N - M\overline{N}$$

$$c: \quad \overline{(M-N)\,i}\,z - (M-N)i\overline{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)$$

$$c: \quad (\overline{M}-\overline{N})\,\overline{i}\,z - (M-N)i\overline{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right) \qquad \Big| \;:i$$

$$c: \quad (\overline{M}-\overline{N})\frac{\overline{i}}{i}z - (M-N)\overline{z} = r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2$$

$$\frac{\overline{i}}{i} = -1$$

$$c: \quad -(\overline{M}-\overline{N})z - (M-N)\overline{z} = r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} m: & (\overline{M}-\overline{N})z - (M-N)\overline{z} = \overline{M}N - M\overline{N} \\ c: & -(\overline{M}-\overline{N})z - (M-N)\overline{z} = r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2 \end{array}\right] \; -$$

$$2(\overline{M}-\overline{N})z = \overline{M}N - M\overline{N} - \left(r^2 - s^2\right) - |N|^2 + |M|^2$$

$$2(\overline{M}-\overline{N})z = \overline{M}N - M\overline{N} - |N|^2 + |M|^2 - \left(r^2 - s^2\right)$$

$$2(\overline{M}-\overline{N})z = \overline{M}N - M\overline{N} - N\overline{N} + \overline{M}M - \left(r^2 - s^2\right)$$

$$2(\overline{M}-\overline{N})z = \overline{M}(M+N) - (M+N)\overline{N} - \left(r^2 - s^2\right)$$

$$2(\overline{M}-\overline{N})z = (M+N)(\overline{M}-\overline{N}) - \left(r^2 - s^2\right)$$

$$z = \frac{(M+N)(\overline{M}-\overline{N}) - \left(r^2 - s^2\right)}{2(\overline{M}-\overline{N})}$$

$$z = \frac{M+N}{2} - \frac{\left(r^2 - s^2\right)}{2(\overline{M}-\overline{N})}$$

$$z = \frac{M+N}{2} - \frac{(r^2 - s^2)(M-N)}{2|M-N|^2}$$

$$z = \frac{M+N}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}(M-N)$$

$$z = \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right) M + \left(\frac{1}{2} + \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right) N$$

$$\boxed{C = \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right) M + \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right)\right) N}$$

Schnittpunkt von Mediane und Chordale , Chordalpunkt

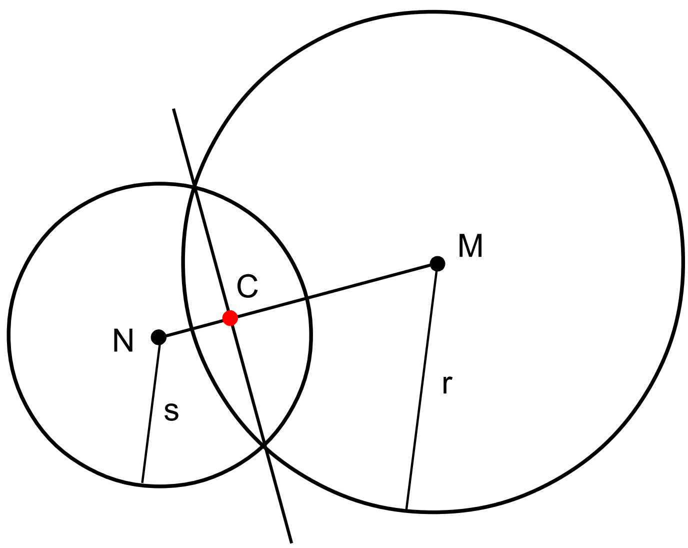
Für $r = s$ ist $C = \frac{M+N}{2}$ und liegt genau in der Mitte zwischen M und N .

Für $r > s$ ist $C = \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right) M + \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right)\right) N$

und liegt näher bei N als bei M , denn

$$C = \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right) M + \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right)\right) N ,$$

$$C = N + \left(\frac{1}{2} - \frac{(r^2 - s^2)}{2|M-N|^2}\right)(M-N) .$$



Berechnung der Kreisschnittpunkte

Es genügt, die Schnittpunkte von $K_{M;r}$ und c zu berechnen.

$$K_{M;r} \quad : \quad (z-M)(\bar{z}-\bar{M}) = r^2$$

$$c \quad : \quad \overline{(M-N)\,i}\, z - (M-N)i\bar{z} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)$$

Zur Vereinfachung setzt man zunächst :

$$a := (M-N)i \quad , \qquad ic := i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right)$$

Man erhält

$$K_{M;r} \quad : \quad (z-M)(\bar{z}-\bar{M}) = r^2$$

$$c \quad : \quad \bar{a}z - a\bar{z} = ic$$

$$c \quad : \quad \bar{a}(z-M) - a(\bar{z}-\bar{M}) = ic - a\bar{M} + \bar{a}M$$

$$K_{M;r} \quad : \quad \bar{z}-\bar{M} = \frac{r^2}{z-M}$$

$$c \quad : \quad \bar{a}(z-M) - a(\bar{z}-\bar{M}) = ic - a\bar{M} + \bar{a}M$$

$$\bar{a}(z-M) - \frac{ar^2}{z-M} = ic - a\bar{M} + \bar{a}M$$

$$\bar{a}(z-M)^2 - ar^2 = (ic - a\bar{M} + \bar{a}M)(z-M)$$

$$\bar{a}(z-M)^2 - (ic - a\bar{M} + \bar{a}M)(z-M) - ar^2 = 0$$

$$z-M = \frac{(ic - a\bar{M} + \bar{a}M) \pm \sqrt{(ic - a\bar{M} + \bar{a}M)^2 + 4|a|^2r^2}}{2\bar{a}}$$

$$z = M + \frac{(ic - a\bar{M} + \bar{a}M) \pm \sqrt{(ic - a\bar{M} + \bar{a}M)^2 + 4|a|^2r^2}}{2\bar{a}}$$

Nebenrechnungen / Resubstitution :

(1)

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right) - \bar{a}M + a\bar{M}$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2\right) - \overline{(M-N)i}M + (M-N)i\bar{M}$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2 - (\bar{M}-\bar{N})\frac{\bar{i}}{i}M + (M-N)\bar{M}\right)$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + |N|^2 - |M|^2 + (\bar{M}-\bar{N})M + (M-N)\bar{M}\right)$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + N\bar{N} - M\bar{M} + M\bar{M} - M\bar{N} + M\bar{M} - N\bar{M}\right)$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + N\bar{N} - M\bar{N} + M\bar{M} - N\bar{M}\right)$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 - (M-N)\bar{N} + (M - N)\bar{M}\right)$$

$$ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + (M-N)(\bar{M}-\bar{N})\right)$$

$$\underline{ic - \bar{a}M + a\bar{M} = i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right)}$$

(2)

$$\left(ic - \bar{a}M + a\bar{M}\right)^2 + 4|a|^2r^2 = i^2\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right)^2 + 4|M-N|^2r^2$$

$$\left(ic - \bar{a}M + a\bar{M}\right)^2 + 4|a|^2r^2 = -\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right)^2 + 4|M-N|^2r^2$$

$$\left(ic - \bar{a}M + a\bar{M}\right)^2 + 4|a|^2r^2 = -\left[\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right)^2 - 4|M-N|^2r^2\right]$$

$$\left(ic - \bar{a}M + a\bar{M}\right)^2 + 4|a|^2r^2 = -\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2+2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2-4|M-N|^2r^2\right]$$

$$\underline{\left(ic - \bar{a}M + a\bar{M}\right)^2 + 4|a|^2r^2 = -\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]}$$

Damit ergibt sich nun für Formel der Kreisschnittpunkte Folgendes :

$$z = M + \frac{(ic - a\overline{M} + \overline{a}M) \pm \sqrt{(ic - a\overline{M} + \overline{a}M)^2 + 4|a|^2 r^2}}{2\overline{a}}$$

$$\boxed{z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right) \pm \sqrt{-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]}}{2\overline{(M-N)i}}}$$

Formel für die Schnittpunkte der Kreise $K_{M;r}$ **,** $K_{N;s}$ **mit** $r>s$

Fallunterscheidungen :

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right) \pm \sqrt{-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]}}{2\overline{(M-N)i}}$$

Radikant $R := -\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]$

Fall 1 : $R = 0$

$$-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right] = 0$$

$$r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2 = 0$$

$$|M-N|^4 - 2r^2|M-N|^2 - 2s^2|M-N|^2 + r^4 + s^4 - 2r^2s^2 = 0$$

$$|M-N|^4 - 2\left(r^2+s^2\right)|M-N|^2 + \left(r^2 - s^2\right)^2 = 0$$

$$|M-N|^2 = \left(r^2+s^2\right) \pm \sqrt{\left(r^2 + s^2\right)^2 - \left(r^2 - s^2\right)^2}$$
$$|M-N|^2 = \left(r^2+s^2\right) \pm \sqrt{\left(r^2+s^2 + \left(r^2-s^2\right)\right)\left(r^2+s^2-\left(r^2-s^2\right)\right)}$$
$$|M-N|^2 = \left(r^2+s^2\right) \pm \sqrt{2r^2\cdot 2s^2}$$
$$|M-N|^2 = \left(r^2+s^2\right) \pm 2rs$$
$$|M-N|^2 = (r\pm s)^2$$

$|M-N| = r\pm s$ **Die Kreise haben einen Berührpunkt !**

Fall 1.1 : $\quad |M-N| = r+s$

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right) \pm \sqrt{-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]}}{2\overline{(M-N)i}}$$

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right)}{2\overline{(M-N)i}}$$

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + r^2 + 2rs + s^2\right)}{2\overline{(M-N)i}}$$

$$z = M + \frac{i\left(2r^2 + 2rs\right)}{2\left(\overline{M}-\overline{N}\right)\overline{i}}$$

$$z = M - \frac{r(r+s)}{\overline{M}-\overline{N}}$$

$$z = M - \frac{r|M-N|}{\overline{M}-\overline{N}}$$

$$z = M - \frac{r|M-N|(M-N)}{|M-N|^2}$$

$$z = M - \frac{r(M-N)}{|M-N|}$$

$$\boxed{z = M - r\,\frac{(M-N)}{|M-N|}}$$

Die Kreise berühren sich von außen !

Fall 1.2 : $\quad |M-N| = r-s$

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right) \pm \sqrt{-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]}}{2\overline{(M-N)i}}$$

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right)}{2\overline{(M-N)i}}$$

$$z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + r^2 - 2rs + s^2\right)}{2\overline{(M-N)i}}$$

$$z = M + \frac{i\left(2r^2 - 2rs\right)}{2\left(\overline{M}-\overline{N}\right)\overline{i}}$$

$$z = M - \frac{r(r-s)}{\overline{M}-\overline{N}}$$

$$z = M - \frac{r|M-N|}{\overline{M}-\overline{N}}$$

$$z = M - \frac{r|M-N|(M-N)}{|M-N|^2}$$

$$z = M - \frac{r(M-N)}{|M-N|}$$

$$\boxed{z = M - r\,\frac{(M-N)}{|M-N|}}$$

Der kleinere Kreis berührt den größeren von innen !

Fall 2 : $R > 0$

$$-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right] > 0$$

$$-\left[|M-N|^4 - 2r^2|M-N|^2 - 2s^2|M-N|^2 + r^4+s^4-2r^2s^2\right] > 0$$

$$-\left[|M-N|^4 - 2\left(r^2+s^2\right)|M-N|^2 + \left(r^2-s^2\right)\right] > 0$$

Die Nullstellen dieser Quadratischen Gleichung in $|M-N|^2$ sind

$|M-N|^2 = (r-s)^2$ oder $|M-N|^2 = (r+s)^2$, also

$|M-N| = r-s$ oder $|M-N| = r+s$.

Die Quadratische Ungleichung ist erfüllt, wenn

$(r-s)^2 < |M-N|^2 < (r+s)^2$, also wenn

$r-s < |M-N| < r+s$

In diesem Fall haben die Kreise also genau 2 Schnittpunkte :

$$\boxed{z = M + \frac{i\left(r^2 - s^2 + |M-N|^2\right) \pm \sqrt{-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right]}}{2\overline{(M-N)}i}}$$

Fall 3 : $R < 0$

$$-\left[r^4+s^4+|M-N|^4-2r^2s^2-2r^2|M-N|^2-2s^2|M-N|^2\right] < 0$$

$$-\left[|M-N|^4 - 2r^2|M-N|^2 - 2s^2|M-N|^2 + r^4+s^4-2r^2s^2\right] < 0$$

$$-\left[|M-N|^4 - 2\left(r^2+s^2\right)|M-N|^2 + \left(r^2-s^2\right)\right] < 0$$

Die Nullstellen dieser Quadratischen Gleichung in $|M-N|^2$ sind

$|M-N|^2 = (r-s)^2$ oder $|M-N|^2 = (r+s)^2$, also

$|M-N| = r-s$ oder $|M-N| = r+s$.

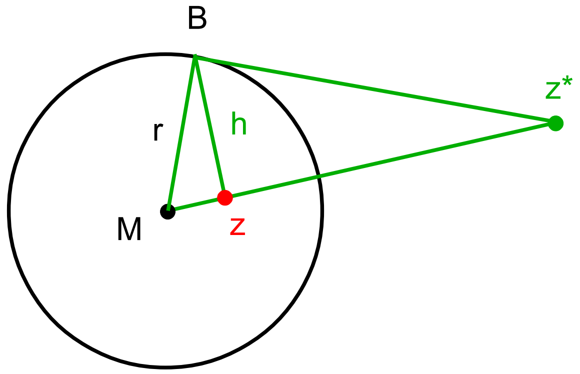
Die Quadratische Ungleichung hat keine Lösungen, wenn

$|M-N|^2 < (r-s)^2$ oder $|M-N|^2 > (r+s)^2$, also

$|M-N| < r-s$ oder $|M-N| > r+s$.

Spiegelung am Kreis

Gegeben sei der Kreis $K_{M;r}$ und ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ innerhalb des Kreises.



Zeichnet man auf der Geraden durch M und z in z das Lot $h = B - z$, $B \in K_{M;R}$ und in B die Tangente an den Kreis $K_{M;r}$, so schneiden sich die Gerade durch M und z und die Tangente durch B im Punkt z^*, und es folgt nach dem Kathetensatz

$$\begin{aligned}
|z-M||z^*-M| &= r^2 \\
|z-M|^2|z^*-M|^2 &= r^4 \\
(z-M)(\bar{z}-\bar{M})(z^*-M)(\overline{z^*}-\bar{M}) &= r^4
\end{aligned}$$

Mit $z^*-M = t(z-M)$, $\overline{z^*}-\bar{M} = t(\bar{z}-\bar{M})$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
(z-M)(\bar{z}-\bar{M})(z^*-M)(\overline{z^*}-\bar{M}) &= r^4 \\
(z-M)(\bar{z}-\bar{M})t(z-M)t(\bar{z}-\bar{M}) &= r^4 \\
t^2(z-M)^2(\bar{z}-\bar{M})^2 &= r^4 \\
t(z-M)(\bar{z}-\bar{M}) &= r^2
\end{aligned}$$

$$t = \frac{r^2}{(z-M)(\bar{z}-\bar{M})}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
z^*-M &= t(z-M) \\
z^* &= M + t(z-M) \\
z^* &= M + \frac{r^2}{(z-M)(\bar{z}-\bar{M})}(z-M)
\end{aligned}$$

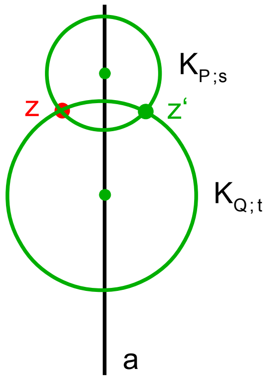
$$\boxed{z^* = M + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{M}}}$$

Diese Gleichung ist umkehrbar :

$$z^* = M + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{M}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z = M + \frac{r^2}{\overline{z^*}-\bar{M}}}$$

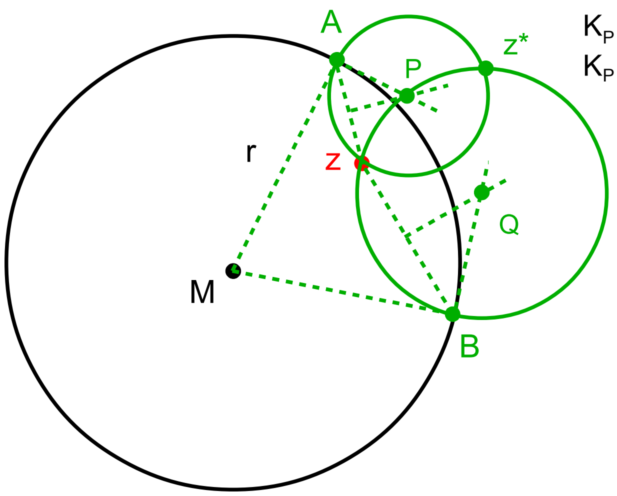
Spiegelung am Kreis [Alternative]

Achsenspiegelung (Konstruktion des Spiegelpunktes)



Sei $z \in \mathbb{C}$.
Wähle P , Q aus a .
Zeichne $K_{P;s}$ mit $z \in K_{P;s}$.
Zeichne $K_{Q;t}$ mit $z \in K_{Q;t}$.
z^* ist der zweite Schnittpunkt von $K_{P;s}$ mit $K_{Q;t}$.

Kreisspiegelung (Konstruktion des Spiegelpunktes)



$K_{P;s}$, $z, A \in K_{P;s}$
$K_{P;s}$ schneidet $K_{M;r}$ senkrecht in A

$K_{Q;t}$, $z, B \in K_{Q;t}$
$K_{Q;t}$ schneidet $K_{M;r}$ senkrecht in B

Wähle A , B aus $K_{M;r}$.
Konstruiere $K_{P;s}$ mit $z, A \in K_{P;s}$, so dass sich $K_{P;s}$ und $K_{M;r}$ senkrecht in A schneiden.
Konstruiere $K_{Q;t}$ mit $z, A \in K_{Q;t}$, so dass sich $K_{Q;t}$ und $K_{M;r}$ senkrecht in B schneiden.
Die Mittelpunkte der Kreise $K_{P;s}$, $K_{Q;t}$ ergeben sich jeweils als Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Strecken $z-A$, $z-B$ mit den Tangenten durch A , B .

Die Gerade g durch M und z schneidet die beiden Kreise $K_{P;s}$, $K_{Q;t}$ in z_A , z_B . Somit gilt :

$$g \cap K_{P;s} = \{z; z_A\} \quad , \quad g \cap K_{Q;t} = \{z; z_B\}$$

Nach dem **Sekanten-Tangentensatz** folgt :

$$|z-M|\cdot|z_A-M| = r^2 \quad , \quad |z-M|\cdot|z_B-M| = r^2$$

Damit ist $\quad z_A = z_B \quad$ und $\quad K_{P;s} \cap K_{Q;t} = \{z;z^*\}$

z^* ist der zweite Schnittpunkt von $K_{P;s}$ mit $K_{Q;t}$, und es gilt :

$$|z-M|\cdot|z^*-M| = r^2$$
$$|z-M|^2|z^*-M|^2 = r^4$$

.Mit $\quad z^*-M = v(z-M) \quad , \quad \overline{z^*}-\overline{M} = v(\overline{z}-\overline{M}) \quad , \quad v \in \mathbb{R}$ folgt weiter

$$(z-M)(\overline{z}-\overline{M})(z^*-M)(\overline{z^*}-\overline{M}) = r^4$$
$$(z-M)(\overline{z}-\overline{M})v(z-M)v(\overline{z}-\overline{M}) = r^4$$
$$v^2(z-M)^2(\overline{z}-\overline{M})^2 = r^4$$
$$v(z-M)(\overline{z}-\overline{M}) = r^2$$

$$v = \frac{r^2}{(z-M)(\overline{z}-\overline{M})}$$

und schließlich

$$z^*-M = v(z-M)$$
$$z^* = M + v(z-M)$$
$$z^* = M + \frac{r^2}{(z-M)(\overline{z}-\overline{M})}(z-M)$$

$$\boxed{z^* = M + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}}}$$

Diese Gleichung ist umkehrbar :

$$z^* = M + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z = M + \frac{r^2}{\overline{z^*}-\overline{M}}}$$

Definition der Spiegelung am Kreis

Die Abbildung, die jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{M\}$, $z \notin K_{M;r}$, die eindeutig bestimmte Zahl $z^* = M + \dfrac{r^2}{\overline{z} - \overline{M}}$, und die jedem $z \in K_{M;r}$ die Zahl z zuordnet, heißt **Spiegelung am Kreis** oder **Kreisspiegelung**.

$$I_{K_{M};r} \quad : \quad z \longmapsto z^* = M + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{M}}$$

Die **Kreisspiegelung** ist **involutorisch**, das heißt

$$I_{K_{M};r}\left(I_{K_{M};r}(z)\right) = I_{K_{M};r}(z^*) = z \quad .$$

Definiert man $I_{K_{M};r}(M) := \infty$, $I_{K_{M};r}(\infty) := M$, $\hat{C} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so ist die **Kreisspiegelung** eine **bijektive Abbildung** von $\hat{C}$ auf $\hat{C}$.

Spezialfall : Kreisspiegelung $I := I_{K_0;r}$ am Kreis $K_{0;r}$

$$I := I_{K_0;r} \quad : \quad z \longmapsto z^* = \frac{r^2}{\overline{z}}$$

Eigenschaften der Kreisspiegelung

(1) Die Kreisspiegelung $I_{K_M;r}$ setzt sich aus Translationen und der Kreisspiegelung $I_{K_0;r}$ zusammen .

$$z \xmapsto{T_{-M}} z-M \xmapsto{I_{K_0;r}} \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}} \xmapsto{T_M} M + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}}$$

$$I_{K_M;r} = T_M \circ I_{K_0;r} \circ T_{-M}$$

(2) Kreisspiegelung $I := I_{K_0;r}$ ist winkeltreu .

Seien $\gamma(t)$, $\delta(s)$ differenzierbare Kurven mit $\gamma(t_0) = \delta(s_0)$.
Dann ist der Schnittwinkel in $\gamma(t_0) = \delta(s_0)$ gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{\gamma'(t_0) \odot \delta'(s_0)}{|\gamma'(t_0)||\delta'(s_0)|} ,$$

und für den Schnittwinkel der Bildkurven $I \circ \gamma(t)$, $I \circ \delta(s)$ gilt

$$\cos\beta = \frac{(I\circ\gamma)'(t_0) \odot (I\circ\delta)'(s_0)}{|(I\circ\gamma)'(t_0)||(I\circ\delta)'(s_0)|}$$

Man muss zeigen, dass $\cos\beta = \cos\alpha$ ist !

Für die Ableitung der verketteten Funktionen gilt :

$$(I\circ\gamma)'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\dfrac{r^2}{\overline{\gamma(t)}} - \dfrac{r^2}{\overline{\gamma(t_0)}}}{t-t_0}$$

$$(I\circ\gamma)'(t_0) = \lim_{t\to t_0} -r^2 \frac{\dfrac{1}{\overline{\gamma(t_0)}} - \dfrac{1}{\overline{\gamma(t)}}}{t-t_0}$$

$$(I\circ\gamma)'(t_0) = \lim_{t\to t_0} -r^2 \frac{\overline{\gamma(t)}-\overline{\gamma(t_0)}}{\overline{\gamma(t_0)}\,\overline{\gamma(t)}\,(t-t_0)}$$

$$(I\circ\gamma)'(t_0) = \lim_{t\to t_0} -r^2 \frac{1}{\overline{\gamma(t_0)}\,\overline{\gamma(t)}} \frac{\overline{\gamma(t)}-\overline{\gamma(t_0)}}{t-t_0}$$

$$\left(I\circ\gamma\right)'\left(t_0\right) = -r^2 \; \frac{1}{\overline{\gamma\left(t_0\right)^2}} \; \overline{\gamma'\left(t_o\right)}$$

$$\left(I\circ\gamma\right)'\left(t_0\right) = \frac{-r^2}{\overline{\gamma\left(t_0\right)^2}} \; \overline{\gamma'\left(t_o\right)}$$

Analog :

$$\left(I\circ\delta\right)'\left(s_0\right) = \frac{-r^2}{\overline{\delta\left(s_0\right)^2}} \; \overline{\delta'\left(s_o\right)}$$

Damit folgt für den Winkel der Bildkurven

$$\cos\beta = \frac{\left(I\circ\gamma\right)'\left(t_0\right) \odot \left(I\circ\delta\right)'\left(s_0\right)}{\left|\left(I\circ\gamma\right)'\left(t_0\right)\right|\left|\left(I\circ\delta\right)'\left(s_0\right)\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{-r^2}{\overline{\gamma\left(t_0\right)^2}} \; \overline{\gamma'\left(t_o\right)} \;\odot\; \frac{-r^2}{\overline{\delta\left(s_0\right)^2}} \; \overline{\delta'\left(s_o\right)}}{\left|\frac{-r^2}{\overline{\gamma\left(t_0\right)^2}} \; \overline{\gamma'\left(t_o\right)}\right| \; \left|\frac{-r^2}{\overline{\delta\left(s_0\right)^2}} \; \overline{\delta'\left(s_o\right)}\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{r^4}{\overline{\gamma\left(t_0\right)^2}\,\overline{\delta\left(s_0\right)^2}} \; \left[\overline{\gamma'\left(t_o\right)} \;\odot\; \overline{\delta'\left(s_o\right)}\right]}{\frac{r^4}{\overline{\gamma\left(t_0\right)^2}\,\overline{\delta\left(s_0\right)^2}} \; \left[\left|\overline{\gamma'\left(t_o\right)}\right| \; \left|\overline{\delta'\left(s_o\right)}\right|\right]}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{\gamma'\left(t_o\right)} \;\odot\; \overline{\delta'\left(s_o\right)}}{\left|\overline{\gamma'\left(t_o\right)}\right| \; \left|\overline{\delta'\left(s_o\right)}\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{\gamma'\left(t_o\right) \;\odot\; \delta'\left(s_o\right)}{\left|\gamma'\left(t_o\right)\right| \; \left|\delta'\left(s_o\right)\right|}$$

$$\cos\beta = \cos\alpha$$

Die Inversion $I := I_{K_0;r}$ ist also winkeltreu .

(3) Da auch alle Translationen winkeltreu sind, sind nach (1) und (2) auch alle Kreisspiegelung $I_{K_M;r}$ winkeltreu .

Bilder von Kreisen und Geraden unter der Kreisspiegelung $I_{K_0;r}$

Gegeben seien die Inversion $I := I_{K_0;r}$ und eine Ursprungsgerade $u := \{\bar a z - a\bar z = 0\}$.

Zusammen mit den Gleichungen für die **Kreisspiegelung** $z^* = \frac{r^2}{\bar z}$, $z = \frac{r^2}{\overline{z^*}}$ folgt nacheinander :

$$\bar a z - a\bar z = 0$$

$$\bar a \frac{r^2}{\overline{z^*}} - a\frac{\overline{r^2}}{z^*} = 0$$

$$\frac{\bar a}{\overline{z^*}} - \frac{a}{z^*} = 0$$

$$\bar a z^* - a\overline{z^*} = 0$$

$$a\overline{z^*} - \bar a z^* = 0$$

Eine Ursprungsgerade wird durch die Kreisspiegelung auf sich selbst abgebildet : $I(u) = u$

Gegeben seien die **Kreisspiegelung** $I := I_{K_0;r}$ und eine Gerade $g := \{\bar a z - a\bar z = \bar a A - a\bar A\}$ durch den Punkt $A \neq 0$.

Es folgt nacheinander :

$$\bar a z - a\bar z = \bar a A - a\bar A$$

$$\bar a \frac{r^2}{\overline{z^*}} - a\frac{\overline{r^2}}{z^*} = \bar a A - a\bar A$$

$$\frac{\bar a}{\overline{z^*}} - \frac{a}{z^*} = \frac{\bar a A - a\bar A}{r^2}$$

$$\frac{\bar a}{\overline{z^*}} - \frac{a}{z^*} = iG \qquad , \qquad iG := \frac{\bar a A - a\bar A}{r^2}$$

$$\bar a z^* - a\overline{z^*} = iG\; z^*\overline{z^*}$$

$$iG\; z^*\overline{z^*} - \bar a z^* + a\overline{z^*} = 0$$

$$z^*\overline{z^*} - \frac{\bar{a}}{iG}z^* + \frac{a}{iG}\overline{z^*} = 0$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{a}}{\bar{i}\,G}z^* + \frac{a}{iG}\overline{z^*} = 0$$

$$z^*\overline{z^*} + \overline{\frac{a}{iG}}z^* + \frac{a}{iG}\overline{z^*} + \overline{\frac{a}{iG}}\,\frac{a}{iG} = \overline{\frac{a}{iG}}\,\frac{a}{iG}$$

$$\left(z^* + \frac{a}{iG}\right)\left(\overline{z^*} + \overline{\frac{a}{iG}}\right) = \left|\frac{a}{iG}\right|^2$$

$$\left(z^* - \frac{-a}{iG}\right)\left(\overline{z^*} - \overline{\frac{-a}{iG}}\right) = \left|\frac{a}{iG}\right|^2$$

Setze $N := \frac{-a}{iG} = \frac{-ar^2}{\bar{a}A - a\bar{A}}$, $s := \left|\frac{a}{iG}\right| = \left|\frac{ar^2}{\bar{a}A - a\bar{A}}\right|$.

Dann folgt die Gleichung eines Kreises durch den Ursprung :

$$(z^* - N)(\overline{z^*} - \bar{N}) = s^2$$

Für $z^* = 0$ folgt nämlich

$$\left(z^* - \frac{-a}{iG}\right)\left(\overline{z^*} - \overline{\frac{-a}{iG}}\right) = \left|\frac{a}{iG}\right|^2$$

$$\left(0 - \frac{-a}{iG}\right)\left(0 - \overline{\frac{-a}{iG}}\right) = \left|\frac{a}{iG}\right|^2$$

$$\frac{-a}{iG}\,\overline{\frac{-a}{iG}} = \left|\frac{a}{iG}\right|^2$$

$$\left|\frac{-a}{iG}\right|^2 = \left|\frac{a}{iG}\right|^2 \quad \text{wahre Aussage !}$$

Das Bild einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht, ist ein Kreis der durch den Ursprung geht : $I(g) = K_{N;s}$

Ebenso gilt die Umkehrung :

Das Bild eines Kreises, der durch den Ursprung geht, ist eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht : $I(K_{N;s}) = g$

Gegeben seien die **Kreisspiegelung** $I := I_{K_0;r}$ und ein Kreis $K_{L;\rho} := \{(z-L)(\bar{z}-\bar{L}) = \rho^2\}$, der den Ursprung **nicht** enthält.
Es muss dann gelten $L\bar{L} \neq \rho^2$

Es folgt nacheinander :

$$(z-L)(\bar{z}-\bar{L}) = \rho^2$$

$$z\bar{z} - \bar{L}z - L\bar{z} + L\bar{L} = \rho^2$$

$$\frac{r^2}{\overline{z^*}}\,\frac{r^2}{z^*} - \bar{L}\,\frac{r^2}{\overline{z^*}} - L\,\frac{r^2}{z^*} + L\bar{L} = \rho^2$$

$$r^4 - \bar{L}\,r^2\,z^* - L\,r^2\,\overline{z^*} + L\bar{L}\,z^*\overline{z^*} = \rho^2\,z^*\overline{z^*}$$

$$(\rho^2-L\bar{L})z^*\overline{z^*} + \bar{L}\,r^2\,z^* + L\,r^2\,\overline{z^*} = r^4$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{L}\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,z^* + \frac{L\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,\overline{z^*} = \frac{r^4}{(\rho^2-L\bar{L})}$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{L}\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,z^* + \frac{L\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,\overline{z^*} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2} = \frac{r^4}{(\rho^2-L\bar{L})} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2}$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{L}\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,z^* + \frac{L\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,\overline{z^*} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2} = \frac{r^4(\rho^2-L\bar{L})}{(\rho^2-L\bar{L})^2} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2}$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{L}\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,z^* + \frac{L\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,\overline{z^*} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2} = \frac{r^4(\rho^2-L\bar{L}) + L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2}$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{L}\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,z^* + \frac{L\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,\overline{z^*} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2} = \frac{r^4\rho^2}{(\rho^2-L\bar{L})^2}$$

$$z^*\overline{z^*} + \frac{\bar{L}\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,z^* + \frac{L\,r^2}{(\rho^2-L\bar{L})}\,\overline{z^*} + \frac{L\bar{L}\,r^4}{(\rho^2-L\bar{L})^2} = \left(\frac{r^2\rho}{\rho^2-L\bar{L}}\right)^2$$

$$\left(z^* - \frac{-Lr^2}{\rho^2-L\bar{L}}\right)\left(\overline{z^*} - \overline{\left(\frac{-Lr^2}{\rho^2-L\bar{L}}\right)}\right) = \left(\frac{r^2\rho}{\rho^2-L\bar{L}}\right)^2$$

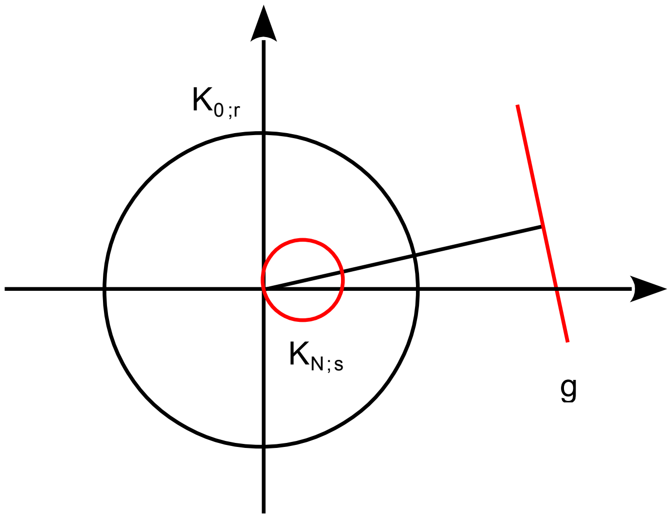
Setze $N := \dfrac{-Lr^2}{\rho^2-L\bar{L}}$, $\sigma := \dfrac{r^2\rho}{\rho^2-L\bar{L}}$.

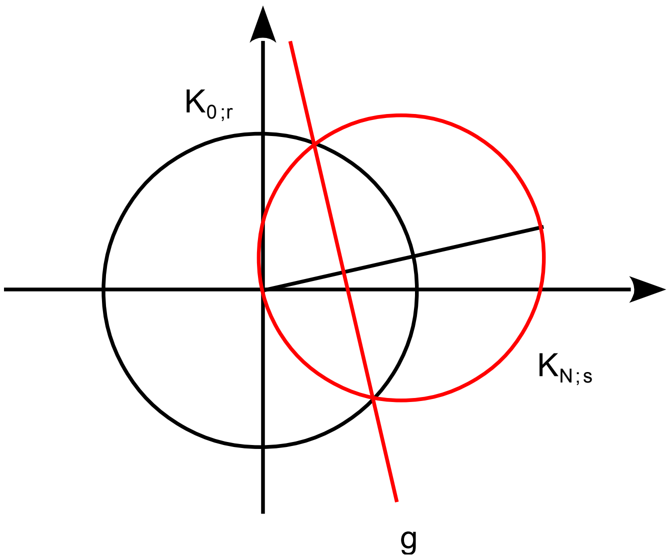
Dann folgt die Gleichung eines Kreises :

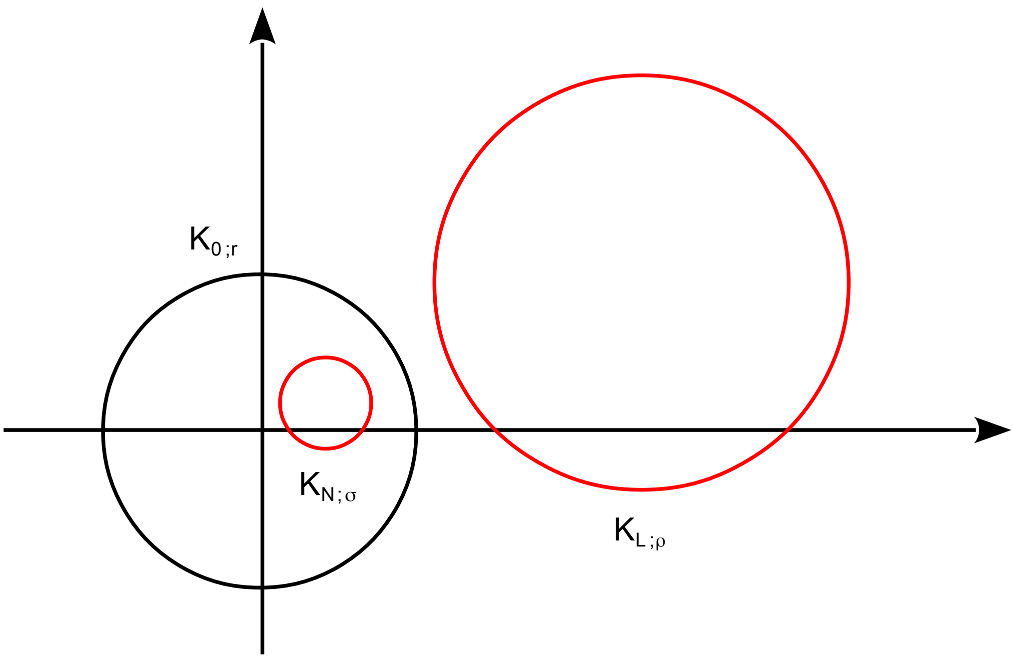
$$(z^* - N)(\overline{z^*} - \bar{N}) = \sigma^2$$

Das Bild eines Kreises, der nicht durch den Ursprung geht, ist ein Kreis : $I(K_{L;\rho}) = K_{N;\sigma}$

Einige Bilder und Kreisspiegelungsbilder







Ergebnis

Da jede **Kreisspiegelung** $I := I_{K_M;r}$ am Kreis als Verkettung von Translationen und der Inversion $I_{K_0;r}$ dargestellt werden kann,

$$I_{K_M;r} = T_M \circ I_{K_0;r} \circ T_{-M} \quad ,$$

und jede Translation Geraden in Geraden und Kreise in Kreise überführt, gilt :

$$\begin{array}{lll}
P \in K_{M;r} & \Rightarrow & I(P) = P \ , \ P \in K_{M;r} \\
g \ , \ M \in g & \Rightarrow & I(g) = g \ , \ M \in g \\
g \ , \ M \notin g & \Rightarrow & I(g) = K_{N;s} \ , \ M \in K_{N;s} \\
K_{L;\rho} \ , \ M \notin K_{L;\rho} & \Rightarrow & I(K_{L;\rho}) = K_{N;\sigma} \ , \ M \notin K_{N;\sigma}
\end{array}$$

Wegen $I \circ I = id$ gelten auch die Umkehrungen .

Die Verkettung zweier Kreisspiegelungen $I_{K_M;r}$ und $I_{K_N;s}$

$$I_{K_N;s} \circ I_{K_M;r} \quad : \quad z \xmapsto{I_{K_M;r}} M+\frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}} \xmapsto{I_{K_N;s}} \tilde{z} = N+\frac{s^2}{\overline{M+\frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}}}-\overline{N}}$$

$$\tilde{z} = N + \frac{s^2}{\overline{M + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{M}}} - \overline{N}}$$

$$\tilde{z} = N + \frac{s^2}{\overline{M} + \frac{r^2}{z-M} - \overline{N}}$$

$$\tilde{z} = N + \frac{s^2(z - M)}{(\overline{M} - \overline{N})(z - M) + r^2}$$

$$\tilde{z} = \frac{N(\overline{M} - \overline{N})(z - M) + Nr^2 + s^2(z - M)}{(\overline{M} - \overline{N})(z - M) + r^2}$$

$$\tilde{z} = \frac{N(\overline{M} - \overline{N} + s^2)(z - M) + Nr^2 - Ms^2}{(\overline{M} - \overline{N})(z - M) + r^2}$$

$$\tilde{z} = \frac{N(\overline{M} - \overline{N} + s^2)z \quad - \quad MN(\overline{M} - \overline{N}) + Nr^2 - Ms^2}{(\overline{M} - \overline{N})z \quad - \quad M(\overline{M} - \overline{N}) + r^2}$$

$$\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit

$a := N(\overline{M}-\overline{N} + s^2)$ $\qquad$ $b := -MN(\overline{M}-\overline{N}) + Nr^2 - Ms^2$

$c := \overline{M}-\overline{N}$ $\qquad$ $d := -M(\overline{M}-\overline{N}) + r^2$

Die Abbildung $\boxed{\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d}}$. $z \neq -\frac{d}{c}$ **heißt gebrochen-lineare Abbildung oder Möbius-Transformation .**

Es muss gelten : $ad-bc \neq 0$.
Wäre nämlich $ad-bc = 0$, also $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$, würde folgen, dass $a = kc$, $b = kd$ und $\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{kcz + kd}{cz + d} = k \frac{cz + d}{cz + d} = k$ konstant.

Eigenschaften der Möbius-Transformationen $\tilde{z} = \dfrac{az + b}{cz + d}$ **,** $ad - bc \neq 0$

(1) Die Abbildung

$$\tilde{z} = \frac{N\left(\overline{M} - \overline{N} + s^2\right)z - MN\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + Nr^2 - Ms^2}{\left(\overline{M} - \overline{N}\right)z - M\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + r^2} ,$$

als Verkettung $I_{K_N;s} \circ I_{K_M;r}$ **, ist eine Möbius-Transformation :**

Mit

$a := N\left(\overline{M} - \overline{N} + s^2\right)$ $\qquad b := -MN\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + Nr^2 - Ms^2$

$c := \overline{M} - \overline{N}$ $\qquad d := -M\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + r^2$

folgt :

$$\begin{aligned}
ad &= N\left(\overline{M} - \overline{N} + s^2\right)\left(-M\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + r^2\right) \\
ad &= -MN\left(\overline{M} - \overline{N}\right)^2 + Nr^2\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + Ms^2\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + r^2s^2 \\
bd &= \left(-MN\left(\overline{M} - \overline{N}\right) + Nr^2 - Ms^2\right)\left(\overline{M} - \overline{N}\right) \\
bd &= -MN\left(\overline{M} - \overline{N}\right)^2 + Nr^2\left(\overline{M} - \overline{N}\right) - Ms^2\left(\overline{M} - \overline{N}\right)
\end{aligned}$$

$$ad - bd = r^2s^2$$

und $ad - bd \neq 0$, da $r , s \neq 0$

(2) Möbius-Transformationen sind umkehrbar :

$$\boxed{\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d}} , \quad ad - bc \neq 0 , \quad z \neq -\frac{d}{c}$$

$$c\tilde{z}z + d\tilde{z} = az + b$$

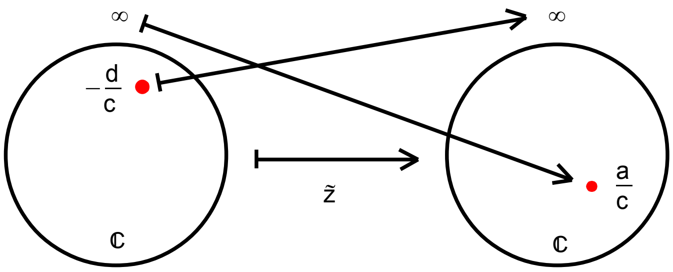
$$\left(c\tilde{z} - a\right)z = -d\tilde{z} + b$$

$$\left(c\tilde{z} - a\right)z = -d\tilde{z} + b$$

$$z = \frac{-d\tilde{z} + b}{c\tilde{z} - a}$$

$$\boxed{z = \frac{d\tilde{z} - b}{-c\tilde{z} + a}} , \quad da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0 , \quad \tilde{z} \neq \frac{a}{c} ,$$

(3) **Definiert man** $\tilde{z}\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$ **und** $\tilde{z}(\infty) := \lim\limits_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$ **, dann ist die Möbius-Transformation eine Bijektion von** $\hat{C}$ **auf** $\hat{C}$ **.**



(4) **Die Identität ist eine Möbius-Transformation :**

$$\tilde{z} = z$$

$$\tilde{z} = \frac{1z + 0}{0z + 1} \quad , \quad 1\cdot 1 \neq 0\cdot 0$$

(5) **Die Abbildung ist** $\tilde{z} = \frac{1}{z}$ **eine Möbius-Transformation :**

$$\tilde{z} = \frac{1}{z}$$

$$\tilde{z} = \frac{0z + 1}{1z + 0} \quad , \quad 0\cdot 0 \neq 1\cdot 1$$

(6) **Möbius-Transformationen als Verkettung**

$$\tilde{z} = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\tilde{z} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d}$$

$$\tilde{z} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad}{c} - b}{cz + d}$$

$$\tilde{z} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad - bc}{c}}{cz + d}$$

$$\tilde{z} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

$$z \overset{j}{\longmapsto} cz+d \overset{m}{\longmapsto} \frac{1}{cz+d} \overset{k}{\longmapsto} \tilde{z} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

Die Möbius-Transformation $\tilde{z} = M(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ **ist eine Verkettung einer linearen Funktion** j **mit der Möbius-Transformation** $m(z) = \dfrac{1}{z}$ **und einer linearen Funktion** k **:**

$$M = k \circ m \circ j$$

(7) Die Möbius-Trandformation $\tilde{z} = m(z) = \dfrac{1}{z}$ **ist winkeltreu .**

Seien $\gamma(t)$, $\delta(s)$ differenzierbare Kurven mit $\gamma(t_0) = \delta(s_0)$.
Dann ist der Schnittwinkel in $\gamma(t_0) = \delta(s_0)$ gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{\gamma'(t_0) \odot \delta'(s_0)}{|\gamma'(t_0)||\delta'(s_0)|} ,$$

und für den Schnittwinkel der Bildkurven $m \circ \gamma(t)$, $m \circ \delta(s)$ gilt

$$\cos\beta = \frac{(m \circ \gamma)'(t_0) \odot (m \circ \delta)'(s_0)}{|(m \circ \gamma)'(t_0)||(m \circ \delta)'(s_0)|}$$

Man muss zeigen, dass $\cos\beta = \cos\alpha$ ist !

Für die Ableitung der verketteten Funktionen gilt :

$$(m \circ \gamma)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\dfrac{1}{\gamma(t)} - \dfrac{1}{\gamma(t_0)}}{t - t_0}$$

$$(m \circ \gamma)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} - \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\gamma(t_0)\gamma(t)(t - t_0)}$$

$$(m \circ \gamma)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} - \frac{1}{\gamma(t_0)\gamma(t)} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

$$(m \circ \gamma)'(t_0) = -\frac{1}{\gamma(t_0)^2} \quad \gamma'(t_o)$$

$$(m \circ \gamma)'(t_0) = \frac{-1}{\gamma(t_0)^2} \quad \gamma'(t_o)$$

Analog :

$$(m \circ \delta)'(s_0) = \frac{-1}{\delta(s_0)^2} \quad \delta'(s_o)$$

Damit folgt für den Winkel der Bildkurven

$$\cos\beta = \frac{(m \circ \gamma)'(t_0) \odot (m \circ \delta)'(s_0)}{\left|(m \circ \gamma)'(t_0)\right| \left|(m \circ \delta)'(s_0)\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{-1}{\gamma(t_0)^2} \quad \gamma'(t_o) \quad \odot \quad \frac{-1}{\delta(s_0)^2} \quad \delta'(s_o)}{\left|\frac{-1}{\gamma(t_0)^2} \quad \gamma'(t_o)\right| \; \left|\frac{-1}{\delta(s_0)^2} \quad \delta'(s_o)\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{1}{\gamma(t_0)^2 \delta(s_0)^2} \quad \left[\gamma'(t_o) \quad \odot \quad \delta'(s_o)\right]}{\frac{1}{\gamma(t_0)^2 \delta(s_0)^2} \quad \left[\left|\gamma'(t_o)\right| \; \left|\delta'(s_o)\right|\right]}$$

$$\cos\beta = \frac{\gamma'(t_o) \quad \odot \quad \delta'(s_o)}{\left|\gamma'(t_o)\right| \; \left|\delta'(s_o)\right|}$$

$$\cos\beta = \cos\alpha$$

Die Möbiustransformation $\tilde{z} = m(z) = \frac{1}{z}$ ist also winkeltreu .

(8) Da lineare Funktionen winkeltreu sind, folgt mit (6), (7) , dass jede Möbius-Transformation winkeltreu ist .

(9) Bilder von Geraden und Kreisen unter der Möbius-Transformation

$$m(z) = \tilde{z} = \frac{1}{z}$$

Fall 1:

$$g : \quad \bar{a}z - a\bar{z} = iG \;, \quad iG \in i\mathbb{R}$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{\tilde{z}} \qquad , \qquad \bar{\tilde{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = \frac{1}{\bar{\tilde{z}}}$$

$$\bar{a}z - a\bar{z} = iG$$

$$\frac{\bar{a}}{\tilde{z}} - \frac{a\bar{z}}{\bar{\tilde{z}}} = iG$$

$$\bar{a}\,\bar{\tilde{z}} - a\tilde{z} = iG\tilde{z}\,\bar{\tilde{z}}$$

$$iG\tilde{z}\,\bar{\tilde{z}} + a\tilde{z} - \bar{a}\,\bar{\tilde{z}} = 0$$

1.1 : $G = 0$

$g \quad : \qquad \bar{a}z - a\bar{z} = 0$ **Ursprungsgerade in Richtung** a

$\Rightarrow \qquad a\tilde{z} - \bar{a}\,\bar{\tilde{z}} = 0$

$m(g) \quad : \qquad \bar{\bar{a}}\tilde{z} - \bar{a}\,\bar{\tilde{z}} = 0$ **Ursprungsgerade in Richtung** $\bar{a}$

1.2 : $G \neq 0$

$g \quad : \qquad \bar{a}z - a\bar{z} = 0$ **Gerade in Richtung** a **,** $0 \notin g$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{z}\,\bar{\tilde{z}} + \frac{a}{iG}\tilde{z} - \frac{\bar{a}}{iG}\bar{\tilde{z}} = 0 \quad , \quad \text{wegen} \quad \bar{i} = -i$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{z}\,\bar{\tilde{z}} + \frac{a}{iG}\tilde{z} + \frac{\bar{a}}{\overline{iG}}\bar{\tilde{z}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{z}\,\bar{\tilde{z}} + \frac{a}{iG}\tilde{z} + \frac{\bar{a}}{\overline{iG}}\bar{\tilde{z}} + \frac{a\bar{a}}{G^2} = \frac{a\bar{a}}{G^2}$$

$m(g) \quad : \qquad \left(\tilde{z} + \dfrac{\bar{a}}{\overline{iG}}\right)\left(\bar{\tilde{z}} + \dfrac{a}{iG}\right) = \dfrac{a\bar{a}}{G^2}$ **Kreis** $K_{-\frac{\bar{a}}{\overline{iG}}\,;\,\frac{|a|}{G}}$

Fall 2 :

$$K_{M;r} \quad : \quad (z - M)(\bar{z} - \overline{M}) = r^2$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{\tilde{z}} \qquad , \qquad \overline{\tilde{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = \frac{1}{\overline{\tilde{z}}}$$

2.1 : $\quad 0 \in K_{M;r} \quad \Leftrightarrow \quad M\overline{M} = r^2$

$$\Rightarrow \qquad z\bar{z} - \overline{M}z - M\bar{z} + M\overline{M} = r^2$$

$$\Rightarrow \qquad z\bar{z} - \overline{M}z - M\bar{z} + r^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \qquad z\bar{z} - \overline{M}z - M\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\tilde{z}\overline{\tilde{z}}} - \frac{\overline{M}}{\tilde{z}} - \frac{M}{\overline{\tilde{z}}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - \overline{M}\overline{\tilde{z}} - M\tilde{z} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{M}\overline{\tilde{z}} + M\tilde{z} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{M}i\overline{\tilde{z}} + Mi\tilde{z} = 1i$$

$$\Rightarrow \qquad Mi\tilde{z} + \overline{M}i\overline{\tilde{z}} = 1i$$

$$\Rightarrow \qquad Mi\tilde{z} - \overline{Mi}\,\overline{\tilde{z}} = 1i$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{\overline{Mi}}\tilde{z} - \overline{Mi}\,\overline{\tilde{z}} = 1i$$

$m(K_{M;r})$, $0 \in K_{M;r}$: $\quad \overline{\overline{Mi}}\tilde{z} - \overline{Mi}\,\overline{\tilde{z}} + \; = 1i \qquad$ **Gerade in Richtung** $\overline{Mi}$

2.2 : $\quad 0 \notin K_{M;r} \quad \Leftrightarrow \quad M\overline{M} \neq r^2$

$$\Rightarrow \qquad z\bar{z} - \overline{M}z - M\bar{z} + M\overline{M} = r^2$$

$$\Rightarrow \qquad z\bar{z} - \overline{M}z - M\bar{z} = r^2 - M\overline{M}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\tilde{z}\overline{\tilde{z}}} - \frac{\overline{M}}{\tilde{z}} - \frac{M}{\overline{\tilde{z}}} = r^2 - M\overline{M}$$

$$\Rightarrow \qquad (r^2 - M\overline{M})\tilde{z}\overline{\tilde{z}} + \overline{M}\overline{\tilde{z}} + M\tilde{z} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{z}\overline{\tilde{z}} + \frac{\overline{M}}{r^2 - M\overline{M}}\overline{\tilde{z}} + \frac{M}{r^2 - M\overline{M}}\tilde{z} = \frac{1}{r^2 - M\overline{M}}$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde z \bar{\tilde z} + \frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\bar{\tilde z} + \frac{M}{r^2 - M\overline M}\tilde z + \frac{M\overline M}{\left(r^2 - M\overline M\right)^2} = \frac{1}{r^2 - M\overline M} + \frac{M\overline M}{\left(r^2 - M\overline M\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\tilde z + \frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\right)\left(\bar{\tilde z} + \frac{M}{r^2 - M\overline M}\right) = \frac{1}{r^2 - M\overline M} + \frac{M\overline M}{\left(r^2 - M\overline M\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\tilde z + \frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\right)\left(\bar{\tilde z} + \frac{M}{r^2 - M\overline M}\right) = \frac{r^2 - M\overline M + M\overline M}{\left(r^2 - M\overline M\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\tilde z + \frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\right)\left(\bar{\tilde z} + \frac{M}{r^2 - M\overline M}\right) = \frac{r^2}{\left(r^2 - M\overline M\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\tilde z + \frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\right)\left(\bar{\tilde z} + \frac{M}{r^2 - M\overline M}\right) = \left(\frac{r}{r^2 - M\overline M}\right)^2$$

$$m\left(K_{M;r}\right) \;,\quad 0 \notin K_{M;r} \qquad : \qquad \left(\tilde z + \frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\right)\left(\bar{\tilde z} + \frac{M}{r^2 - M\overline M}\right) = \left(\frac{r}{r^2 - M\overline M}\right)^2$$

Kreis $K_{-\frac{\overline M}{r^2 - M\overline M}\,;\,\frac{r}{r^2 - M\overline M}}$

Die Möbius-Transformation $m(z) = \tilde z = \frac{1}{z}$ bildet Geraden auf Geraden oder Kreise, Kreise auf Geraden oder Kreise ab .

(10) Ergebnis von (9) :

Da lineare Funktionen geraden- und kreistreu sind, und die Möbius-Transformation $m(z) = \tilde z = \frac{1}{z}$

Geraden auf Geraden oder Kreise,
Kreise auf Geraden oder Kreise

abbildet, und zudem jede Möbius-Transformation M **nach (6) als Verkettung** $M = k \circ m \circ j$ **mit linearen Funktionen** j **,** k **darstellbar ist, gilt entsprechendes für jede Möbius-Transformation.**

(11) Die Verkettung von Möbius-Transformationen ist wieder eine Möbius-Transformation .

Seien $M_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $M_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$. Für die Verkettung $M := M_2 \circ M_1$ gilt :

$$z \xmapsto{\;M_1\;} \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \xmapsto{\;M_2\;} \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2}$$

$$M(z) = \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2}$$

$$M(z) = \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)}$$

$$M(z) = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_2)z + a_2 b_1 + b_2 d_1}{(a_2 a_1 + d_2 c_1)z + c_2 b_1 + d_2 d_1}$$

$$\boxed{M(z) = \frac{az + b}{cz + d}}$$

$$ad - bc = (a_2 a_1 + b_2 c_1)(c_2 b_1 + d_2 d_1) - (a_2 b_1 + b_2 d_1)(c_2 a_1 + d_2 c_1)$$

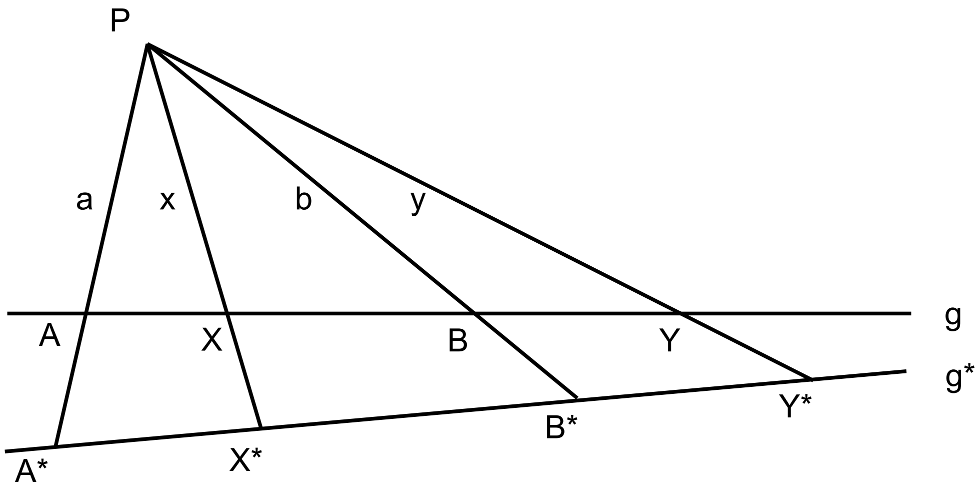
$$\begin{aligned} ad - bc = {} & \cancel{a_1 a_2 b_1 c_2} + \underline{a_1 a_2 d_1 d_2} + \underline{b_1 b_2 c_1 c_2} + \cancel{b_2 c_1 d_1 d_2} \\ & -\left(\cancel{a_1 a_2 b_1 c_2} + \underline{a_2 b_1 c_1 d_2} + \underline{a_1 b_2 c_2 d_1} + \cancel{b_2 c_1 d_1 d_2}\right) \end{aligned}$$

$$ad - bc = a_2 d_2 (a_1 d_1 - b_1 c_1) - b_2 c_2 (a_1 d_1 - b_1 c_1)$$

$$ad - bc = (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - b_1 c_1)$$

Es ist $ad - bc \neq 0$, da $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$ und $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$.

Das Doppelverhältnis für Abstände



Zentralprojektion :
Projiziert man von einem Punkt P aus die Gerade g auf die Gerade g^* , so gilt für aufgrund der Flächenbetrachtung entsprechender Dreiecke Folgendes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{|X-A|h}{2} &= a\,x\sin(<a,x) \\ \frac{|X-B|h}{2} &= b\,x\sin(<x,b) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{|X-A|}{|X-B|} = \frac{a\sin(<a,x)}{b\sin(<x,b)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{|Y-A|h}{2} &= a\,y\sin(<a,y) \\ \frac{|Y-B|h}{2} &= b\,x\sin(<b,y) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Y-A|}{|Y-B|} = \frac{a\sin(<a,y)}{b\sin(<b,y)}$$

Das sogenannte Doppelverhältnis zu den vier Punkten A , X , B , Y auf der Geraden g ist der Ausdruck

$$\frac{|X-A|}{|X-B|} : \frac{|Y-A|}{|Y-B|} = \frac{a\sin(<a,x)}{b\sin(<x,b)} : \frac{a\sin(<a,y)}{b\sin(<b,y)} \quad .$$

Eine analoge Betrachtung liefert für die Bildpunkte A , X^* , B^* , Y^* auf der Geraden g^* den Ausdruck

$$\frac{|X^*-A^*|}{|X^*-B^*|} : \frac{|Y^*-A^*|}{|Y^*-B^*|} = \frac{a\sin(<a,x)}{b\sin(<x,b)} : \frac{a\sin(<a,y)}{b\sin(<b,y)} \text{ , so dass folgt :}$$

$$\boxed{\frac{|X-A|}{|X-B|} : \frac{|Y-A|}{|Y-B|} = \frac{|X^*-A^*|}{|X^*-B^*|} : \frac{|Y^*-A^*|}{|Y^*-B^*|}}$$

Das Doppelverhältnis ist also invariant unter der Zentralprojektionen !

Das Doppelverhältnis für komplexe Zahlen

In der komplexen Geometrie versteht man unter dem **Doppelverhältnis** von vier unterschiedlichen Zahlen z_1 , z_1 , z_1 , z_1 $\in \hat{\mathbb{C}}$ folgenden Ausdruck :

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

Im Fall, dass genau eine der Zahlen gleich ∞ ist, setzt man :

$$D(\infty, z_2, z_3, z_4) := \lim_{z_1 \to \infty} \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

$$= \lim_{z_1 \to \infty} \frac{\frac{z_2}{z_1} - 1}{\frac{z_2}{z_1} - 1} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

$$= \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

$$D(z_1, \infty, z_3, z_4) := \lim_{z_2 \to \infty} \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

$$= \lim_{z_1 \to \infty} \frac{1 - \frac{z_1}{z_2}}{1 - \frac{z_1}{z_2}} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

$$= \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1}$$

Analog :

$$D(z_1, z_2, \infty, z_4) := \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

$$D(z_1, z_2, z_3, \infty) := \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Lineare Funktionen lassen das Doppelverhältnis konstant :

Sei $j(z) = vz+w$ eine lineare Funktion . Dann ist

$$D\big(j(z_1),j(z_2),j(z_3),j(z_4)\big) = \frac{vz_2+w-(vz_1+w)}{vz_2+w-(vz_3+w)} \cdot \frac{vz_4+w-(vz_3+w)}{vz_4+w-(vz_1+w)}$$

$$D\big(j(z_1),j(z_2),j(z_3),j(z_4)\big) = \frac{v(z_2-z_1)}{v(z_2-z_3)} \cdot \frac{v(z_4-z_3)}{v(z_4-z_1)}$$

$$D\big(j(z_1),j(z_2),j(z_3),j(z_4)\big) = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} \cdot \frac{z_4-z_3}{z_4-z_1}$$

$$D\big(j(z_1),j(z_2),j(z_3),j(z_4)\big) = D(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

Die Funktion $\tilde{z} = m(z) = \dfrac{1}{z}$ **lässt das das Doppelverhältnis konstant :**

$$D\big(m(z_1),m(z_2),m(z_3),m(z_4)\big) = \frac{\tilde{z}_2-\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2-\tilde{z}_3} \cdot \frac{\tilde{z}_4-\tilde{z}_3}{\tilde{z}_4-\tilde{z}_1}$$

$$D\big(m(z_1),m(z_2),m(z_3),m(z_4)\big) = \frac{\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3}} \cdot \frac{\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_1}}$$

$$D\big(m(z_1),m(z_2),m(z_3),m(z_4)\big) = \frac{\frac{z_1-z_2}{z_2z_1}}{\frac{z_3-z_2}{z_2z_3}} \cdot \frac{\frac{z_3-z_4}{z_4z_3}}{\frac{z_1-z_4}{z_4z_1}}$$

$$D\big(m(z_1),m(z_2),m(z_3),m(z_4)\big) = \frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} \cdot \frac{z_3-z_4}{z_1-z_4}$$

$$D\big(m(z_1),m(z_2),m(z_3),m(z_4)\big) = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} \cdot \frac{z_4-z_3}{z_4-z_1}$$

$$D\big(m(z_1),m(z_2),m(z_3),m(z_4)\big) = D(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

(12) **Da jede Möbius-Transformation** $\tilde{z} = M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ **nach (6) eine Verkettung einer linearen Funktion** j **mit der Möbius-Transformation** $m(z) = \dfrac{1}{z}$ **und einer linearen Funktion** k **,** $M = k \circ m \circ j$ **, erhält jede Möbius-Transformation das Doppelverhältnis .**

(13) Jede Möbius-Transformation, die nicht gleich der Identität ist, hat höchstens 2 Fixpunkte .
Eine Möbius-Transformation mit 3 Fixpunkten ist die Identität.

Sei $M(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ eine Möbius-Transformation und sei z_0 ein Fixpunkt .

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0$$

$$az_0 + b = cz_0^2 + dz_0$$

$$G : \quad cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0$$

Fall 1 : $c \neq 0$

Die Gleichung G hat höchstens 2 Lösungen , also hat die Möbius-Transformation M höchstens 2 Fixpunkte.
Wegen $M(\infty) = \dfrac{a}{c} \neq \infty$ gibt es keine weiteren Fixpunkte .

Fall 2 : $c = 0$ und $d-a \neq 0$

Es ist $a \neq 0$, denn sonst wäre $ad-bc = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0$.

Die Gleichung G hat den Fixpunkt $z_0 = \dfrac{b}{d-a}$.

Wegen $M(\infty) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{0} = \infty$ hat die Möbius-Transformation 2 Fixpunkte .

Fall 3: $c = 0$ und $d-a = 0$

3.1: $b \neq 0$

Es ist $a \neq 0$, denn sonst wäre $ad-bc = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0$.

$M(z) = \dfrac{az + b}{a} = z + \dfrac{b}{a}$ ist eine Verschiebung .

Der einzige Fixpunkt ist ∞ , denn $M(\infty) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{0} = \infty$.

3.2: $b = 0$

$M(z) = \dfrac{az}{a} = z$ ist die Identität .

(14) **Gegeben seien die jeweils unterschiedlichen Tripel** $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ **und** $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ **.**
Dann gibt es genau eine gebrochen-lineare Funktion M **mit** $M(z_i) = w_i$ **,** $i = 1,2,3$ **.**

Setze :

$$M_1(z) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z - z_3}{z - z_1} \quad , \qquad M_2(z) = \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} \cdot \frac{w - w_3}{w - w_1}$$

Dann gilt :

$$\begin{aligned} M_1(z_1) &= \infty & \qquad M_2(w_1) &= \infty \\ M_1(z_2) &= 1 & M_2(w_2) &= 1 \\ M_1(z_3) &= 0 & M_2(w_3) &= 0 \end{aligned}$$

Die Verkettung $M := M_2^{-1} \circ M_1$ hat nun die gewünschte Eigenschaft .

Da die Abbildung $M_2 \circ M \circ M_1^{-1}$ mindestens 3 Fixpunkte, nämlich ∞ , 1 , 0 , hat, ist sie nach **(13)** die Identität : $M_2 \circ M \circ M_1^{-1} = \mathrm{Id}$

$$\begin{array}{ccccccc}
z_1 & \xmapsto{M_1} & \infty & \xmapsto{M_2 \circ M \circ M_1^{-1}} & \infty & \xleftarrow{M_2} & w_1 \\[1em]
z_2 & \xmapsto{M_1} & 1 & \xmapsto{M_2 \circ M \circ M_1^{-1}} & 1 & \xleftarrow{M_2} & w_2 \\[1em]
z_3 & \xmapsto{M_1} & 0 & \xmapsto{M_2 \circ M \circ M_1^{-1}} & 0 & \xleftarrow{M_2} & w_3 \\[1em]
z & \xmapsto{M_1} & M_1(z) & \xmapsto{M_2 \circ M \circ M_1^{-1}} & M_2(w) & \xleftarrow{M_2} & w
\end{array}$$

Es folgt also

$$M_1(z) = M_2(w)$$

$$\underbrace{\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}}_{=:L} \cdot \frac{z - z_3}{z - z_1} = \underbrace{\frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}}_{=:R} \cdot \frac{w - w_3}{w - w_1}$$

$$L\,\frac{z-z_3}{z-z_1} = R\,\frac{w-w_3}{w-w_1}$$

$$L(z-z_3)(w-w_1) = R(z-z_1)(w-w_3)$$

$$L(z-z_3)w - L(z-z_3)w_1 = R(z-z_1)w - R(z-z_1)w_3$$

$$\left[L(z-z_3) - R(z-z_1)\right]w = L(z-z_3)w_1 - R(z-z_1)w_3$$

$$w = \frac{L(z-z_3)w_1 - R(z-z_1)w_3}{L(z-z_3) - R(z-z_1)}$$

$$w = \frac{Lw_1(z-z_3) - Rw_3(z-z_1)}{L(z-z_3) - R(z-z_1)}$$

$$w = \frac{(Lw_1-R\,z_3)z + R\,w_3 z_1 - L\,w_1 z_3}{(L-R)z + R\,z_1 - L\,z_3}$$

$$\boxed{w = \frac{\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\,w_1 - \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}\,z_3\right)z + \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}\,w_3 z_1 - \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\,w_1 z_3}{\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} - \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}\right)z + \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}\,z_1 - \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\,z_3}}$$

$w = M(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ ist die gesuchte Transformation .

Charakterisierung der Chordalen von $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$

Chordale und Mediane von $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$

$K_{M_1;r_1}$: $(z-M_1)(\overline{z}-\overline{M_1}) = r_1^{\,2}$

$K_{M_2;r_2}$: $(z-M_2)(\overline{z}-\overline{M_2}) = r_2^{\,2}$

$$z\overline{z} - \overline{M_1}z - M_1\overline{z} + M_1\overline{M_1} = r_1^{\,2}$$

$$z\overline{z} - \overline{M_2}z - M_2\overline{z} + M_2\overline{M_2} = r_2^{\,2}$$

$$(\overline{M_2}-\overline{M_1})z + (M_2-M_1)\overline{z} + M_1\overline{M_1} - M_2\overline{M_2} = r_1^{\,2} - r_2^{\,2}$$

$$(\overline{M_2}-\overline{M_1})z + (M_2-M_1)\overline{z} = r_1^{\,2} - r_2^{\,2} - M_1\overline{M_1} + M_2\overline{M_2}$$

$$(\overline{M_2}-\overline{M_1})iz + (M_2-M_1)i\overline{z} = (r_1^{\,2} - r_2^{\,2} - M_1\overline{M_1} + M_2\overline{M_2})i \quad , \quad \overline{i} = -i$$

$$-(\overline{M_2}-\overline{M_1})\overline{i}\,z + (M_2-M_1)i\overline{z} = (r_1^{\,2} - r_2^{\,2} - M_1\overline{M_1} + M_2\overline{M_2})i$$

$$(\overline{M_2}-\overline{M_1})\overline{i}\,z - (M_2-M_1)i\overline{z} = (r_2^{\,2} - r_1^{\,2} + M_1\overline{M_1} - M_2\overline{M_2})i$$

ch : $\boxed{(\overline{M_2}-\overline{M_1})\overline{i}\,z - (M_2-M_1)i\overline{z} = (r_2^{\,2} - r_1^{\,2} + M_1\overline{M_1} - M_2\overline{M_2})i}$

Gleichung der Chordale , sie steht senkrecht auf der Mediane, der Geraden durch M_1 , M_2

m : $\boxed{(\overline{M_2}-\overline{M_1})z - (M_2-M_1)\overline{z} = (\overline{M_2}-\overline{M_1})M_1 - (M_2-M_1)\overline{M_1}}$

Gleichung der Mediane

Der Chordalenpunkt, Schnittpunkt von ch , m

$$\text{ch} \quad : \quad \left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)\overline{i}\,z \;-\; \left(M_2-M_1\right)i\overline{z} \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; M_1\overline{M_1} \;-\; M_2\overline{M_2}\right)i$$

$$\text{m} \quad : \quad \left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)z \;-\; \left(M_2-M_1\right)\overline{z} \;=\; \left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)M_1 \;-\; \left(M_2-M_1\right)\overline{M_1}$$

$$\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)\overline{i}\,z \;-\; \left(M_2-M_1\right)i\overline{z} \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; M_1\overline{M_1} \;-\; M_2\overline{M_2}\right)i$$

$$\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)i\,z \;-\; \left(M_2-M_1\right)i\overline{z} \;=\; \left(\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)M_1 \;-\; \left(M_2-M_1\right)\overline{M_1}\right)i$$

$$\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)\left(\overline{i}-i\right)z \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; M_1\overline{M_1} \;-\; M_2\overline{M_2} \;-\; \left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)M_1 \;+\; \left(M_2-M_1\right)\overline{M_1}\right)i \quad ,$$

$$\overline{i} \;=\; -i$$

$$-2i\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)z \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; M_1\overline{M_1} \;-\; M_2\overline{M_2} \;-\; \overline{M_2}M_1 \;+\; \overline{M_1}M_1 \;+\; M_2\overline{M_1} \;-\; M_1\overline{M_1}\right)i$$

$$-2i\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)z \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; M_1\overline{M_1} \;-\; M_2\overline{M_2} \;-\; \overline{M_2}M_1 \;+\; M_2\overline{M_1}\right)i$$

$$-2i\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)z \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; \left(M_1+M_2\right)\overline{M_1} \;-\; \left(M_1+M_2\right)\overline{M_2}\right)i$$

$$-2i\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)z \;=\; \left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; \left(M_1+M_2\right)\left(\overline{M_1}-\overline{M_2}\right)\right)i$$

$$z \;=\; \frac{\left(r_2^{\,2} \;-\; r_1^{\,2} \;+\; \left(M_1+M_2\right)\left(\overline{M_1}-\overline{M_2}\right)\right)i}{-2\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)i}$$

$$z \;=\; \frac{r_1^{\,2} \;-\; r_2^{\,2} \;+\; \left(M_1+M_2\right)\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)}{2\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)}$$

$$z \;=\; \frac{M_1+M_2}{2} \quad + \quad \frac{r_1^{\,2} \;-\; r_2^{\,2}}{2\left(\overline{M_2}-\overline{M_1}\right)}$$

$$z \;=\; \frac{M_1+M_2}{2} \quad + \quad \frac{r_1^{\,2} \;-\; r_2^{\,2}}{2\left|M_2-M_1\right|^2}\left(M_2-M_1\right)$$

$$\boxed{C \quad := \quad \frac{M_1+M_2}{2} \quad + \quad \frac{r_1^{\,2} \;-\; r_2^{\,2}}{2\left|M_2-M_1\right|^2}\left(M_2-M_1\right)} \qquad \textbf{Chordalpunkt}$$

Der Chordalpunkt C liegt näher an M_1 , falls $r_1 < r_2$.
Der Chordalpunkt C liegt in der Mitte von M_1 , M_2 , falls $r_1 = r_2$.
Der Chordalpunkt C liegt näher an M_2 , falls $r_2 < r_1$.

$$C = \frac{2M_1+M_2-M_1}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|^2}\left(M_2-M_1\right)$$

$$C = M_1 + \frac{M_2-M_1}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|^2}\left(M_2-M_1\right)$$

$$C = M_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|^2}\right)\left(M_2-M_1\right)$$

$$C = M_1 + \left(\frac{\left|M_2-M_1\right|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|^2}\right)\left(M_2-M_1\right)$$

$$\boxed{C = M_1 + \left(\frac{\left|M_2-M_1\right|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|}\right) \cdot \frac{\left(M_2-M_1\right)}{\left|M_2-M_1\right|}}$$

Entfernung des Chordalpunktes von M_1 :

$$\boxed{\left|C - M_1\right| = \frac{\left|M_2-M_1\right|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|}}$$

Entfernung des Chordalpunktes von M_2 :

$$\left|C - M_2\right| = \left|M_2 - M_1\right| - \frac{\left|M_2-M_1\right|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|}$$

$$\left|C - M_2\right| = \frac{2\left|M_2 - M_1\right|^2 - \left|M_2-M_1\right|^2 - r_1^2 + r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|}$$

$$\left|C - M_2\right| = \frac{\left|M_2 - M_1\right|^2 - r_1^2 + r_2^2}{2\left|M_2-M_1\right|}$$

$$\boxed{\left|C - M_2\right| = \frac{\left|M_2 - M_1\right|^2 + r_2^2 + r_1^2}{2\left|M_2-M_1\right|}}$$

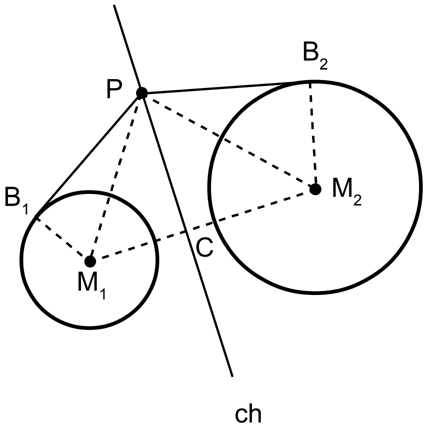
Satz (Eigenschaft der Chordalen) :

Gegeben seien die Kreise $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$ .Für jeden Punkt P der Chordalen der Kreise gilt :

$$|P-B_1| = |P-B_2| \quad ,$$

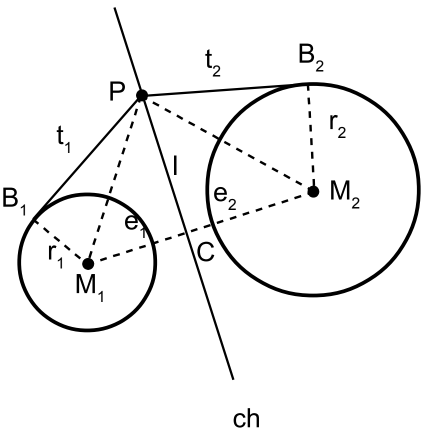
wobei Die Punkte B_1 , B_2 Berührpunkte der Tangenten von P an die Kreise $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$ sind

Beweis :



Es ist $|M_1-B_1| = r_1$, $|M_2-B_2| = r_1$.

Setze $|C-M_1| =: e_1$, $|C-M_2| =: e_2$, $|P-B_1| =: t_1$, $|P-B_2| =: t_2$, $|P-C| =: l$.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt :

$$t_1 = \sqrt{|P-M_1|^2 - r_1^2} \qquad t_2 = \sqrt{|P-M_2|^2 - r_2^2}$$

$$t_1 = \sqrt{e_1^2 + l^2 - r_1^2} \qquad t_2 = \sqrt{e_2^2 + l^2 - r_2^2}$$

Um zu zeigen, dass $t_1 = t_2$ ist, genügt es zu zeigen, dass $e_1^2 - r_1^2 = e_2^2 - r_2^2$ ist.

Nach dem Vorigen ist

$$e_1 = \frac{|M_2-M_1|^2 + r_1{}^2-r_2{}^2}{2|M_2-M_1|}$$

$$e_1^2 = \frac{\left(|M_2-M_1|^2 + r_1{}^2-r_2{}^2\right)^2}{4|M_2-M_1|^2}$$

$$e_1^2-r_1^2 = \frac{\left(|M_2-M_1|^2 + r_1{}^2-r_2{}^2\right)^2}{4|M_2-M_1|^2} - r_1^2$$

$$e_1^2-r_1^2 = \frac{\left(|M_2-M_1|^2 + r_1{}^2-r_2{}^2\right)^2 - 4|M_2-M_1|^2 r_1^2}{4|M_2-M_1|^2}$$

$$e_1^2-r_1^2 = \frac{|M_2-M_1|^4 + 2|M_2-M_1|\left(r_1^2-r_2^2\right) + \left(r_1{}^2-r_2{}^2\right)^2 - 4|M_2-M_1|^2 r_1^2}{4|M_2-M_1|^2}$$

$$e_1^2-r_1^2 = \frac{|M_2-M_1|^4 + 2|M_2-M_1|r_1^2 - 2|M_2-M_1|r_2^2 + \left(r_1{}^2-r_2{}^2\right)^2 - 4|M_2-M_1|^2 r_1^2}{4|M_2-M_1|^2}$$

$$e_1^2-r_1^2 = \frac{|M_2-M_1|^4 - 2|M_2-M_1|r_1^2 - 2|M_2-M_1|r_2^2 + \left(r_1{}^2-r_2{}^2\right)^2}{4|M_2-M_1|^2}$$

Analog folgt

$$e_2^2-r_2^2 = \frac{|M_2-M_1|^4 - 2|M_2-M_1|r_2^2 - 2|M_2-M_1|r_1^2 + \left(r_2{}^2-r_1{}^2\right)^2}{4|M_2-M_1|^2}$$

Demnach ist $e_1^2 - r_1^2 = e_2^2 - r_2^2$, also

$$e_1^2 + l^2 - r_1^2 = e_2^2 + l^2 - r_2^2$$

$$\sqrt{e_1^2 + l^2 - r_1^2} = \sqrt{e_2^2 + l^2 - r_2^2}$$

$$t_1 = t_2$$

q.e.d.

Bemerkung : Der Tangentenabschnitt von einem Punkt P bis zum Berührpunkt B des Kreises $K_{M;r}$ ist gegeben durch $|P-B| = \sqrt{|P-M|^2 - r^2}$.

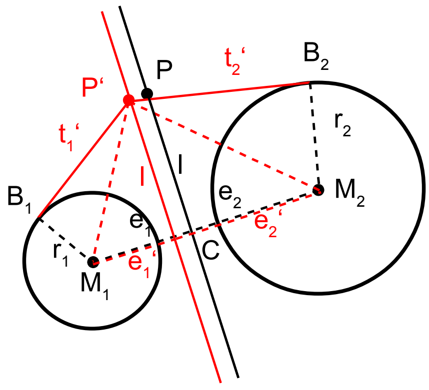
Satz :
Gegeben seien die Kreise $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$. Für jeden Punkt P' außerhalb der Chordalen der Kreise gilt :

$$|P'-B_1| \neq |P'-B_2| \quad ,$$

wobei Die Punkte B_1 , B_2 Berührpunkte der Tangenten von P' an die Kreise $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$ sind

Beweis :

Es läge o.B.d.A. P' „links“ von P .



Wegen $e_1' < e_1$, $e_2 < e_2'$ folgt mit $e_1^2 - r_1^2 = e_2^2 - r_2^2$

$$e_1'^{\,2} - r_1^2 \quad < \quad e_1^2 - r_1^2 \quad = \quad e_2^2 - r_2^2 \quad < \quad e_2'^{\,2} - r_1^2$$

$$e_1'^{\,2} - r_1^2 \quad < \quad e_2'^{\,2} - r_1^2$$

$$e_1'^{\,2} + l^2 - r_1^2 \quad < \quad e_2'^{\,2} + l^2 - r_1^2$$

$$\sqrt{e_1'^{\,2} + l^2 - r_1^2} \quad < \quad \sqrt{e_2'^{\,2} + l^2 - r_1^2}$$

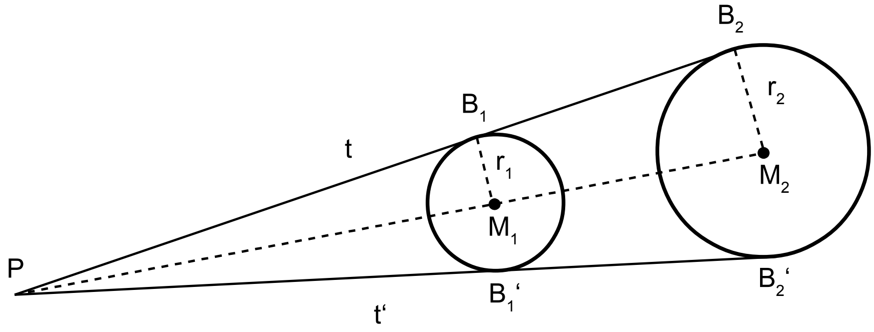
$$t_1' \quad < \quad t_2'$$

q.e.d.

Charakterisierung der Chordalen

Die Chordale zweier Kreise $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$ ist gleich der Menge alle Punkte P mit $|P-B_1| = |P-B_2|$, wobei B_1 , B_2 Berührpunkte der Tangenten von P an die jeweiligen Kreise sind .

Gemeinsame „äußere“ Tangenten zweier Kreise



Für die fertige Figur würde nach dem 2. Strahlensatz gelten :

$$\frac{|P-M_1|+|M_1-M_2|}{|P-M_1|} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$1 + \frac{|M_1-M_2|}{|P-M_1|} = \frac{r_2}{r_1}$$

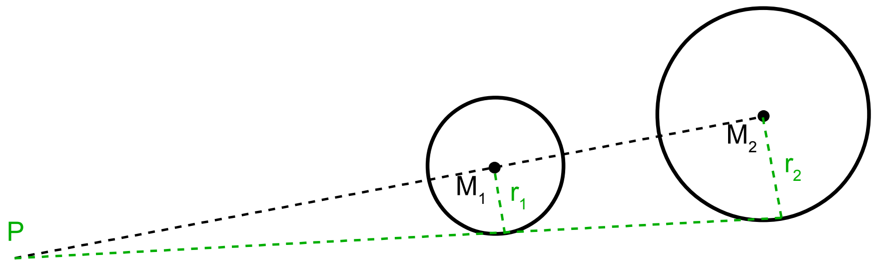
$$\frac{|M_1-M_2|}{|P-M_1|} = \frac{r_2}{r_1} - 1$$

$$\frac{|M_1-M_2|}{|P-M_1|} = \frac{r_2-r_1}{r_1}$$

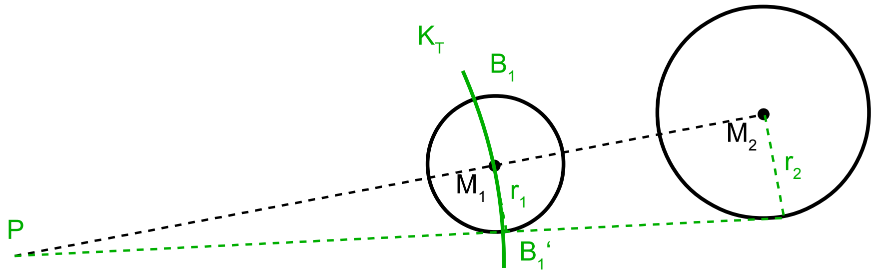
$$\frac{|P-M_1|}{|M_1-M_2|} = \frac{r_1}{r_2-r_1}$$

$$|P-M_1| = \frac{r_1}{r_2-r_1}\,|M_1-M_2|$$

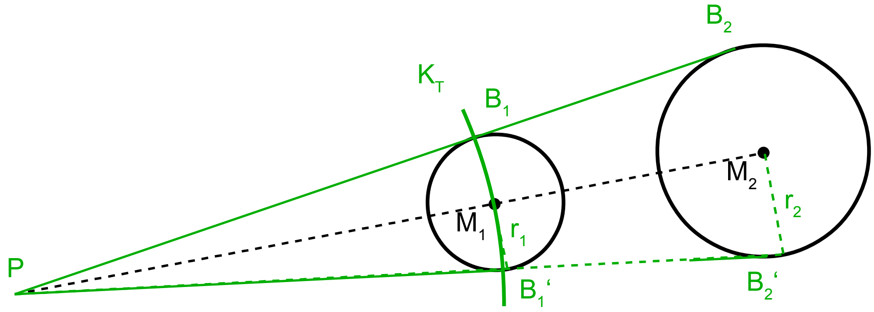
Den Punkt P auf der Medianen kann man mit Hilfe der Strahlensatzfigur konstruieren :



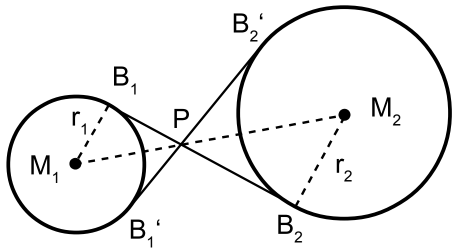
Dann zeichnet man den Thaleskreis $K_T := K_{\frac{P+M_1}{2};\frac{|P-M_1|}{2}}$. Dieser schneidet den Kreis $K_{M_1;r_1}$ in den Punkten B_1 , B_1' :



Die Geraden PB_1 , $PB_1^{'}$ sind die beiden „äußeren“ Tangenten an die gegebenen Kreise. Die Schnittpunkte der Tangenten mit dem Kreis $K_{M_2;r_2}$ sind die Punkte B_2 , $B_2^{'}$, wobei B_1 , B_2 und $B_1^{'}$, $B_2^{'}$ auf jeweils gleichen Seiten der Mediane liegen.



Gemeinsame „innere“ Tangenten zweier Kreise



Den Punkt P auf der Medianen konstruiert man wieder mit der entsprechenden Strahlensatzfigur.

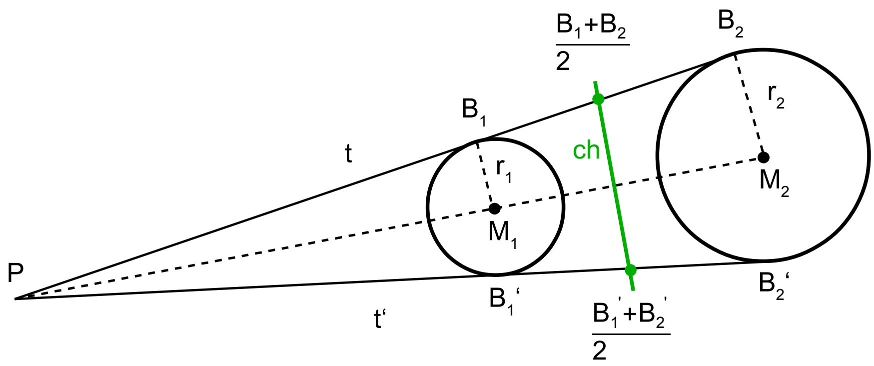
Dann Zeichnet man die beiden Thaleskreise über den Strecken PM_1 , PM_2 weclche die gegebenen Kreise in den Punkten B_1 , $B_1^{'}$ und B_2 , $B_2^{'}$ schneiden, wobei die Punkte B_1 , B_2 und $B_1^{'}$, $B_2^{'}$ jeweils auf unterschiedlichen Seiten der Mediane liegen.

Konstruktion der Chordalen

Die Chordale zu zwei gegebenen Kreisen $K_{M_1;r_1}$, $K_{M_2;r_2}$ ist dadurch charakterisiert, dass sie aus allen Punkten P mit jeweils gleichlangen Tangentenabschnitten zu den Berührpunkten der Kreise besteht, dass nämlich gilt :

$$|P-B_1| = |P-B_2| \quad , \quad |P-B_1'| = |P-B_2'|$$

Es genügt also, die Mittelpunkte $\frac{B_1+B_2}{2}$, $\frac{B_1'+B_2'}{2}$ der Tangentenabschnitte der „äußeren" Tangenten zu bilden, um die Chordale als Gerade durch diese Punkte zu erhalten .



Die Gleichung der Tangenten von einem Punkt P an den Kreis $K_{M;r}$

$$\mathrm{I} \qquad (z-M)(\bar z-\bar M) = r^2$$

$$\mathrm{II} \qquad \left(z-\frac{M+P}{2}\right)\left(\bar z-\frac{\bar M+\bar P}{2}\right) = \left(\frac{|M-P|}{2}\right)^2$$

Thaleskreis über der Strecke MP

Koordinatentransformation

$$\tilde z = z-P \quad \Leftrightarrow \quad z=\tilde z+P$$

$$\tilde M = M-P \quad \Leftrightarrow \quad M=\tilde M+P$$

$$\tilde{\mathrm{I}} \qquad \left(\tilde z+P-(\tilde M+P)\right)\left(\bar{\tilde z}+\bar P-(\bar{\tilde M}+\bar P)\right) = r^2$$

$$\widetilde{\mathrm{II}} \qquad \left(\tilde z+P-\frac{\tilde M+P+P}{2}\right)\left(\bar{\tilde z}+P-\frac{\bar{\tilde M}+\bar P+\bar P}{2}\right) = \left(\frac{|\tilde M+P-P|}{2}\right)^2$$

$\tilde{\mathrm{I}}$ $\quad \left(\tilde{z}+P-\left(\tilde{M}+P\right)\right)\left(\overline{\tilde{z}}+\overline{P}-\left(\overline{\tilde{M}}+\overline{P}\right)\right) = r^2$

$\tilde{\mathrm{I}}\mathrm{I}$ $\quad \left(\tilde{z}+P-\frac{\tilde{M}+P+P}{2}\right)\left(\overline{\tilde{z}}+P-\frac{\overline{\tilde{M}}+\overline{P}+\overline{P}}{2}\right) = \left(\frac{\left|\tilde{M}+P-P\right|}{2}\right)^2$

$\tilde{\mathrm{I}}$ $\quad \left(\tilde{z}-\tilde{M}\right)\left(\overline{\tilde{z}}-\overline{\tilde{M}}\right) = r^2 \qquad | \cdot 4$

$\tilde{\mathrm{I}}\mathrm{I}$ $\quad \left(\tilde{z}-\frac{\tilde{M}}{2}\right)\left(\overline{\tilde{z}}-\frac{\overline{\tilde{M}}}{2}\right) = \left(\frac{\left|\tilde{M}\right|}{2}\right)^2 \qquad | \cdot 4$

$\tilde{\mathrm{I}}$ $\quad \left(2\tilde{z}-2\tilde{M}\right)\left(2\overline{\tilde{z}}-2\overline{\tilde{M}}\right) = 4r^2$

$\tilde{\mathrm{I}}\mathrm{I}$ $\quad \left(2\tilde{z}-\tilde{M}\right)\left(2\overline{\tilde{z}}-\overline{\tilde{M}}\right) = \left|\tilde{M}\right|^2$

$\tilde{\mathrm{I}}$ $\quad 4\tilde{z}\overline{\tilde{z}} - 4\overline{\tilde{M}}\tilde{z} - 4\tilde{M}\overline{\tilde{z}} + 4\tilde{M}\overline{\tilde{M}} = 4r^2$

$\tilde{\mathrm{I}}\mathrm{I}$ $\quad 4\tilde{z}\overline{\tilde{z}} - 2\overline{\tilde{M}}\tilde{z} - 2\tilde{M}\overline{\tilde{z}} + \tilde{M}\overline{\tilde{M}} = \tilde{M}\overline{\tilde{M}}$

$\tilde{\mathrm{I}}$ $\quad 4\tilde{z}\overline{\tilde{z}} - 4\overline{\tilde{M}}\tilde{z} - 4\tilde{M}\overline{\tilde{z}} + 4\tilde{M}\overline{\tilde{M}} = 4r^2$

$\tilde{\mathrm{I}}\mathrm{I}$ $\quad 4\tilde{z}\overline{\tilde{z}} - 2\overline{\tilde{M}}\tilde{z} - 2\tilde{M}\overline{\tilde{z}} = 0$

$$- 2\overline{\tilde{M}}\tilde{z} - 2\tilde{M}\overline{\tilde{z}} + 4\tilde{M}\overline{\tilde{M}} = 4r^2$$

$$\overline{\tilde{M}}\tilde{z} + \tilde{M}\overline{\tilde{z}} - 2\tilde{M}\overline{\tilde{M}} = - 2r^2$$

$$\overline{\tilde{M}}\tilde{z} + \tilde{M}\overline{\tilde{z}} = 2\tilde{M}\overline{\tilde{M}} - 2r^2$$

$$\tilde{M}\overline{\tilde{z}} = - \overline{\tilde{M}}\tilde{z} + 2\tilde{M}\overline{\tilde{M}} - 2r^2$$

$$\tilde{M}\overline{\tilde{z}} = \frac{- \overline{\tilde{M}}\tilde{z} + 2\tilde{M}\overline{\tilde{M}} - 2r^2}{\tilde{M}}$$

Ĩ $$(\tilde z-\tilde M)(\overline{\tilde z}-\overline{\tilde M}) = r^2$$

$$(\tilde z-\tilde M)\left(\frac{-\overline{\tilde M}\tilde z + 2\tilde M\overline{\tilde M} - 2r^2}{\tilde M} - \overline{\tilde M}\right) = r^2$$

$$(\tilde z-\tilde M)(-\overline{\tilde M}\tilde z + 2\tilde M\overline{\tilde M} - 2r^2 - \tilde M\overline{\tilde M}) = \tilde M r^2$$

$$(\tilde z-\tilde M)(-\overline{\tilde M}\tilde z + \tilde M\overline{\tilde M} - 2r^2) = \tilde M r^2$$

$$-\overline{\tilde M}\tilde z^2 + (\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2+\tilde M\overline{\tilde M})\tilde z - \tilde M^2\overline{\tilde M} + 2\tilde M r^2 = \tilde M r^2$$

$$-\overline{\tilde M}\tilde z^2 + (2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2)\tilde z - \tilde M^2\overline{\tilde M} + \tilde M r^2 = 0$$

$$\overline{\tilde M}\tilde z^2 - (2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2)\tilde z + \tilde M^2\overline{\tilde M} - \tilde M r^2 = 0$$

$$\tilde z_{1/2} = \frac{2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2 \pm \sqrt{\left[-(2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2)\right]^2 - 4\overline{\tilde M}\left[\tilde M^2\overline{\tilde M}-\tilde M r^2\right]}}{2\overline{\tilde M}}$$

$$\tilde z_{1/2} = \frac{2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2 \pm \sqrt{4\tilde M^2\overline{\tilde M}^2 - 8\tilde M\overline{\tilde M}r^2 + 4r^4 - 4\tilde M^2\overline{\tilde M}^2 + 4\tilde M\overline{\tilde M}r^2}}{2\overline{\tilde M}}$$

$$\tilde z_{1/2} = \frac{2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - 4\tilde M\overline{\tilde M}r^2}}{2\overline{\tilde M}}$$

$$\tilde z_{1/2} = \frac{2\tilde M\overline{\tilde M}-2r^2 \pm 2r\sqrt{r^2 - \tilde M\overline{\tilde M}}}{2\overline{\tilde M}}$$

$$\tilde z_{1/2} = \frac{\tilde M\overline{\tilde M}-r^2 \pm r\sqrt{r^2 - \tilde M\overline{\tilde M}}}{\overline{\tilde M}}$$

Koordinatentransformation

$$\tilde z = z - P$$

$$\tilde M = M - P$$

$$z_{1/2} - P = \frac{(M-P)(\overline{M}-\overline{P})-r^2 \pm r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}$$

Richtungen der Tangenten von P **zu den Berührpunkten** $z_{1/2}$ **des Kreises** $K_{M;r}$

$$\boxed{a_1 := z_1 - P = \frac{(M-P)(\overline{M}-\overline{P})-r^2 + r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}}$$

$$\boxed{a_2 := z_2 - P = \frac{(M-P)(\overline{M}-\overline{P})-r^2 - r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}}$$

Gleichungen der Tangenten von P **an den Kreis** $K_{M;r}$

t_1 $\quad \boxed{\overline{a_1} z - a_1 \bar{z} = \overline{a_1} P - a_1 \overline{P}}$

t_2 $\quad \boxed{\overline{a_2} z - a_2 \bar{z} = \overline{a_2} P - a_2 \overline{P}}$

Berührpunkte der Tangente von P **an den Kreis** $K_{M;r}$

$$z_{1/2} = P + \frac{(M-P)(\overline{M}-\overline{P})-r^2 \pm r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}$$

$$z_{1/2} = \frac{\overline{M}P-P\overline{P}+(M-P)(\overline{M}-\overline{P})-r^2 \pm r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}$$

$$z_{1/2} = \frac{\overline{M}P-P\overline{P}+M\overline{M}-\overline{M}P-M\overline{P}+P\overline{P}-r^2 \pm r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}$$

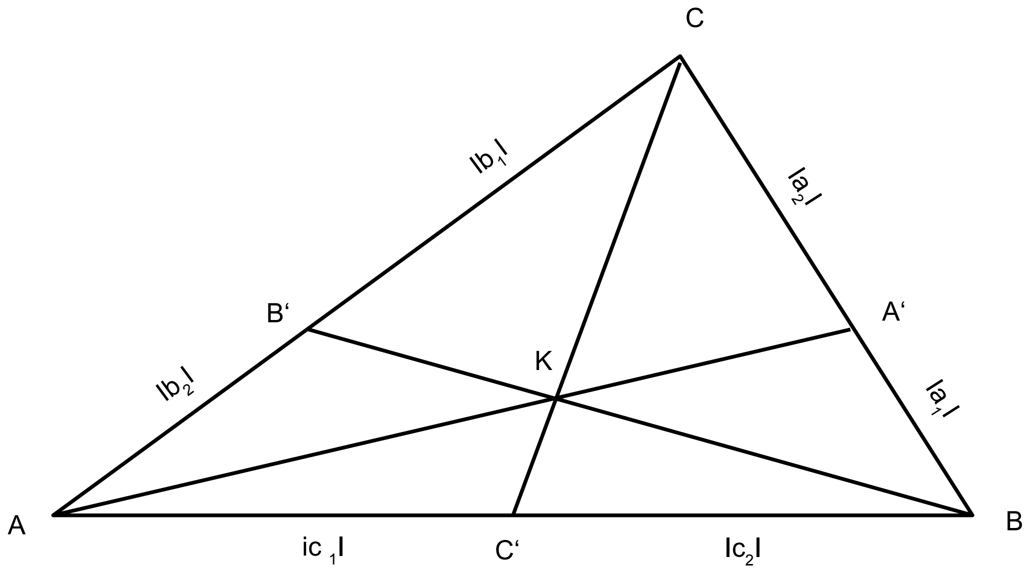
$$z_{1/2} = \frac{M\overline{M}-M\overline{P}-r^2 \pm r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}$$

$$\boxed{z_{1/2} = \frac{M(\overline{M}-\overline{P})-r^2 \pm r\sqrt{r^2-(M-P)(\overline{M}-\overline{P})}}{\overline{M}-\overline{P}}}$$

Der Satz von Ceva und seine Umkehrung

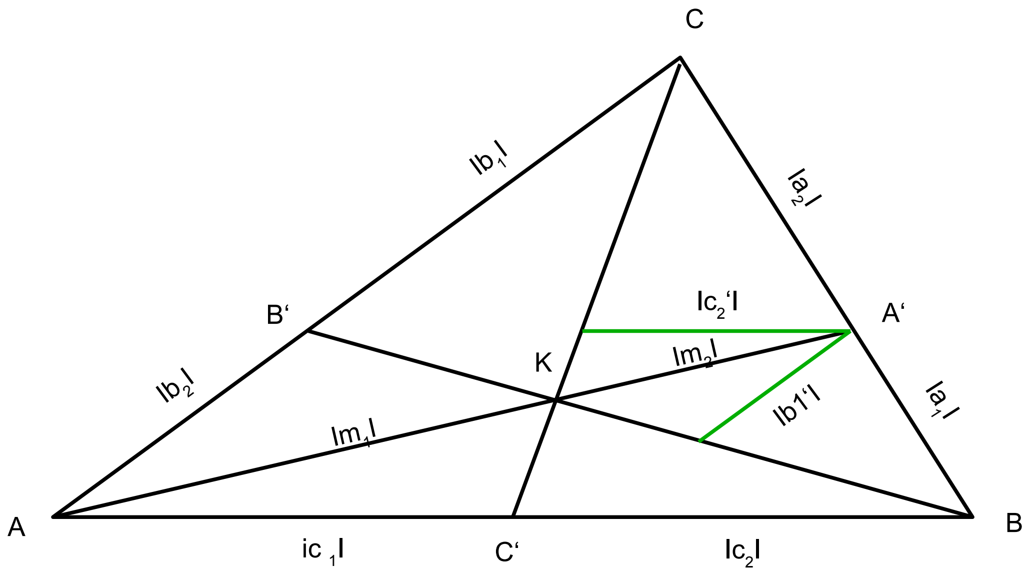
Satz von Ceva (Fassung über Teilverhältnisse)

Im Dreieck seien Eck-Transversalen, die sich im Punkt schneiden, gegeben.



Dann gilt : $\boxed{\dfrac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \dfrac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \dfrac{|c_1|}{|c_2|} = 1}$

Beweis :



$b_1' \parallel b_1$, $c_2' \parallel c_2$

2. Strahlensatz:

$$\frac{|b_1|}{|b_1'|} = \frac{|a|}{|a_1|} \qquad \frac{|c_2'|}{|c_2|} = \frac{|a_2|}{|a|}$$

$$\frac{|b_1'|}{|b_2|} = \frac{|m_2|}{|m_1|} \qquad \frac{|c_1|}{|c_2'|} = \frac{|m_1|}{|m_2|}$$

Produkt der 4 Gleichungen:

$$\frac{|b_1|}{|b_1'|} \cdot \frac{|b_1'|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_2'|}{|c_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2'|} = \frac{|a|}{|a_1|} \cdot \frac{|m_2|}{|m_1|} \cdot \frac{|a_2|}{|a|} \cdot \frac{|m_1|}{|m_2|}$$

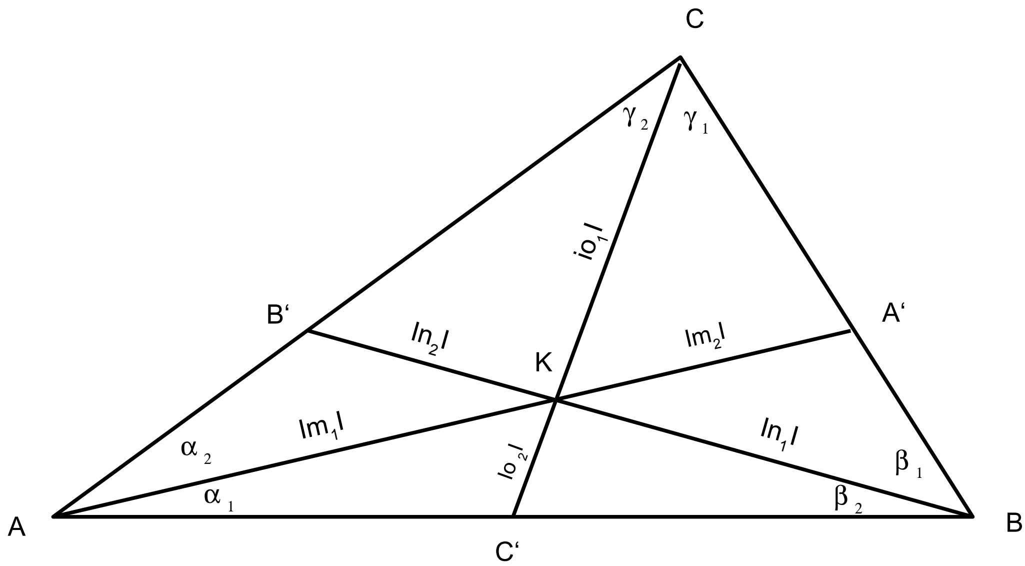
$$\frac{|b_1||c_1|}{|b_2||c_2|} = \frac{|a_2|}{|a_1|}$$

$$\frac{|a_1||b_1||c_1|}{|a_2||b_2||c_2|} = 1$$

q.e.d.

Satz von Ceva (trignometrische Fassung)

Im Dreieck seien Eck-Transversalen, die sich im Punkt schneiden, gegeben.



Dann gilt : $\boxed{\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1}$

Beweis :

Sinussatz :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} = \frac{|n_1|}{|m_1|} \qquad \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} = \frac{|o_1|}{|n_1|} \qquad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|m_1|}{|o_1|}$$

Produkt der 3 Gleichungen :

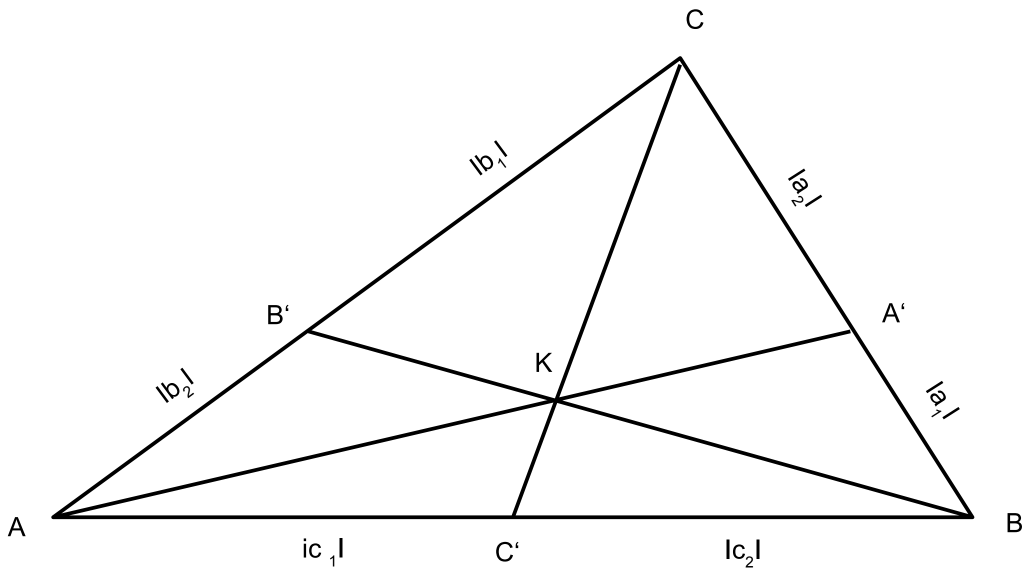
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|n_1|}{|m_1|} \cdot \frac{|o_1|}{|n_1|} \cdot \frac{|m_1|}{|o_1|}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

q.e.d.

Umkehrung des Satzes von Ceva

Gilt im Dreieck mit den Eck-Transversalen AA' , BB' , CC' die Gleichung $\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1$, so haben die Eck-Transversalen einen gemeinsamen Schnittpunkt K .



Beweis :

Sei $\{K\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$. Angenommen $K \notin \overline{CC'}$. Dann gibt es einen Punkt $C'' \in \overline{AB}$ und entsprechende Unterteilungen $|c_1'|$, $|c_2'|$ mit

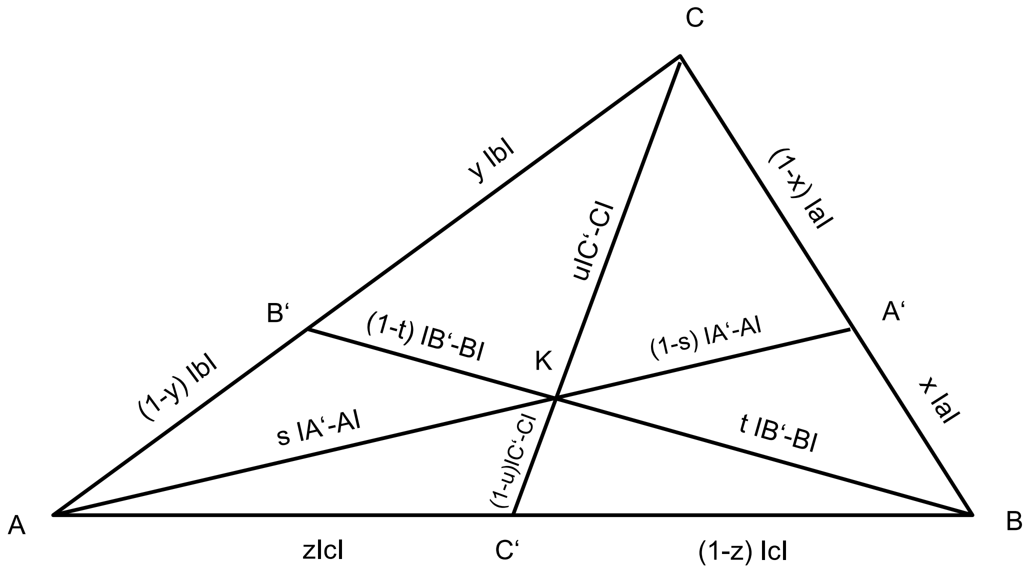
$$\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1'|}{|c_2'|} = 1 \quad .$$

Nach Voraussetzung gilt $\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1$, so dass folgt $\frac{|c_1'|}{|c_2'|} = \frac{|c_1|}{|c_2|}$.

Die ungleichen Teilungspunkte C' , $C'' \in \overline{AB}$ würden das gleiche Teilungsverhältnis festlegen, was jeinen Widerspruch darstellle.

Also folgt $K \in \overline{CC'}$. **q.e.d.**

Berechnung des Teilverhältnisses von Eck-Transversalen mit gemeinsamen Schnittpunkt



$$a + b + c = 0$$

$$A'-A = c + xa \qquad\qquad B'-B = -c - (1-y)b$$

$$A'-A = c + x(-c-b)$$

$$A'-A = (1-x)c - xb$$

$$s(A'-A) - t(B'-B) = c$$

$$s((1-x)c - xb) - t(-c - (1-y)b) = c$$

$$((1-x)s + 1t - 1)c + (-xs + (1-y)t)b = 0$$

Weil c , b linear unabhängig sind, muss gelten:

$$(1-x)s + 1\,t = 1$$

$$-x\,s + (1-y)t = 0$$

Damit folgt:

$$s = \frac{1-y}{(1-x)(1-y) + x} \qquad\qquad t = \frac{x}{(1-x)(1-y) + x}$$

$$s = \frac{1-y}{1 - y - x + xy + x} \qquad\qquad t = \frac{x}{1 - y - x + xy + x}$$

$$\boxed{s = \frac{1-y}{1-y + xy}} \qquad \frac{s}{t} = \frac{1-y}{x}$$

$$\boxed{1-s = \frac{xy}{1-y + xy}}$$

Analog erhält man die Beziehungen für die anderen Parameter :

$$\boxed{t = \frac{1-z}{1-z + yz}} \qquad \frac{t}{u} = \frac{1-z}{y}$$

$$\boxed{1-t = \frac{yz}{1-z + yz}}$$

$$\boxed{u = \frac{1-x}{1-x + zx}} \qquad \frac{u}{s} = \frac{1-x}{z}$$

$$\boxed{1-u = \frac{zx}{1-x + zx}}$$

$$\frac{s}{t} \cdot \frac{t}{u} \cdot \frac{u}{s} = \frac{1-y}{x} \cdot \frac{1-z}{y} \cdot \frac{1-x}{z}$$

$$\boxed{1 = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} \cdot \frac{1-z}{z}}$$

Satz von Ceva

Eine etwas „symmetrischere“ Darstellung ist :

$$\boxed{s = \frac{(1-y)z}{(1-y)z + xyz}}$$

$$\boxed{1-s = \frac{xyz}{(1-y)z + xyz}}$$

$$\boxed{t = \frac{(1-z)x}{(1-z)x + xyz}}$$

$$\boxed{1-t = \frac{xyz}{(1-z)x + xyz}}$$

$$\boxed{u = \frac{(1-x)y}{(1-x)y + xyz}}$$

$$\boxed{1-u = \frac{xyz}{(1-x)y + xyz}}$$

Berechnung des gemeinsamen Schnittpunktes von Eck-Transversalen

$$K = A + s(A'-A) \qquad\qquad A' = B + x(C-B)$$
$$K = (1-s)A + sA' \qquad\qquad A' = (1-x)B + xC$$

$$K = (1-s)A + s\big((1-x)B + xC\big)$$
$$K = (1-s)A + s(1-x)B + sxC$$

Es wäre wünschenswert, dass die Formel folgende Symmetrie hat :

$$K = (1-s)A + (1-t)B + (1-u)C$$

Hierzu müsste man zeigen, dass $s(1-x) = 1-t$ und $sx = 1-u$ gilt !

Zur Frage $s(1-x) = 1-t$:

Es ist $\frac{s}{t} = \frac{1-y}{x}$, also $t = \frac{x}{1-y}\cdot s$, und es folgt :

$$s(1-x) = 1-t$$
$$s(1-x) = 1 - \frac{x}{1-y}\cdot s$$
$$\left[(1-x) + \frac{x}{1-y}\right]s = 1$$
$$\left[\frac{(1-x)(1-y) + x}{1-y}\right]s = 1$$
$$\left[\frac{1-y + xy}{1-y}\right]s = 1$$

$$s = \frac{1-y}{1-y + xy}$$ **wahre Aussage**

Zur Frage $sx = 1-u$:

Es ist $\frac{u}{s} = \frac{1-x}{z}$, also $s = \frac{z}{1-x}\cdot u$, und es folgt :

$$sx = 1-u$$
$$\frac{z}{1-x}ux = 1-u$$
$$\left[\frac{zx}{1-x} + 1\right]u = 1$$

$$\left[\frac{1-x + zx}{1-x}\right]u = 1$$

$$u = \frac{1-x}{1-x + zx}$$ **wahre Aussage**

Also hat man für den Schnittpunkt der Eck-Transversalen folgende Formel:

$$K = (1-s)A + (1-t)B + (1-u)C$$

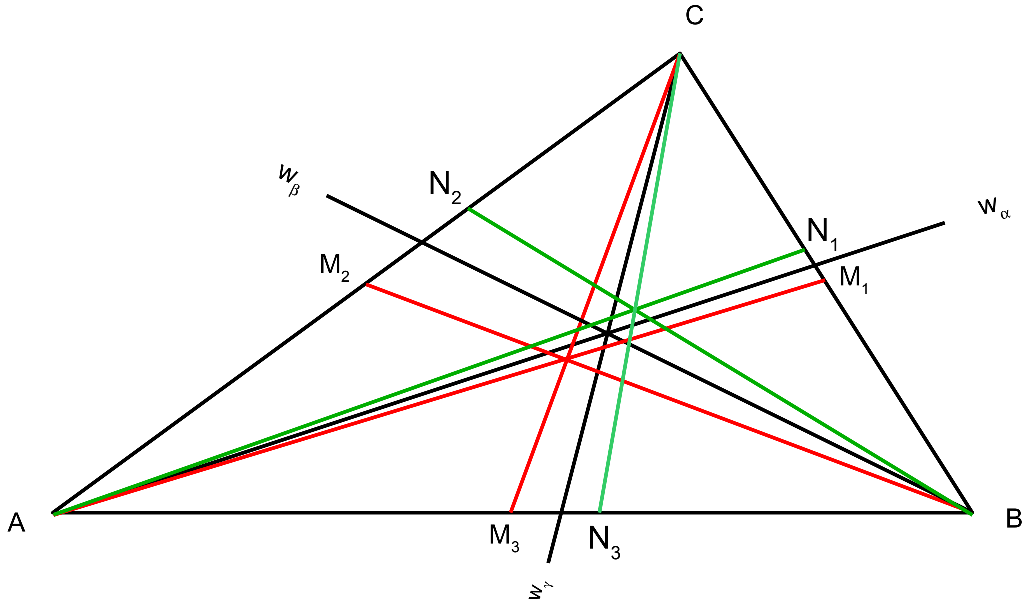
$$\boxed{K = \frac{xy}{1-y + xy} A + \frac{yz}{1-z + yz} B + \frac{zx}{1-x + zx} C}$$

In „symmetrischerer“ Form :

$$\boxed{K = \frac{xyz}{(1-y)z + xyz} A + \frac{xyz}{(1-z)x + xyz} B + \frac{xyz}{(1-x)y + xyz} C}$$

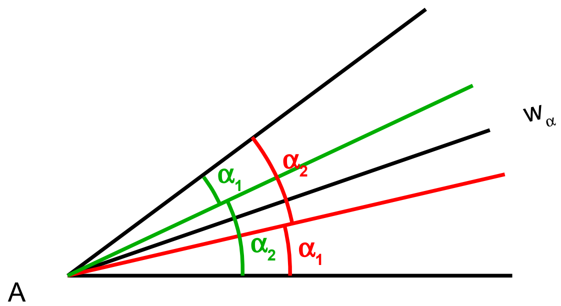
Der Lemoine-Punkt

Spiegelt man die **Medianen** AM_1 , BM_2 , CM_3 an den entsprechenden Winkelhalbierenden w_α , w_β , w_γ , so erhält man die sogenannten **Symmedianen** AN_1 , BN_2 , CN_3 .



Da sich die **Medianen** im Schwerpunkt schneiden, gilt nach dem **Satz von Ceva**

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1 \quad .$$

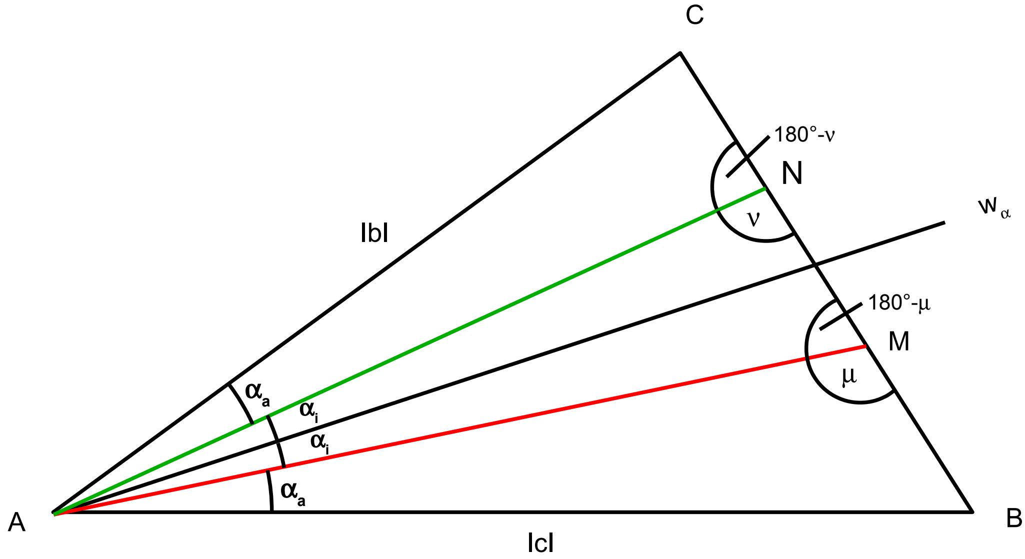


Bildet man den Kehrwert der Gleichung, so stellt die neue Gleichung

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = 1$$

die **Gleichung von Ceva** für die **Symmedianen** dar, so dass sich die **Symmedianen** ebenfalls in einem Punkt , dem sogenannten **Lemoine-Punkt**, schneiden.

Der Satz von Steiner



Für die symmetrisch zur Winkelhalbieren w_α gelegenen Eck-Transfersalen AM , AN gilt :

$$\frac{|M-B|}{|M-C|} \cdot \frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2}$$

Beweis :

Sinussatz:

$$\frac{|M-B|}{|c|} = \frac{\sin \alpha_a}{\sin \mu} \qquad\qquad \frac{|M-C|}{|b|} = \frac{\sin \alpha_a+2\alpha_i}{\sin 180°-\mu}$$

Quotient der beiden Gleichungen :

$$\frac{|M-B|}{|c|} \cdot \frac{|b|}{|M-C|} = \frac{\sin \alpha_a}{\sin \mu} \cdot \frac{\sin 180°-\mu}{\sin \alpha_a+2\alpha_i}$$

$$\frac{|M-B|}{|c|} \cdot \frac{|b|}{|M-C|} = \frac{\sin \alpha_a}{\sin \alpha_a+2\alpha_i}$$

$$\underline{\frac{|M-B|}{|M-C|} = \frac{|c|\sin \alpha_a}{|b|\sin \alpha_a+2\alpha_i}}$$

Analog folgt :

$$\underline{\frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|\sin \alpha_a+2\alpha_i}{|b|\sin \alpha_a}}$$

Produkt der beiden Gleichungen :

$$\frac{|M-B|}{|M-C|} \cdot \frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2}$$

q.e.d.

Spezialfall des Satzes von Steiner

Ist AM der **Median** mit $|M-B| = |M-C|$, dann ist AN der entsprechende **Symmedian**, und es folgt

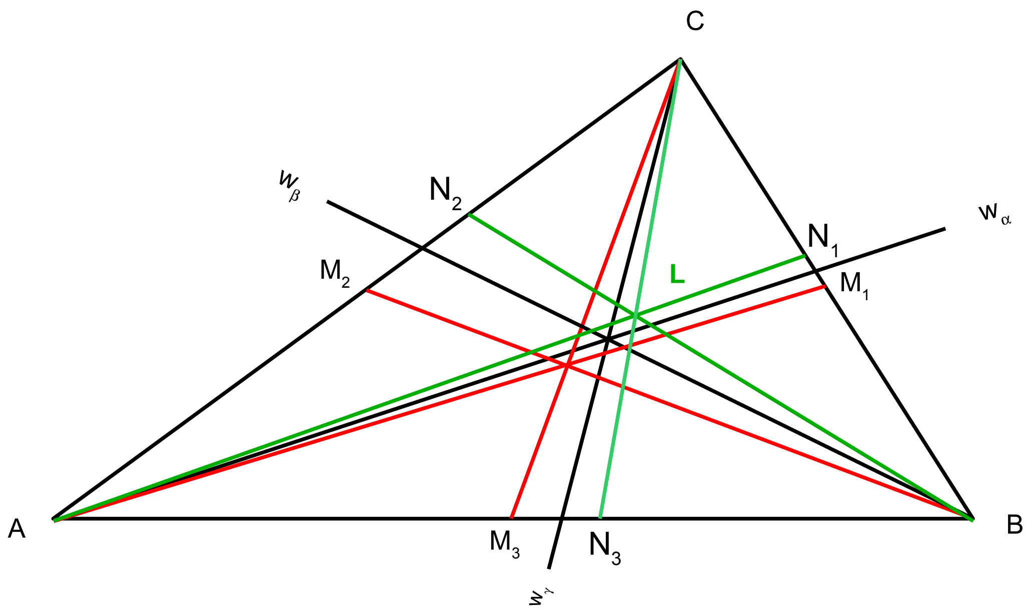
$$\frac{|M-B|}{|M-C|} \cdot \frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2} \quad ,$$

$$\boxed{\frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2}} \quad .$$

Allgemein gilt nun :

Die **Symmediane** teilen die entsprechenden Seiten im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten :

$$\boxed{\frac{|N_1-B|}{|N_1-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2}} \qquad \boxed{\frac{|N_2-C|}{|N_2-A|} = \frac{|a|^2}{|c|^2}} \qquad \boxed{\frac{|N_3-A|}{|N_3-B|} = \frac{|b|^2}{|a|^2}}$$



Die Parameter zur Berechnung des **Lemoine-Punktes** sind nun

$$\frac{x}{1-x} = \frac{|c|^2}{|b|^2} \quad , \qquad \frac{y}{1-y} = \frac{|a|^2}{|c|^2} \quad , \qquad \frac{z}{1-z} = \frac{|b|^2}{|a|^2} \quad ,$$

und es folgt

$$L = \frac{xy}{1-y + xy} A + \frac{yz}{1-z + yz} B + \frac{zx}{1-x + zx} C$$

Berechnung des Koeffizienten von A :

$$x = \frac{|c|^2}{|c|^2+|b|^2} \qquad , \qquad y = \frac{|a|^2}{|a|^2+|c|^2}$$

$$1-y = \frac{|c|^2}{|a|^2+|c|^2}$$

$$\frac{xy}{1-y + xy} = \frac{\dfrac{|c|^2|a|^2}{\left(|c|^2+|b|^2\right)\left(|a|^2+|c|^2\right)}}{\dfrac{|c|^2}{|a|^2+|c|^2} + \dfrac{|c|^2|a|^2}{\left(|c|^2+|b|^2\right)\left(|a|^2+|c|^2\right)}}$$

$$\frac{xy}{1-y + xy} = \frac{|c|^2|a|^2}{|c|^2\left(|c|^2+|b|^2\right) + |c|^2|a|^2}$$

$$\frac{xy}{1-y + xy} = \frac{|a|^2}{|c|^2+|b|^2 + |a|^2}$$

$$\underline{\frac{xy}{1-y + xy} = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$$

Analog folgt : $\underline{\dfrac{yz}{1-z + yz} = \dfrac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$, $\underline{\dfrac{zx}{1-x + zx} = \dfrac{|c|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$

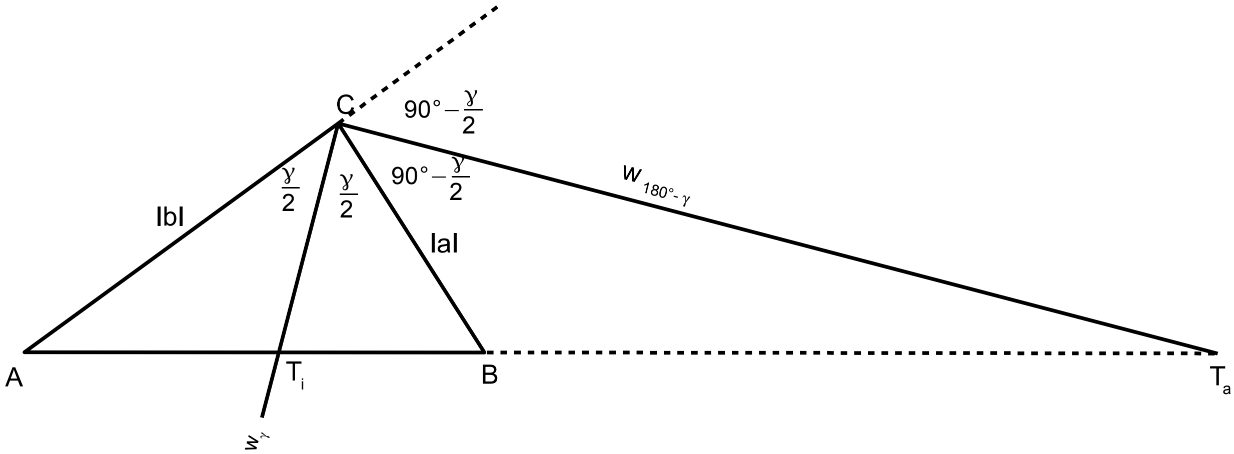
Damit erhält man den **Lemoine-Punkt** zu :

$$\boxed{L = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} A + \frac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} B + \frac{|c|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} C}$$

$$\boxed{L = \frac{|a|^2 A + |b|^2 B + |c|^2 C}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$$

Harmonische Teilung

Die Winkelhalbierenen des Innen- und Außenwinkels eines Dreiecks teilen die Gegenseite **harmonisch** im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten :

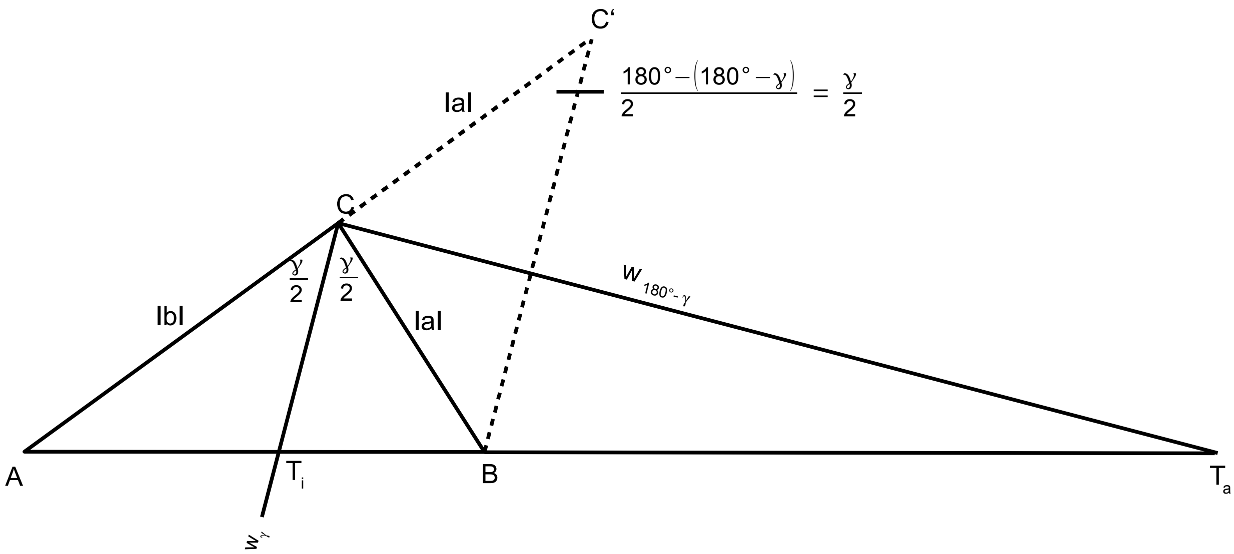


Beispielweise gilt für w_γ :

$$\boxed{\frac{|T_i-A|}{|T_i-B|}=\frac{|T_a-A|}{|T_a-B|}=\frac{|b|}{|a|}}$$

Beweis :

(I)

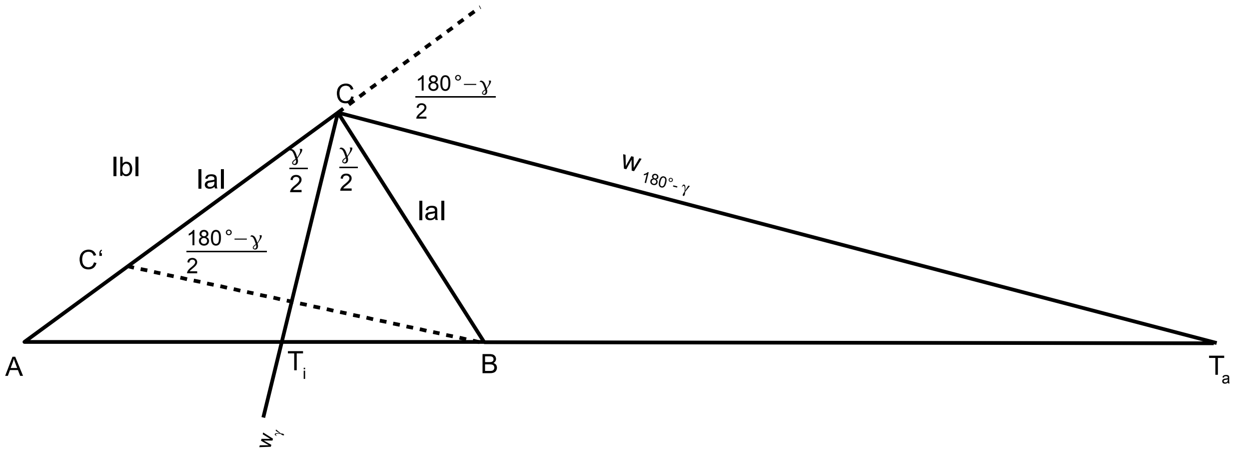


Der Winkel bei C' ist $\dfrac{180°-(180^{-\gamma})}{2}=\dfrac{\gamma}{2}$

Dann ist $w_\gamma \parallel BC'$ und nach dem **1. Strahlensatz** gilt :

$$\frac{|T_i-A|}{|T_i-B|}=\frac{|b|}{|a|}$$

(II)



Der Winkel bei C' ist $\dfrac{180°-\gamma}{2}$.

Dann ist $w_{180°-\gamma} \parallel BC'$ und nach dem **1. Strahlensatz** gilt :

$$\frac{|T_a - A|}{|T_a - B|} = \frac{|b|}{|a|}$$

Die Punkte T_i , T_a teilen also die Strecke AB **harmonisch** :

$$\boxed{\frac{|T_i - A|}{|T_i - B|} = \frac{|T_a - A|}{|T_a - B|} = \frac{|b|}{|a|}}$$

q.e.d.

Berechnung der Teilungspunkte T_i , T_a

$$\frac{T_i - A}{B - T_i} = \frac{|b|}{|a|}$$

$$|a|T_i - |a|A = |b|B - |b|T_i$$

$$(|a|+|b|)T_i = |a|A + |b|B$$

$$\boxed{T_i = \frac{|a|A + |b|B}{|a| + |b|}}$$

$$\frac{T_a - A}{T_a - B} = \frac{|b|}{|a|}$$

$$|a|T_i a\ |a|A = |b|T_a - |b|B$$

$$(|a|-|b|)T_a = |a|A - |b|B$$

$$\boxed{T_{ia} = \frac{|a|A - |b|B}{|a| - |b|}}$$

Der Kreis des Apollonius

Gegeben seien die zwei Punkte A und B in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, deren Abstandsverhältnis zu den gegebenen Punkten konstant ist , für die also gilt

$$\frac{|z-A|}{|z-B|} = k \quad , \quad k \in \mathbb{R} \quad ,$$

liegen auf einem Kreis $K_{M;r}$, dem sogenannten **Apolloniuskreis** zu A , B , k .

Der Mittelpunkt ist $\dfrac{A-k^2B}{1-k^2}$, der Radius ist $\dfrac{k|B-A|}{(1-k^2)}$.

Beweis :

$$\frac{|z-A|}{|z-B|} = k$$

$$|z-A| = k|z-B|$$

$$|z-A|^2 = k^2|z-B|^2$$

$$(z-A)(\bar{z}-\bar{A}) = k^2(z-B)(\bar{z}-\bar{B})$$

$$z\bar{z} - \bar{A}z - A\bar{z} + A\bar{A} = k^2(z\bar{z} - \bar{B}z - B\bar{z} + B\bar{B})$$
$$z\bar{z} - \bar{A}z - A\bar{z} + A\bar{A} = k^2z\bar{z} - k^2\bar{B}z - k^2B\bar{z} + k^2B\bar{B}$$

$$(1-k^2)z\bar{z} - (\bar{A}-k^2\bar{B})z - (A-k^2B)\bar{z} = k^2B\bar{B} - A\bar{A}$$

$$z\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\bar{z} = \frac{k^2B\bar{B} - A\bar{A}}{1-k^2}$$

$$z\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\bar{z} + \frac{(\bar{A}-k^2\bar{B})(A-k^2B)}{(1-k^2)^2} = \frac{k^2B\bar{B} - A\bar{A}}{1-k^2} + \frac{(\bar{A}-k^2\bar{B})(A-k^2B)}{(1-k^2)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \frac{(1-k^2)(k^2B\bar{B} - A\bar{A}) + (\bar{A}-k^2\bar{B})(A-k^2B)}{(1-k^2)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \frac{k^2B\bar{B} \cancel{- A\bar{A}} - \cancel{k^4B\bar{B}} + k^2A\bar{A} \cancel{+ A\bar{A}} - k^2A\bar{B} - k^2\bar{A}B + \cancel{k^4B\bar{B}}}{(1-k^2)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \frac{k^2B\bar{B} + k^2A\bar{A} - k^2A\bar{B} - k^2\bar{A}B}{(1-k^2)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \frac{k^2\left(B\bar{B} + A\bar{A} - A\bar{B} - \bar{A}B\right)}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \frac{k^2\left(B-A\right)\left(\bar{B}-\bar{A}\right)}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \frac{k^2\left|B-A\right|^2}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$\left(z - \frac{A-k^2B}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{A}-k^2\bar{B}}{1-k^2}\right) = \left[\frac{k\left|B-A\right|}{\left|1-k^2\right|}\right]^2$$

Gleichung eines **Kreises** mit **Mittelpunkt** $\frac{A-k^2B}{1-k^2}$ und **Radius** $\frac{k\left|B-A\right|}{\left|1-k^2\right|}$.

q.e.d.

Die Apolloniuskreise der Seiten eines Dreiecks $\Delta\, ABC$

Apolloniuskreis zur Seite $AB \; ; \quad k = \dfrac{|b|}{|a|}$

Mittelpunkt

$$M_{AB} = \frac{A - k^2 B}{1 - k^2}$$

$$M_{AB} = \frac{A - \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^2 B}{1 - \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^2}$$

$$\boxed{M_{AB} = \frac{|a|^2 A \; - \; |b|^2 B}{|a|^2 \; - \; |b|^2}}$$

Radius

$$r_{AB} = \frac{k|B - A|}{|1 - k^2|}$$

$$r_{AB} = \frac{\frac{|b|}{|a|}|B - A|}{\left|1 - \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^2\right|}$$

$$r_{AB} = \frac{|a||b||B - A|}{\left||a|^2 - |b|^2\right|}$$

$$\boxed{r_{AB} = \frac{|a||b||c|}{\left||a|^2 - |b|^2\right|}}$$

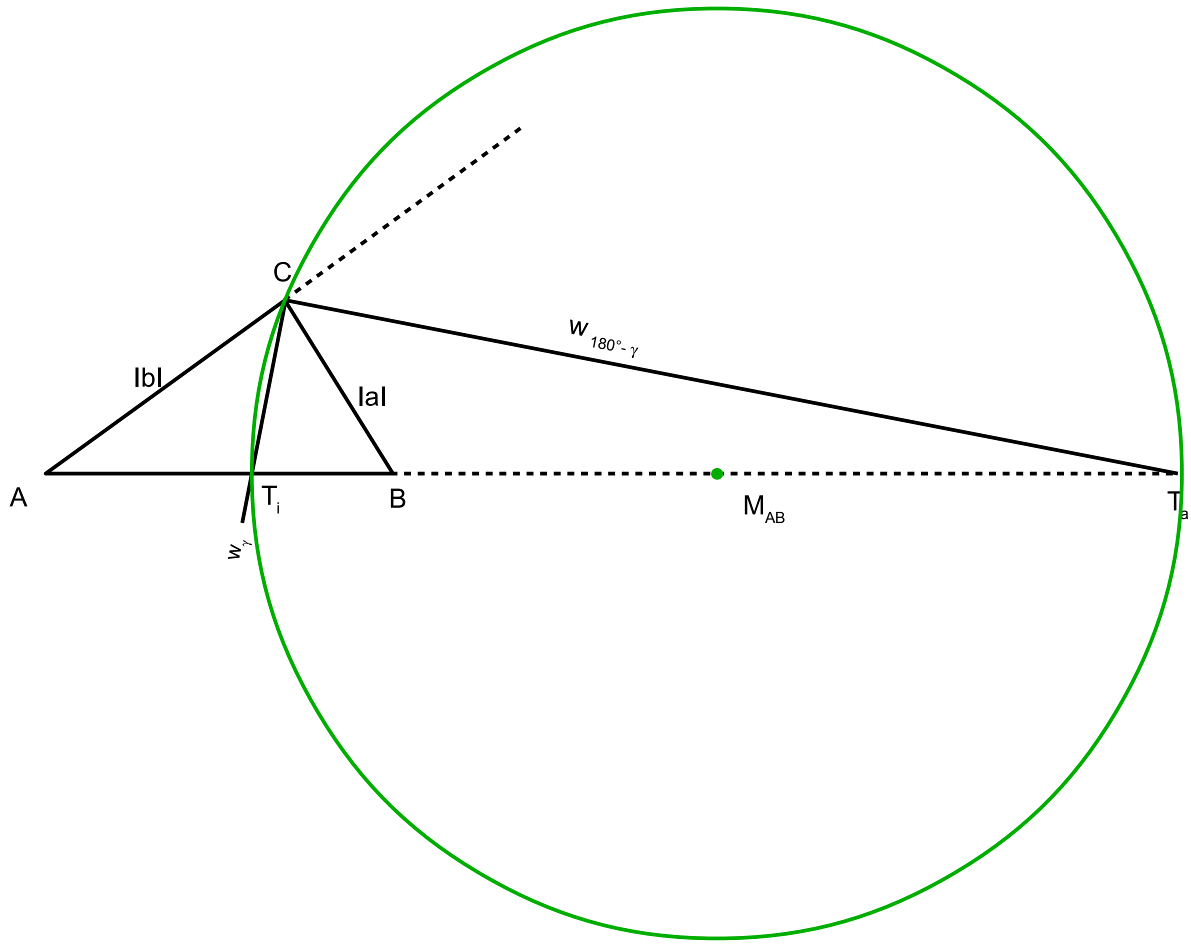
Apolloniuskreis zur Seite $BC \; ; \quad k = \dfrac{|c|}{|b|}$

$$\boxed{M_{BC} = \frac{|b|^2 B \; - \; |c|^2 C}{|b|^2 \; - \; |c|^2}} \qquad \boxed{r_{BC} = \frac{|a||b||c|}{\left||b|^2 - |c|^2\right|}}$$

Apolloniuskreis zur Seite $CA \; ; \quad k = \dfrac{|a|}{|c|}$

$$\boxed{M_{CA} = \frac{|c|^2 C \; - \; |a|^2 A}{|c|^2 \; - \; |a|^2}} \qquad \boxed{r_{CA} = \frac{|a||b||c|}{\left||c|^2 - |a|^2\right|}}$$

Der Apolloniuskreis zur Seite AB



$$\boxed{T_i = \frac{|a|A + |b|B}{|a| + |b|}} \quad , \quad \boxed{T_{ia} = \frac{|a|A - |b|B}{|a| - |b|}}$$

$$\boxed{M_{AB} = \frac{|a|^2 A - |b|^2 B}{|a|^2 - |b|^2}} \quad , \quad \boxed{r_{AB} = \frac{|a||b||c|}{\left||a|^2 - |b|^2\right|}}$$

Satz :

Die Mittelpunkte der **Apolloniuskreise zu den Seiten eines Dreiecks** liegen auf einer Geraden, der **Lemoine-Geraden**.

Beweis :

Die Mittelpunkte der Apolloniuskreise zu den Seiten AB , BC , CA sind :

$$M_{AB} = \frac{|a|^2 A - |b|^2 B}{|a|^2 - |b|^2} \quad , \quad M_{BC} = \frac{|b|^2 B - |c|^2 C}{|b|^2 - |c|^2} \quad , \quad M_{CA} = \frac{|c|^2 C - |a|^2 A}{|c|^2 - |a|^2}$$

Man betrachtet zunächst die Gerade $M_{AB}M_{BC}$, bzw. $M_{BC} - M_{AB}$:

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{|b|^2 B - |c|^2 C}{|b|^2 - |c|^2} - \frac{|a|^2 A - |b|^2 B}{|a|^2 - |b|^2}$$

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 B - |c|^2 C\right) - \left(|b|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 A - |b|^2 B\right)}{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 - |c|^2\right)}$$

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{|a|^2|b|^2 B - |a|^2|c|^2 C - |b|^4 B + |b|^2|c|^2 C - |a|^2|b|^2 A + |b|^4 B + |a|^2|c|^2 A - |b|^2|c|^2 B}{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 - |c|^2\right)}$$

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{|a|^2|b|^2 B - |a|^2|c|^2 C \cancel{- |b|^4 B} + |b|^2|c|^2 C - |a|^2|b|^2 A \cancel{+ |b|^4 B} + |a|^2|c|^2 A - |b|^2|c|^2 B}{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 - |c|^2\right)}$$

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{\underline{|a|^2|b|^2 B} - \underline{|a|^2|c|^2 C} + \underline{|b|^2|c|^2 C} - \underline{|a|^2|b|^2 A} + \underline{|a|^2|c|^2 A} - \underline{|b|^2|c|^2 B}}{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 - |c|^2\right)}$$

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{|b|^2|c|^2(C-B) + |a|^2|c|^2(A-C) + |a|^2|b|^2(B-A)}{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 - |c|^2\right)}$$

$$M_{BC} - M_{AB} = \frac{|b|^2|c|^2 a + |c|^2|a|^2 b + |a|^2|b|^2 c}{\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(|b|^2 - |c|^2\right)}$$

Die Richtung der Geraden $M_{AB}M_{BC}$ ist gegeben durch $d: = |b|^2|c|^2 a + |c|^2|a|^2 b + |a|^2|b|^2 c$.

Die Gleichung der Geraden $M_{AB}M_{BC}$ ist gegeben durch

$$\bar{d}z - d\bar{z} = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}} \ .$$

Man muss zeigen, das der Mittelpunkt M_{CA} auf der Geraden $M_{AB}M_{BC}$ liegt, also man muss zeigen, dass

$$\bar{d}M_{CA} - d\overline{M_{CA}} = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}}$$

gilt .

Es folgt nacheinander

$$\bar{d}M_{CA} - d\overline{M_{CA}} = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}}$$

$$\bar{d}\left(M_{CA} - M_{AB}\right) = d\left(\overline{M_{CA}} - \overline{M_{AB}}\right)$$

$$\bar{d}\left(M_{CA} - M_{AB}\right) - d\left(\overline{M_{CA}} - \overline{M_{AB}}\right) = 0$$

$$\frac{\bar{d}\left(M_{CA} - M_{AB}\right) - d\left(\overline{M_{CA}} - \overline{M_{AB}}\right)}{2i} = 0$$

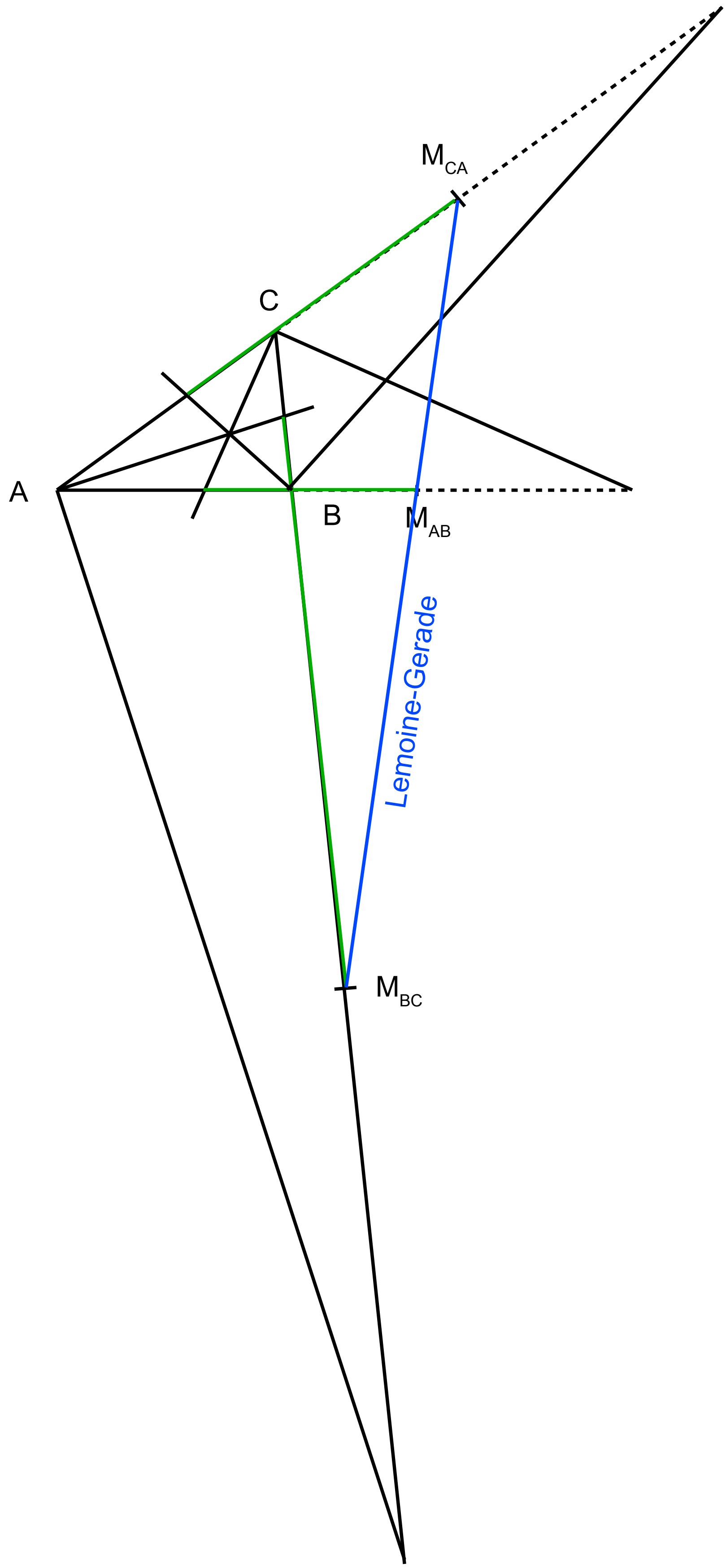
$$d \otimes \left(M_{CA} - M_{AB}\right) = 0$$

$|d|\left|M_{CA} - M_{AB}\right|\sin\alpha = 0$, wobei α der Winkel zwischen d und $\left(M_{CA} - M_{AB}\right)$ ist !

Damit folgt $\alpha = 0$, das heißt dass M_{CA} auf der Geraden $M_{AB}M_{BC}$ liegt.

q.e.d.

Bild zur Lemoine-Geraden

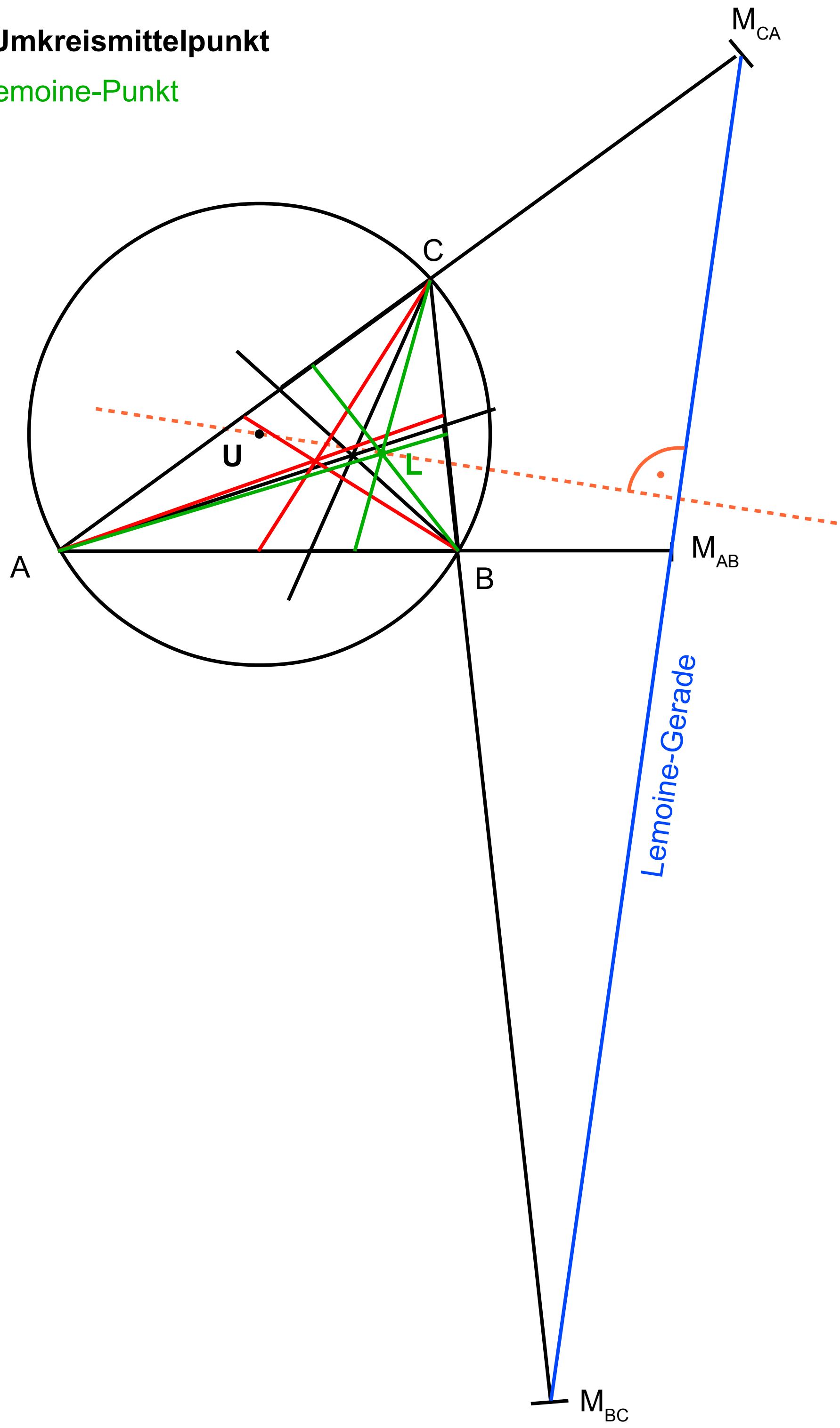


Satz

Gegeben sei das Dreieck $\Delta\, ABC$.
Dann ist die Gerade durch den Umkreismittelpunkt und den Lemoine-Punkt orthogonal zur Lemoine-Geraden .

U = **Umkreismittelpunkt**

L = Lemoine-Punkt



Beweis :

Nach dem Beweis des vorigen Satzes ist die **Richtung der Lemoine-Geraden** $M_{AB}M_{BC}$ gegeben durch

$$d = |b|^2|c|^2 a + |c|^2|a|^2 b + |a|^2|b|^2 c \quad .$$

$$d = |a|^2|b|^2|c|^2\frac{a}{|a|^2} + |a|^2|b|^2|c|^2\frac{b}{|b|^2} + |a|^2|b|^2|c|^2\frac{c}{|c|^2}$$

$$d = |a|^2|b|^2|c|^2\left[\frac{a}{|a|^2} + \frac{b}{|b|^2} + \frac{c}{|c|^2}\right)$$

$$d = |a|^2|b|^2|c|^2\left[\frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}}\right)$$

Die **Richtung der Lemoine-Geraden** stellt sich, da man den reellen Faktor weglassen kann, vereinfacht so dar :

$$\boxed{d := \frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}}} \quad , \quad \boxed{\overline{d} := \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Der **Umkreismittelpunkt** U des Dreiecks ΔABC ist gegeben durch

$$U = \frac{|A|^2 a + |B|^2 b + |C|^2 c}{\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c}$$

vgl. [Arno Fehringer : Geometrie in der komplexen Zahlenebene, S. 24]

Bermerkung :

Der **Nenner** $\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c$ ist **rein imaginär**, denn :

$$\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c = \overline{A}(C-B) + \overline{B}(A-C) + \overline{C}(B-A)$$

$$\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c = \overline{A}C-\overline{A}B + \overline{B}A-\overline{B}C + \overline{C}B-\overline{C}A$$

$$\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c = -A(\overline{C}-\overline{B}) - B(\overline{A}-\overline{C}) - C(\overline{B}-\overline{A})$$

$$\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c = -A\overline{a} - B\overline{b} - C\overline{c}$$

$$\overline{A}\ a + \overline{B}\ b + \overline{C}\ c = -[A\overline{a} + B\overline{b} + C\overline{c}]$$

$$\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c = -\left[\overline{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c}\right]$$

Jetzt kann man die Formel für den **Umkreismittelpunkt** auch mit reellem Nenner schreiben, wenn man mit der imaginären Einheit erweitert :

$$U = \frac{|A|^2 ai + |B|^2 bi + |C|^2 ci}{\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci}$$

$$\boxed{U = \frac{A\overline{A}i + B\overline{B}bi + C\overline{C}ci}{\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci}}$$

Der **Lemoine-Punkt** ist der gemeinsame Schnittpunkt der **Symmedianen** mit den entsprechend zugehörigen Teilverhältnissen

$$x = \frac{|c|^2}{|c|^2+|b|^2} \quad , \quad y = \frac{|a|^2}{|a|^2+|c|^2} \quad , \quad z = \frac{|b|^2}{|b|^2+|a|^2} \quad .$$

Einsetzen dieser Werte in die allgemeine Formel für den gemeinsamen Schnittpunkt

$$L = \frac{xy}{1-y + xy} A + \frac{yz}{1-z + yz} B + \frac{zx}{1-x + zx} C$$

liefert

$$L = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} A + \frac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} B + \frac{|c|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} C$$

[Vgl. ,S. 112, 113]

$$\boxed{L = \frac{|a|^2 A + |b|^2 B + |c|^2 C}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$$

Berechnung der Richtung der Geraden UL :

$$L-U = \frac{|a|^2 A + |b|^2 B + |c|^2 C}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} - \frac{A\bar{A}ai + B\bar{B}bi + C\bar{C}ci}{\bar{A}ai + \bar{B}bi + \bar{C}ci}$$

$$L-U = \frac{\left(|a|^2 A+|b|^2 B+|c|^2 C\right)\left(\bar{A}ai + \bar{B}bi + \bar{C}ci\right) - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\bar{A}ai + B\bar{B}bi + C\bar{C}ci\right)}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(\bar{A}ai+\bar{B}bi+\bar{C}ci\right)}$$

Zur Bestimmung der Richtung der Geraden UL kann man den reellen Nenner jetzt weglassen :

$$e := \left(|a|^2 A+|b|^2 B+|c|^2 C\right)\left(\bar{A}ai+\bar{B}bi+\bar{C}ci\right) - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\bar{A}ai+B\bar{B}bi+C\bar{C}ci\right)$$

$$\begin{aligned} e = &\left(|a|^2 A+|b|^2 B+|c|^2 C - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)A\right)\bar{A}ai \\ &+\left(|a|^2 A+|b|^2 B+|c|^2 C - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)B\right)\bar{B}bi \\ &+\left(|a|^2 A+|b|^2 B+|c|^2 C - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)C\right)\bar{C}ci \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e = &\left(|b|^2 B+|c|^2 C - \left(|b|^2+|c|^2\right)A\right)\bar{A}ai \\ &+\left(|a|^2 A+|c|^2 C - \left(|a|^2+|c|^2\right)B\right)\bar{B}bi \\ &+\left(|a|^2 A+|b|^2 B - \left(|a|^2+|b|^2\right)C\right)\bar{C}ci \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e = &\left(|b|^2 B+|c|^2 C - |b|^2 A-|c|^2 A\right)\bar{A}ai \\ &+\left(|a|^2 A+|c|^2 C - |a|^2 B-|c|^2 B\right)\bar{B}bi \\ &+\left(|a|^2 A+|b|^2 B - |a|^2 C-|b|^2 C\right)\bar{C}ci \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e \;=\; & \left(|b|^2(B-A)-|c|^2(A-C)\right)\bar{A}ai \\
& +\left(|c|^2(C-B)-|a|^2(B-A)\right)\bar{B}bi \\
& +\left(|a|^2(A-C)|b|^2-(C-B)\right)\bar{C}ci
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e \;=\; & \left(|b|^2c \;-\; |c|^2b\right)\bar{A}ai \\
& +\left(|c|^2a \;-\; |a|^2c\right)\bar{B}bi \\
& +\left(|a|^2b \;-\; |b|^2a\right)\bar{C}ci
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e \;=\; & \left(\underline{|b|^2ac\bar{A}i} \;-\; \underline{|c|^2ab\bar{A}i}\right) \\
& +\left(\underline{|c|^2ab\bar{B}i} \;-\; \underline{|a|^2bc\bar{B}i}\right) \\
& +\left(\underline{|a|^2bc\bar{C}i} \;-\; \underline{|b|^2ac\bar{C}i}\right)
\end{aligned}
$$

$$e \;=\; |a|^2bc(\bar{C}-\bar{B})i \;+\; |b|^2ac(\bar{A}-\bar{C})i \;+\; |c|^2ab(\bar{B}-\bar{A})i$$

$$e \;=\; |a|^2bc\bar{a}i \;+\; |b|^2ac\bar{b}i \;+\; |c|^2ab\bar{c}i$$

$$e \;=\; abc\overline{a^2}i \;+\; abc\overline{b^2}i \;+\; abc\overline{c^2}i$$

$$\boxed{e \;=\; abci\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right]} \quad , \quad \boxed{\bar{e} \;=\; -\bar{a}\bar{b}\bar{c}i\left[a^2 \;+\; b^2 \;+\; c^2\right]}$$

Wenn die Richtungen e **und** d **orthogonal zueinander sind, muss gellten**

$$e \odot d \;:=\; \frac{e\bar{d} \;+\; \bar{e}d}{2} \;=\; |d||e|\cos 90° \;=\; 0 \quad ,$$

$$\bar{e}d \;+\; e\bar{d} \;=\; 0 \quad .$$

Berechnung von $\bar{e}d$, $e\bar{d}$ **:**

$$\bar{e}d \;=\; -\bar{a}\bar{b}\bar{c}i\left[a^2 \;+\; b^2 \;+\; c^2\right]\left[\frac{1}{\bar{a}} \;+\; \frac{1}{\bar{b}} \;+\; \frac{1}{\bar{c}}\right]$$

$$\bar{e}d \;=\; -\bar{b}\bar{c}i\left[a^2 \;+\; b^2 \;+\; c^2\right] \;-\; \bar{a}\bar{c}i\left[a^2 \;+\; b^2 \;+\; c^2\right] \;-\; \bar{a}\bar{b}i\left[a^2 \;+\; b^2 \;+\; c^2\right]$$

$$\underline{\bar{e}d \;=\; -\left[\bar{b}\bar{c} \;+\; \bar{a}\bar{c} \;+\; \bar{a}\bar{b}\right]\left[a^2 \;+\; b^2 \;+\; c^2\right]i}$$

$$e\bar{d} \;=\; abci\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right]\left[\frac{1}{a} \;+\; \frac{1}{b} \;+\; \frac{1}{c}\right]$$

$$e\bar{d} \;=\; bci\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right] \;+\; aci\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right] \;+\; abi\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right]$$

$$\underline{e\bar{d} \;=\; \left[bc \;+\; ac \;+\; ab\right]\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right]i}$$

Wegen der **Trinomischen Formel** und weil $a+b+c \;=\; 0$ folgt

$$(a+b+c)^2 \;=\; a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$0 \;=\; a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$2ab+2ac+2bc = -\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\underline{ab + ac + bc = -\frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2}}$$

Analog :

$$\underline{\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} = -\frac{\left(\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right)}{2}}$$

Damit ergeben sich die Ausdrücke $\bar{e}d$, $e\bar{d}$ wie folgt

$$\bar{e}d = -\left[\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\right]\left[a^2 + b^2 + c^2\right]i \qquad e\bar{d} = \left[bc + ac + ab\right]\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]i$$

$$\bar{e}d = \frac{\left(\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right)}{2}\left[a^2 + b^2 + c^2\right]i \qquad e\bar{d} = -\frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2}\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]i$$

$$\bar{e}d = \frac{\left(\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right)\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}{2}i \qquad e\bar{d} = -\frac{\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2}i$$

und es ist

$$\bar{e}d + e\bar{d} = \frac{\left(\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right)\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}{2}i - \frac{\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2}i$$

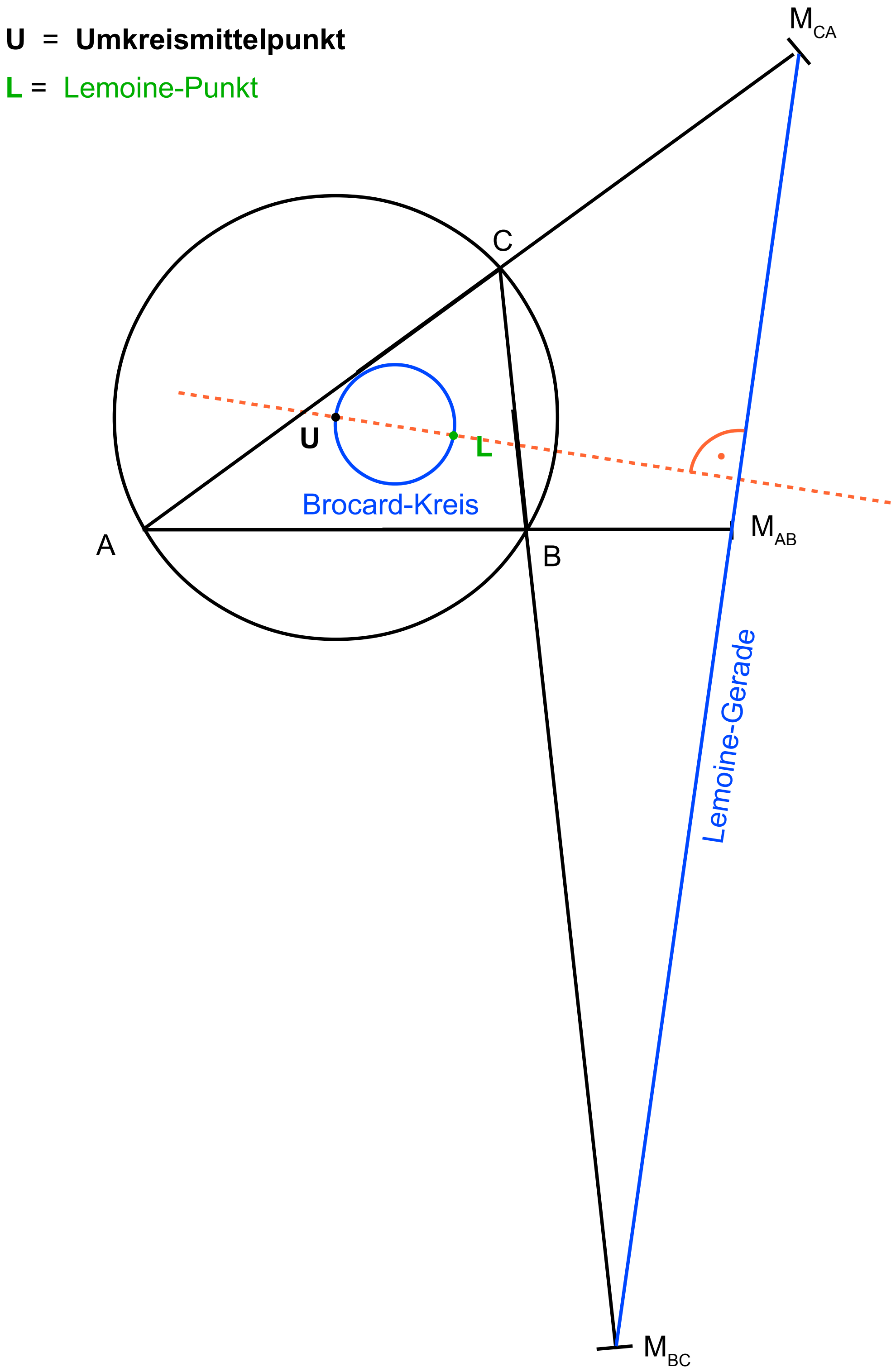
$$\bar{e}d + e\bar{d} = 0$$

q.e.d.

Satz

Gegeben sei das Dreieck ΔABC . Nach dem vorigen Satz ist die Gerade durch den Umkreismittelpunkt und den Lemoine-Punkt orthogonal zur Lemoine-Geraden .

Spiegelt man den **Thaleskreis über dem Umkreismittelpunkt und dem Lemoine-Punkt**, den sogenannten **Brocard-Kreis**, am Umkreis, so erhält man die **Lemoine-Gerade**.



Beweis :

Man muss zeigen, dass der Spiegelpunkt des Lemoine-Punktes auf der Lemoine-Geraden liegt !

Der Spiegelpunkt ist

$$L^* = U + \frac{R^2}{\overline{L-U}} \qquad ,$$

mit

$$U = \frac{A\overline{A}a + B\overline{B}b + C\overline{C}c}{\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c} \qquad ,$$

$$U = \frac{A\overline{A}ai + B\overline{B}bi + C\overline{C}ci}{\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci} \qquad \text{(reeller Nenner)}$$

$$R^2 = \frac{|a|^2|b|^2|c|^2}{|\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c|^2} \qquad ,$$

$$L = \frac{|a|^2A + |b|^2B + |c|^2C}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}$$

[Vgl. S. 25, 26]
[Vgl. S. 112, 113]

$$L-U = \frac{|a|^2A + |b|^2B + |c|^2C}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} - \frac{A\overline{A}ai + B\overline{B}bi + C\overline{C}ci}{\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci}$$

$$L-U = \frac{\left(|a|^2A+|b|^2B+|c|^2C\right)\left(\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci\right) - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\overline{A}ai + B\overline{B}bi + C\overline{C}ci\right)}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(\overline{A}ai+\overline{B}bi+\overline{C}ci\right)}$$

Man vereinfacht zunächst den Zähler des Ausdrucks für $L-U$ **:**

$$\left(|a|^2A+|b|^2B+|c|^2C\right)\left(\overline{A}ai+\overline{B}bi+\overline{C}ci\right) - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\overline{A}ai+B\overline{B}bi+C\overline{C}ci\right)$$

$$\begin{aligned} = \; & \left(|a|^2A+|b|^2B+|c|^2C - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)A\right)\overline{A}ai \\ & +\left(|a|^2A+|b|^2B+|c|^2C - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)B\right)\overline{B}bi \\ & +\left(|a|^2A+|b|^2B+|c|^2C - \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)C\right)\overline{C}ci \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \; & \left(|b|^2B+|c|^2C - \left(|b|^2+|c|^2\right)A\right)\overline{A}ai \\ & +\left(|a|^2A+|c|^2C - \left(|a|^2+|c|^2\right)B\right)\overline{B}bi \\ & +\left(|a|^2A+|b|^2B - \left(|a|^2+|b|^2\right)C\right)\overline{C}ci \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & \left(|b|^2 B+|c|^2 C \;-\; |b|^2 A-|c|^2 A\right)\bar{A}\,a\,i \\
& +\left(|a|^2 A+|c|^2 C \;-\; |a|^2 B-|c|^2 B\right)\bar{B}\,b\,i \\
& +\left(|a|^2 A+|b|^2 B \;-\; |a|^2 C-|b|^2 C\right)\bar{C}\,c\,i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & \left(|b|^2(B-A)-|c|^2(A-C)\right)\bar{A}\,a\,i \\
& +\left(|c|^2(C-B)-|a|^2(B-A)\right)\bar{B}\,b\,i \\
& +\left(|a|^2(A-C)|b|^2-(C-B)\right)\bar{C}\,c\,i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & \left(|b|^2 c \;-\; |c|^2 b\right)\bar{A}\,a\,i \\
& +\left(|c|^2 a \;-\; |a|^2 c\right)\bar{B}\,b\,i \\
& +\left(|a|^2 b \;-\; |b|^2 a\right)\bar{C}\,c\,i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & \left(\underline{|b|^2 a c\bar{A} i} \;-\; \underline{|c|^2 a b\bar{A} i}\right) \\
& +\left(\underline{|c|^2 a b\bar{B} i} \;-\; \underline{|a|^2 b c\bar{B} i}\right) \\
& +\left(\underline{|a|^2 b c\bar{C} i} \;-\; \underline{|b|^2 a c\bar{C} i}\right)
\end{aligned}$$

$$= \; |a|^2 bc(\bar{C}-\bar{B})i \;+\; |b|^2 ac(\bar{A}-\bar{C})i \;+\; |c|^2 ab(\bar{B}-\bar{A})i$$

$$= \; |a|^2 bc\bar{a}i \;+\; |b|^2 ac\bar{b}i \;+\; |c|^2 ab\bar{c}i$$

$$= \; abc\overline{a^2}i \;+\; abc\overline{b^2}i \;+\; abc\overline{c^2}i$$

$$= \; abci\left[\overline{a^2} \;+\; \overline{b^2} \;+\; \overline{c^2}\right]$$

Also folgt weiter :

$$L-U = \frac{abci\left[\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}\right]}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(\bar{A}ai+\bar{B}bi+\bar{C}ci\right)} \quad , \quad \bar{L}-\bar{U} = \frac{-\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}i\left[a^2+b^2+c^2\right]}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(-A\bar{a}i-B\bar{b}i-C\bar{c}i\right)}$$

$$|L-U| = \frac{|a||b||c|\left|a^2+b^2+c^2\right|}{\left||a|^2+|b|^2+|c|^2\right| \; \left|\bar{A}a+\bar{B}b+\bar{C}c\right|}$$

$$\bar{L}-\bar{U} = \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}i\left[a^2+b^2+c^2\right]}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\bar{a}i+B\bar{b}i+C\bar{c}i\right)}$$

$$\bar{L}-\bar{U} = \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\left[a^2+b^2+c^2\right]}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\bar{a}+B\bar{b}+C\bar{c}\right)}$$

$$L^* = U + \frac{R^2}{\bar{L}-\bar{U}}$$

$$L^* = U + R^2\,\frac{1}{\bar{L}-\bar{U}}$$

$$L^* = U + \frac{|a|^2|b|^2|c|^2}{\left|\bar{A}a + \bar{B}b + \bar{C}c\right|^2}\;\frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(A\bar{a}+B\bar{b}+C\bar{c}\right)}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\left[a^2+b^2+c^2\right]}$$

$$L^* = U + \frac{abc}{\left(\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c\right)} \frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}$$

$$L^* = U + \frac{abci}{\left(\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci\right)} \frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}$$

$$L^* = U + \frac{abci}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]} \frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left(\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci\right)}$$

Bemerkung :

Da der Nenner von $L-U = \dfrac{abci\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]}{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\ \left(\overline{A}ai+\overline{B}bi+\overline{C}ci\right)}$ reell ist , kann man als Richtung für die Gerade durch U und L den Zähler nehmen :

$$abci\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right] = \frac{abci\left|a^2 + b^2 + c^2\right|^2}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}$$

Lässt man den reellen Faktor weg, ist die **Richtung der Geraden durch** U **und** L :

$\boxed{e := \dfrac{abci}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}}$, mit $\boxed{\overline{e} := -\dfrac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}i}{\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]}}$, $\boxed{|e| = \dfrac{|a||b||c|}{\left|a^2 + b^2 + c^2\right|}}$

Damit folgt weiter :

$$L^* = U + \frac{abci}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]} \frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left(\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci\right)}$$

$$L^* = U + e\,\frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left(\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci\right)}$$

$$\underline{L^* = U + \frac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left(\overline{A}ai + \overline{B}bi + \overline{C}ci\right)}\,e}$$

Die **Richtung der Lemoine-Geraden** steht senkrecht auf der Richtung der Geraden durch U und L :

$\boxed{d = \dfrac{abc}{\left[a^2 + b^2 + c^2\right]}}$, $\boxed{\overline{d} = \dfrac{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}{\left[\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{c^2}\right]}}$, $\boxed{|d| = \dfrac{|a||b||c|}{\left|a^2 + b^2 + c^2\right|}}$,

$$e = di$$

Die **Gleichung der Lemoine-Geraden** ist :

$$\bar{d}z - d\bar{z} = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}}$$

Man muss zeigen, dass L^* diese Gleichung erfüllt :

$$\bar{d}L^* - d\bar{L}^* = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}}$$

Setzt man vorübergehend $L^* = U + v\ e$ mit $v := \dfrac{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)}{\left(\bar{A}ai + \bar{B}bi + \bar{C}ci\right)} \in \mathbb{R}^+$, und setzt diesen Term in die Geradengleichung ein, so folgt :

$$\bar{d}L^* - d\bar{L}^* = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}}$$
$$\bar{d}(U+ve) - d(\bar{U}+v\bar{e}) = \bar{d}M_{AB} - d\overline{M_{AB}}$$
$$\bar{d}\left(U-M_{AB}+ve\right) - d\left(\bar{U}-\overline{M_{AB}}+v\bar{e}\right) = 0$$
$$\bar{d}\left(U-M_{AB}\right) - d\left(\bar{U}-\overline{M_{AB}}\right) = -v\left(\bar{d}e-d\bar{e}\right)$$

Da der Abstand eines Punktes U von einer Geraden durch den Punkt M_{AB} in Richtung d gegeben ist durch

$$F-U = \frac{\bar{d}\left(M_{AB}-U\right) + d\left(\overline{M_{AB}}-\bar{U}\right)}{2\bar{d}} \quad ,$$

Formt man die Gleichung um und und schreibt :

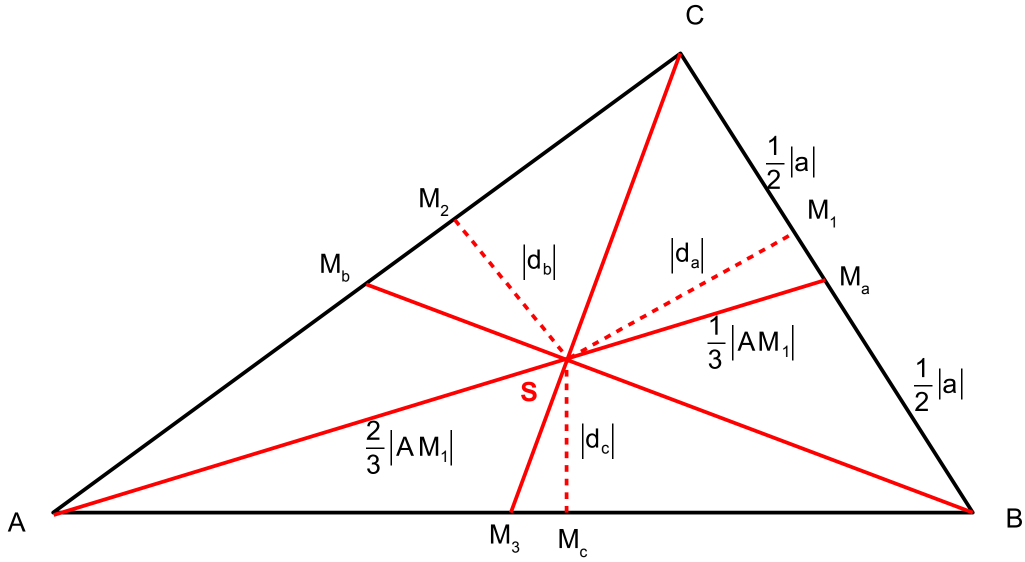
$$-\left(\bar{d}\left(M_{AB}-U\right) - d\left(\overline{M_{AB}}-\bar{U}\right)\right) = -v\left(\bar{d}e-d\bar{e}\right)$$
$$-\left(\bar{d}\left(M_{AB}-U\right) - d\left(\overline{M_{AB}}-\bar{U}\right)\right) = -v\left(\bar{d}e-d\bar{e}\right)$$
$$\bar{d}\left(M_{AB}-U\right) - d\left(\overline{M_{AB}}-\bar{U}\right) = v\left(\bar{d}e-d\bar{e}\right) \qquad | : 2\bar{d}$$
$$\frac{\bar{d}\left(M_{AB}-U\right) - d\left(\overline{M_{AB}}-\bar{U}\right)}{2\bar{d}} = v\,\frac{\bar{d}e-d\bar{e}}{2\bar{d}}$$
$$F-U = v\,\frac{\left(\bar{d}e-d\bar{e}\right)}{2\bar{d}}$$
$$F-U = v\,\frac{\bar{d}di-d\left(-i\bar{d}\right)}{2\bar{d}}$$
$$F-U = v\,\frac{2\bar{d}di}{2\bar{d}}$$
$$F-U = v\ di$$
$$F-U = v\ e$$
$$F = U + v\ e$$
$$F = L^*$$

q.e.d.

Satz

Die Abstände des Schwerpunktes S eines Dreiecks ΔABC zu den Seiten a , b , c verhalten sich wie die Kehrwerte der Seiten :

$$|d_a| : |d_b| : |d_c| = \frac{1}{|a|} : \frac{1}{|b|} : \frac{1}{|c|}$$



Beweis :

$$A_{\Delta ABM_1} = \frac{1}{2} A_{\Delta ABC}$$

$$A_{\Delta SBM_1} = \frac{1}{3} A_{\Delta ABM_1}$$

$$A_{\Delta SBM_1} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} A_{\Delta ABC}$$

$$A_{\Delta SBM_1} = \frac{1}{6} A_{\Delta ABC}$$

Analoge Betrachtungen führen zu folgender Aussage :
Die 3 Medianen zerlegen das Dreieck ΔABC in 6 gleich große Teildreiecke .

Für die Flächeninhalte der Dreiecke ΔBCS , ΔCAS , ΔABS mit den Höhen d_a , d_b , d_c gilt :

$$\frac{1}{2}|a||d_a| = \frac{1}{2}|b||d_b| = \frac{1}{2}|c||d_c| = \frac{1}{3} A_{\Delta ABC}$$

$$|d_a| = \frac{2}{3|a|} A_{\Delta ABC} \quad , \quad |d_b| = \frac{2}{3|b|} A_{\Delta ABC} \quad , \quad |d_c| = \frac{2}{3|c|} A_{\Delta ABC}$$

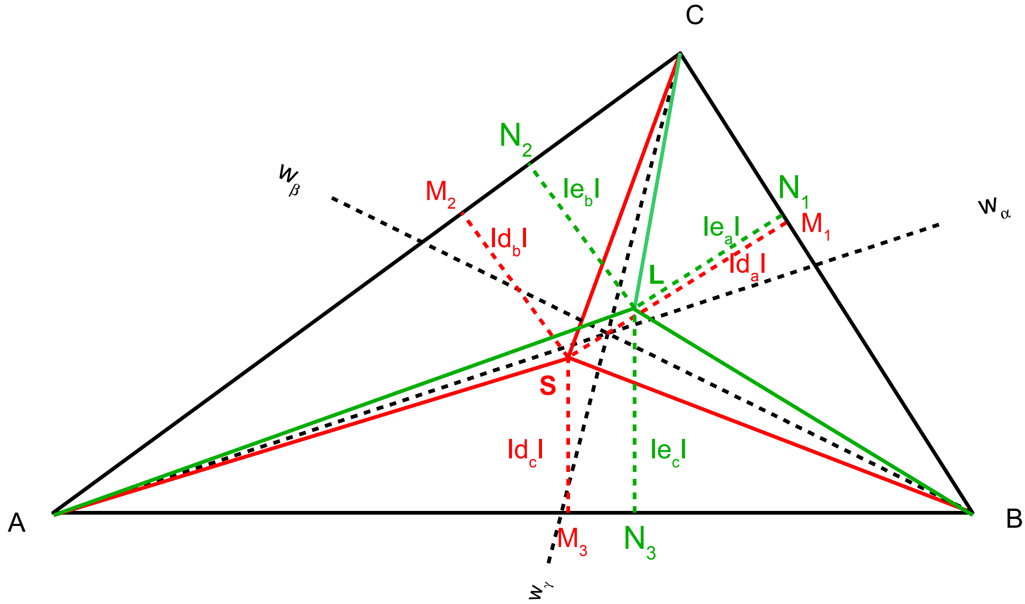
$$|d_a| : |d_b| : |d_c| = \frac{1}{|a|} : \frac{1}{|b|} : \frac{1}{|c|}$$

q.e.d.

Satz

Die Abstände des **Lemoine-Punktes** L eines Dreiecks ΔABC zu den Seiten a , b , c verhalten sich wie die Seiten :

$$|e_a| : |e_b| : |e_c| \quad = \quad |a| : |b| : |c|$$



Beweis :

Da die Winkelhalbierenden die Medianen in die Symmedianen spiegeln gilt :

$$\underline{\sphericalangle LCN_1} = \underline{\sphericalangle SCM_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta LCN_1} \sim \underline{\Delta SCM_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{|e_a|} : \underline{|d_b|} \;=\; \underline{|CL|} : \underline{|CS|}$$

$$\underline{\sphericalangle LCN_2} = \underline{\sphericalangle SCM_1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta LCN_2} \sim \underline{\Delta SCM_1} \quad \Rightarrow \quad \underline{|e_b|} : \underline{|d_a|} \;=\; \underline{|CL|} : \underline{|CS|}$$

Damit folgt :

$$\frac{|e_a|}{|d_b|} = \frac{|e_b|}{|d_a|}$$

$$\frac{|e_a|}{|e_b|} = \frac{|d_b|}{|d_a|}$$

$$\frac{|e_a|}{|e_b|} = \frac{\frac{1}{|b|}}{\frac{1}{|a|}} \quad \Rightarrow \quad \frac{|e_a|}{|e_b|} = \frac{|a|}{|b|} \quad \Rightarrow \quad |e_a| : |e_b| \;=\; |a| : |b|$$

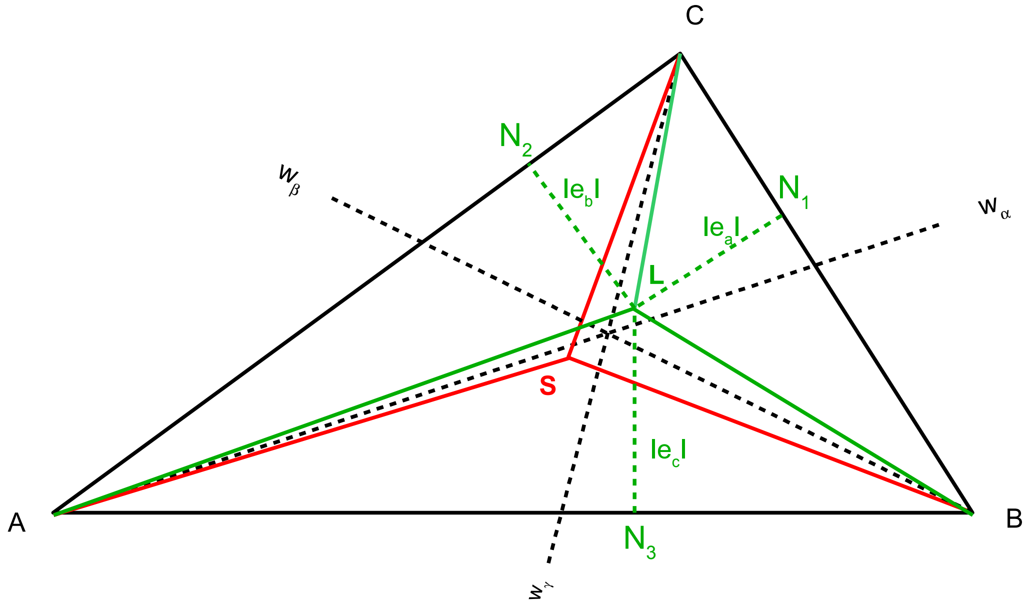
Eine analoge Betrachtung liefert insgesamt $|e_a| : |e_b| : |e_c| \;=\; |a| : |b| : |c|$.

q.e.d.

Minimumeigenschaft des Lemoine-Punktes

Die Summe der Abstandsquadrate vom Lemoine-Punkt eines Dreiecks zu den Seiten ist minimal :

$$|e_a|^2 + |e_b|^2 + |e_c|^2 \quad \text{minimal}$$



Zum Beweis benötigt man folgende algebraische Formel :

$$\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(|e_a|^2+|e_b|^2+|e_c|^2\right) =$$

$$= \left(|a||e_a|+|b||e_b|+|c||e_c|\right)^2 + \left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2 + \left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2 + \left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2$$

Beweis der Formel :

$$\left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2\right)\left(|e_a|^2 + |e_b|^2 + |e_c|^2\right)$$

$$= |a|^2|e_a|^2 + |b|^2|e_a|^2 + |c|^2|e_a|^2$$

$$+ |a|^2|e_b|^2 + |b|^2|e_b|^2 + |c|^2|e_b|^2$$

$$+ |a|^2|e_c|^2 + |b|^2|e_c|^2 + |c|^2|e_c|^2$$

$$= \underline{|a|^2|e_a|^2} + \underline{|b|^2|e_a|^2} + \underline{|c|^2|e_a|^2} + \underline{2|a||e_a||b||e_b| + 2|a||e_a||c||e_c| + 2|b||e_b||c||e_c|}$$

$$+ \underline{|a|^2|e_b|^2} + \underline{|b|^2|e_b|^2} + \underline{|c|^2|e_b|^2}$$

$$+ \underline{|a|^2|e_c|^2} + \underline{|b|^2|e_c|^2} + \underline{|c|^2|e_c|^2} - \underline{2|a||e_a||b||e_b|} - \underline{2|a||e_a||c||e_c|} - \underline{2|b||e_b||c||e_c|}$$

$$= \underline{\left(|a||e_a| + |b||e_b| + |c||e_c|\right)^2} + \underline{\left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2} + \underline{\left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2} + \underline{\left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2}$$

Weiterführung :

$$\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(|e_a|^2+|e_b|^2+|e_c|^2\right) =$$

$$= \left(|a||e_a|+|b||e_b|+|c||e_c|\right)^2 + \left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2 + \left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2 + \left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2$$

$$|e_a|^2+|e_b|^2+|e_c|^2 = \frac{\left(|a||e_a|+|b||e_b|+|c||e_c|\right)^2 + \left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2 + \left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2 + \left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}$$

$$|e_a|^2+|e_b|^2+|e_c|^2 = \frac{\left(2A_{\Delta ABC}\right)^2 + \left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2 + \left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2 + \left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}$$

Die rechte Seite wird minimal, wenn

$$\left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2 + \left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2 + \left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2 = 0 \quad ,$$

also wenn

$$\left(|a||e_b|-|b||e_a|\right)^2 = 0 \quad , \quad \left(|a||e_c|-|c||e_a|\right)^2 = 0 \quad , \quad \left(|b||e_c|-|c||e_b|\right)^2 = 0$$

$$|a||e_b|-|b||e_a| = 0 \quad , \quad |a||e_c|-|c||e_a| = 0 \quad , \quad |b||e_c|-|c||e_b| = 0$$

$$\frac{|e_a|}{|e_b|} = \frac{|a|}{|b|} \quad , \quad \frac{|e_a|}{|e_c|} = \frac{|a|}{|c|} \quad , \quad \frac{|e_b|}{|e_c|} = \frac{|b|}{|c|}$$

$$|e_a| : |e_b| : |e_c| \quad = \quad |a| : |b| : |c|$$

Der Lemoine-Punkt erfüllt bekanntlich diese Bedingung, also gilt die behauptete Minimaleigenschaft .

q.e.d.