

Minimale Summe der Abstandskuben

Arno Fehringer

Oktober 2019

Quellen :

Otto Forster : Analysis 1; Springer Spektrum 12. Auflage 2015

Otto Forster : Analysis 2; Springer Spektrum 10. Auflage 2013

Voraussetzungen aus der Analysis 1:

(1)

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x_0 \in (a,b)$ heißt lokales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\}$, falls es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt mit

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in U_\epsilon(x_0), \quad x \neq x_0.$$

(2)

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Ist $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Minimum oder Maximum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

Es folgt der Beweis im Falle eines Minimums. Der Beweis für eine Maximum geht entsprechend.

Sei $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Minimum.

Dann gilt :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Also $f'(x_0) = 0$.

(3) Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

Da f stetig ist, wird nach dem Satz vom Maximum und Minimum für stetige Funktionen das Minimum oder Maximum in $x_0 \in (a,b)$ angenommen. Nach (2) ist dann

$$f'(x_0) = 0.$$

(4) Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beweis:

Setze $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$. Dann ist $F(a) = F(b)$. Nach (3) gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$F'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(5) Monotoniesatz

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f'(x) < 0 \text{ auf } (a, b) & \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend} \\ f'(x) > 0 \text{ auf } (a, b) & \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } f \text{ streng monoton fallend} & \Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ auf } (a, b) \\ f \text{ streng monoton wachsend} & \Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ auf } (a, b) \end{array}$$

Beweis:

a) Es wird nur der Fall, dass $f'(x) < 0$ ist, behandelt, der andere Fall läuft entsprechend.

Angenommen, f ist nicht streng monoton fallend. Dann gibt es $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) \leq f(x_2)$, und es folgt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist f streng monoton fallend.

b) Es wird nur der Fall, dass f streng monoton fallend ist, behandelt, der andere Fall läuft entsprechend.

Sei f streng monoton fallend. Sei $x \in (a, b)$ und sei $x < \xi \in (a, b)$. Dann folgt:

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq 0$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq 0$$
$$f'(x) \leq 0$$

(6) Hinreichendes Kriterium für lokale Minima und Maxima

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und in $x_0 \in (a,b)$ zweimal differenzierbar.
Dann folgt :

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 &\Rightarrow x_0 \text{ ist lokales Minimum} \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 &\Rightarrow x_0 \text{ ist lokales Maximum} \end{aligned}$$

Beweis:

Es wird nur der Fall , dass $f''(x_0) > 0$ ist, behandelt, der andere Fall läuft analog.

Sei $f''(x_0) > 0$. Wegen $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ existiert $U_\epsilon(x_0)$ mit

$$\frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \text{ für alle } \xi \in U_\epsilon(x_0), \xi \neq x_0.$$

Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt :

$$\frac{f'(\xi)}{\xi - x_0} > 0$$

$$f'(\xi) > 0 \text{ für } \xi - x_0 > 0, \xi > x_0$$

$$f'(\xi) < 0 \text{ für } \xi - x_0 < 0, \xi < x_0$$

Die Funktion f ist nach **(5)** in $(x_0, x_0 + \epsilon)$ streng monoton wachsend und in $(x_0 - \epsilon, x_0)$ streng monoton fallend, und deshalb ist x_0 ein lokales Minimum.

Voraussetzungen aus der Analysis 2:

[1] Richtungsableitung und partielle Ableitungen

Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Veränderlicher auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$.

Für jedes $x \in U$ und für jede Richtung $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$ existiere eine Umgebung $U_{\epsilon(x, \xi)}(x)$ und die **Richtungsableitung** von f nach ξ an der Stelle x ,

$$D_{\xi} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2) - f(x_1, x_2)}{t}, \quad t \in U_{\epsilon}(x).$$

Für die kanonischen Richtungen $(1,0)$ $(0,1)$ erhält man die sogenannten **partiellen Ableitungen**

$$f_1(x) := D_{(1,0)} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t}$$

$$f_2(x) := D_{(0,1)} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + t) - f(x_1, x_2)}{t}.$$

Bei der Bildung der Richtungsableitungen f_1 , f_2 wird die jeweils andere Variable als Konstante behandelt und die üblichen Ableitungsregeln verwendet.

[2] Idee der linearen Approximation einer Funktion in zwei Variablen

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$, $t \in U_{\epsilon}(x)$.

$$f(x + t\xi) = f(x) + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\xi_1 \\ t\xi_2 \end{pmatrix} + \varphi_{\xi}(t) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\xi}(t)}{t} = 0$$

$$f(x + t\xi) = f(x) + t \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \varphi_{\xi}(t)$$

$$f(x + t\xi) - f(x) = t \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \varphi_{\xi}(t)$$

$$\frac{f(x + t\xi) - f(x)}{t} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \frac{\varphi_{\xi}(t)}{t}$$

$$D_{\xi} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\xi) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \frac{\varphi_{\xi}(t)}{t}$$

$$D_{\xi} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\xi) - f(x)}{t} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Für die kanonischen Richtungen $(1,0)$ $(0,1)$ erhält man

$$f_1(x) = D_{(1,0)} f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2(x) = D_{(0,1)} f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1(x) = a_1$$

$$f_2(x) = a_2$$

Die lineare Approximation erfolgt also mit Hilfe der **Jakobi-Matrix**, gebildet aus den partiellen Ableitungen :

$$f(x+t\xi) = f(x) + \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\xi_1 \\ t\xi_2 \end{pmatrix} + \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$$

$$f(x+t\xi) = f(x) + (f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2)t + \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$$

Außerdem folgt :

$$f(x+t\xi) - f(x) = (f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2)t + \varphi(t)$$

$$\frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} = f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2 + \frac{\varphi(t)}{t}$$

$$D_\xi f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2 + \frac{\varphi(t)}{t}$$

$$D_\xi f(x) = f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2$$

[3] Kettenregel

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nach allen Richtungen differenzierbare Funktion , und sei $\omega : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$, $\omega(t) = x + \gamma(t)$, $\omega(0) = x$ ein differenzierbarer Weg in U durch den Punkt $x \in U$.

Betrachte die Ableitung Verkettung $f \circ \omega : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \omega)(t) = f(\omega(t))$.

Seien $\omega'(0) = \begin{pmatrix} \omega_1'(0) \\ \omega_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix}$ die **Jakobi-Matrizen** der Funktionen ω und f .

Dann gilt :

$$\omega(t) = \omega(0) + \omega'(0)t + \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$$

$$f(x+\gamma) = f(x) + \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \psi(\gamma) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\gamma)}{|\gamma|} = 0$$

Wir zeigen, dass die Ableitung der Verkettung gleich dem Produkt der beiden Matrizen ist:

$$(f \circ \omega)'(t) = \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1'(0) \\ \omega_2'(0) \end{pmatrix} = f_1(\omega(0))\omega_1'(0) + f_2(\omega(0))\omega_2'(0)$$

Zunächst folgt :

$$(f \circ \omega)(t) = f(\omega(t))$$

$$(f \circ \omega)(t) = f(\omega(0) + \omega'(0)t + \varphi(t)) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$$

$$(f \circ \omega)(t) = f(x + \eta) \quad , \quad \eta = \omega'(0)t + \varphi(t)$$

$$(f \circ \omega)(t) = f(x) + \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \psi(\eta) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\eta)}{|\eta|} = 0$$

$$(f \circ \omega)(t) = f(\omega(0)) + \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1'(0)t + \varphi_1(t) \\ \omega_2'(0)t + \varphi_2(t) \end{pmatrix} + \psi(\eta)$$

$$(f \circ \omega)(t) = f(\omega(0)) + \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1'(0) \\ \omega_2'(0) \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} + \psi(\eta)$$

Es ist :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\varphi_1(t)}{t} \\ \frac{\varphi_2(t)}{t} \end{pmatrix} = 0$$

Wegen $\frac{\eta}{t} = \omega'(0) + \frac{\varphi(t)}{t}$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ ist $\lim_{t \rightarrow 0} |\eta| = |\omega'(0)|$,

außerdem ist $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\eta)}{|\eta|} = 0$, so dass folgt :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} \psi_1(\eta) \\ \psi_2(\eta) \end{pmatrix}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} \psi_1(\eta) \\ \psi_2(\eta) \end{pmatrix}}{|\eta|} \frac{|\eta|}{t} = 0$$

Damit ist gezeigt, dass $(f \circ \omega)'(t) = \begin{pmatrix} f_1(\omega(0)) & f_2(\omega(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1'(0) \\ \omega_2'(0) \end{pmatrix}$ ist.

[4] Satz vom Minimum einer Funktion mit zwei Variablen

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nach allen Richtungen differenzierbare Funktion .
Dann gilt für alle differenzierbaren Wege $\omega : [0,1] \longrightarrow U$, $\omega(0) = x_0$:

$$x_0 = \omega(0) \text{ ist lokales Minimum von } f \quad \Leftrightarrow \quad 0 \text{ ist lokales Minimum von } f \circ \omega$$

[5] Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nach allen Richtungen differenzierbare Funktion, die in $x \in U$ lokal extremal ist . Dann sind die Funktionen $f(x_1+t, x_2)$, $f(x_1, x_2+t)$ in gleichem Sinn extremal, und deshalb sind $f_1(x_1, x_2) = 0$ und $f_2(x_1, x_2) = 0$.

[6] Taylorsche Approximationsformel und hinreichende Bedingung für eine Minimum

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die nach allen Richtungen differenzierbar ist, und deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung 2 existieren und stetig sind, und $\omega : [0,1] \longrightarrow U$, $\omega(t) = x+t\xi$, $\omega(0) = x$ ein differenzierbarer Weg.

Dann kann die Funktion $g(t) = (f \circ \omega)(t)$ wie folgt dargestellt werden :

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \varphi(|\xi|) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$$

Wegen

$$\begin{aligned} \omega(t) &= x+t\xi \\ \omega'(t) &= \xi \\ \omega'(t) &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(\omega(t))\omega_1'(t) + f_2(\omega(t))\omega_2'(t) \\ g'(0) &= f_1(\omega(0))\omega_1'(0) + f_2(\omega(0))\omega_2'(0) \end{aligned}$$

$$\underline{g'(0) = f_1(\omega(0))\xi_1 + f_2(\omega(0))\xi_2}$$

$$\begin{aligned} g''(0) &= \left(f_{11}(\omega(0))\xi_1 + f_{12}(\omega(0))\xi_2 \right)\xi_1 + \left(f_{21}(\omega(0))\xi_1 + f_{22}(\omega(0))\xi_2 \right)\xi_1 \\ g''(0) &= \left(f_{11}(\omega(0))\xi_1 + f_{12}(\omega(0))\xi_2 \right)\xi_1 + \left(f_{21}(\omega(0))\xi_1 + f_{22}(\omega(0))\xi_2 \right)\xi_1 \end{aligned}$$

Wie unter [7] gezeigt wird, ist $f_{12} = f_{21}$.

Damit folgt :

$$g''(0) = \left(f_{11}(\omega(0))\xi_1 + f_{12}(\omega(0))\xi_2 \right)\xi_1 + \left(f_{11}(\omega(0))\xi_1 + f_{22}(\omega(0))\xi_2 \right)\xi_1$$

$$g''(0) = f_{11}(\omega(0))\xi_1^2 + 2f_{12}(\omega(0))\xi_1\xi_2 + f_{22}(\omega(0))\xi_2^2$$

Falls $f_{11}(\omega(0)) \neq 0$ ist, folgt weiter :

$$\begin{aligned}
 g''(0) &= f_{11}(\omega(0)) \left[\xi_1^2 + 2\xi_1 \frac{f_{12}(\omega(0))\xi_2}{f_{11}(\omega(0))} + \frac{f_{22}(\omega(0))\xi_2^2}{f_{11}(\omega(0))} \right] \\
 g''(0) &= f_{11}(\omega(0)) \left[\xi_1^2 + 2\xi_1 \frac{f_{12}(\omega(0))\xi_2}{f_{11}(\omega(0))} + \frac{f_{12}^2(\omega(0))\xi_2^2}{f_{11}^2(\omega(0))} + \frac{f_{22}(\omega(0))\xi_2^2}{f_{11}(\omega(0))} - \frac{f_{12}^2(\omega(0))\xi_2^2}{f_{11}^2(\omega(0))} \right] \\
 g''(0) &= f_{11}(\omega(0)) \left[\left(\xi_1 + \frac{f_{12}(\omega(0))\xi_2}{f_{11}(\omega(0))} \right)^2 + \frac{f_{22}(\omega(0))\xi_2^2}{f_{11}(\omega(0))} - \frac{f_{12}^2(\omega(0))\xi_2^2}{f_{11}^2(\omega(0))} \right] \\
 g''(0) &= f_{11}(\omega(0)) \left[\left(\xi_1 + \frac{f_{12}(\omega(0))\xi_2}{f_{11}(\omega(0))} \right)^2 + \frac{f_{11}(\omega(0))f_{22}(\omega(0)) - f_{12}^2(\omega(0))}{f_{11}^2(\omega(0))} \xi_2^2 \right]
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Taylor-Darstellung zunächst

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \varphi(\xi) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 f(\omega(1)) &= f(\omega(0)) + (f_1(\omega(0))\xi_1 + f_2(\omega(0))\xi_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(f_{11}(\omega(0)) \left[\left(\xi_1 + \frac{f_{12}(\omega(0))\xi_2}{f_{11}(\omega(0))} \right)^2 + \frac{f_{11}(\omega(0))f_{22}(\omega(0)) - f_{12}^2(\omega(0))}{f_{11}^2(\omega(0))} \xi_2^2 \right] \right) + \varphi(|\xi|)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x+\xi) &= f(x) + (f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(f_{11}(x) \left[\left(\xi_1 + \frac{f_{12}(x)\xi_2}{f_{11}(x)} \right)^2 + \frac{f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}^2(x)}{f_{11}^2(x)} \xi_2^2 \right] \right) + \varphi(|\xi|) ,
 \end{aligned}$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\varphi(|\xi|)}{|\xi|^2} = 0$$

Betrachtung des quadratischen Terms :

Es ist

$$f_{11}(\omega(0))\xi_1^2 + 2f_{12}(\omega(0))\xi_1\xi_2 + f_{22}(\omega(0))\xi_2^2 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} =: \xi A \xi > 0$$

Die quadratische Form ist stetig, positiv und nimmt deshalb auf der kompakten Menge $S = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| = 1\}$ das Minimum α an :

$$\xi A \xi \geq \alpha > 0 \quad \text{auf} \quad S$$

Es gilt sogar $\xi A \xi \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$, denn :

$$\xi A \xi = |\xi| \tilde{\xi} A \tilde{\xi} \quad , \quad \tilde{\xi} \in S$$

$$\xi A \xi = |\xi|^2 \tilde{\xi} A \tilde{\xi} \geq \alpha |\xi|^2$$

Abschätzung des Taylorschen Ausdrucks unter der Voraussetzung, dass

$$f(x+\xi) = f(x) + (f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2) + \frac{1}{2} \left(f_{11}(x) \left[\xi_1 + \frac{f_{12}(x)\xi_2}{f_{11}(x)} \right]^2 + \frac{f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}^2(x)}{f_{11}^2(x)} \xi_2^2 \right) + \varphi(|\xi|) ,$$

$$f(x+\xi) = f(x) + (f_1(x)\xi_1 + f_2(x)\xi_2) + \frac{1}{2} \xi A \xi + \varphi(\xi)$$

Sei nun $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ und $\xi A \xi > 0$.

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2} \xi A \xi + \varphi(\xi)$$

Wählt man nun $\delta > 0$ so klein, dass $\varphi(\xi) \leq \frac{\alpha}{4} |\xi|^2$ in der Umgebung $U_\delta(x)$, also $\varphi(\xi) \geq -\frac{\alpha}{4} |\xi|^2$, folgt :

$$f(x+\xi) \geq f(x) + \frac{1}{2} \alpha |\xi|^2 - \frac{\alpha}{4} |\xi|^2$$

$$f(x+\xi) \geq f(x) + \frac{1}{4} \alpha |\xi|^2$$

$$f(x+\xi) > f(x)$$

Damit hat die Funktion f ein lokales Minimum in x .

Die Bedingungen für ein **lokales Minimum in x der Funktion f** sind speziell erfüllt,

falls $f_1(x)\xi_1 = 0$, $f_2(x)\xi_2 = 0$, $f_{11}(x) > 0$, $f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}^2(x) > 0$.

[7] Gleichheit der partiellen Ableitungen $f_{12} = f_{21}$

$$f(x_1, x_2) , \quad f_{12}(0,0) = D_2 D_1 f(0,0) = ? , \quad f_{21}(0,0) = D_1 D_2 f(0,0) = ?$$

Man betrachtet die Funktion

$$F_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)$$

$$F_{x_2}'(x_1) = D_1 f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, 0)$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ mit

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = F_{x_2}'(\xi) x_1$$

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = (D_1 f(\xi, x_2) - D_1 f(\xi, 0)) x_1$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es weiter ein η mit

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = ((D_2 D_1 f(\xi, \eta)) x_2) x_1$$

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = D_2 D_1 f(\xi, \eta) x_1 x_2$$

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) - f(0, x_2) + f(0, 0) = D_2 D_1 f(\xi, \eta) x_1 x_2$$

Dann betrachtet man die Funktion

$$\begin{aligned} F_{x_1}(x_2) &= f(x_1, x_2) - f(0, x_2) \\ F_{x_1}'(x_2) &= D_2 f(x_1, x_2) - D_2 f(0, x_2) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\tilde{\xi}$ mit

$$\begin{aligned} F_{x_1}(x_2) - F_{x_1}(0) &= F_{x_1}'(\tilde{\eta})x_2 \\ F_{x_1}(x_2) - F_{x_1}(0) &= (D_2 f(x_1, \tilde{\eta}) - D_2 f(0, \tilde{\eta}))x_2 \end{aligned}$$

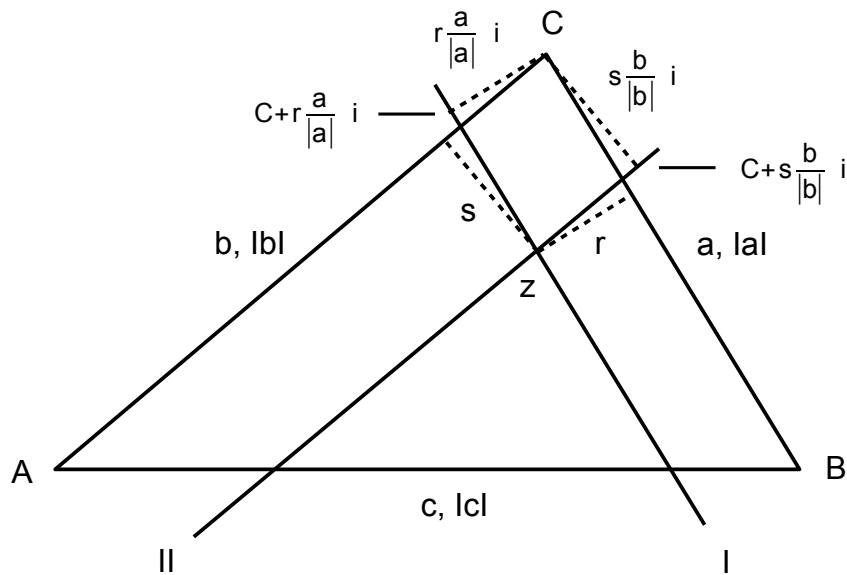
Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\tilde{\eta}$ mit

$$\begin{aligned} F_{x_1}(x_2) - F_{x_1}(0) &= ((D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}))x_1)x_2 \\ F_{x_1}(x_1) - F_{x_1}(0) &= D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})x_1 x_2 \\ \underline{f(x_1, x_2) - f(0, x_2) - f(x_1, 0) + f(0, 0) = D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})x_1 x_2} \end{aligned}$$

Da jeweils die linken Seiten der unterstrichenen Gleichungen gleich sind, folgt

$$D_2 D_1 f(\xi, \eta) = D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \quad , \text{ und im Grenzwert } D_2 D_1 f(0, 0) = D_1 D_2 f(0, 0) \quad .$$

Bestimmung eines Punktes im Inneren eines Dreiecks, dessen Summe der Abstandskuben zu den Seiten minimal ist



Es sind :

Punkt im Dreieck $\triangle ABC$: z
 Abstand des Punktes z von a : $r = d(z, a)$
 Abstand des Punktes z von b : $s = d(z, b)$
 Abstand des Punktes z von c : $t = d(z, c)$

Der Punkt z ist Schnittpunkt folgender Geraden :

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \bar{a}z - a\bar{z} = \bar{a}\left(C + r\frac{a}{|a|}i\right) - a\left(\bar{C} - r\frac{\bar{a}}{|a|}i\right) \quad | \cdot b \\ \text{II} \quad \bar{b}z - b\bar{z} = \bar{b}\left(C + s\frac{b}{|b|}i\right) - b\left(\bar{C} - s\frac{\bar{b}}{|b|}i\right) \quad | \cdot a \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}} \right] -$$

$$(\bar{a}b - a\bar{b})z = \bar{a}b\left(C + r\frac{a}{|a|}i\right) - ab\left(\bar{C} - r\frac{\bar{a}}{|a|}i\right) - \left[\bar{a}b\left(C + s\frac{b}{|b|}i\right) - ab\left(\bar{C} - s\frac{\bar{b}}{|b|}i\right)\right]$$

$$(\bar{a}b - a\bar{b})z = \bar{a}bC + |a|bir - ab\bar{C} + |a|bir - a\bar{b}C - a|b|is + ab\bar{C} - a|b|is$$

$$(\bar{a}b - a\bar{b})z = \bar{a}bC + |a|bir + |a|bir - a\bar{b}C - a|b|is - a|b|is$$

$$(\bar{a}b - a\bar{b})z = (\bar{a}b - a\bar{b})C + 2|a|bir - 2a|b|is$$

$$z = C + \frac{2i}{\bar{a}b - a\bar{b}} |a|br - \frac{2i}{\bar{a}b - a\bar{b}} a|b|s$$

$$z = C + \frac{1}{\frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2i}} |a|br - \frac{1}{\frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2i}} a|b|s$$

Wegen $2A_{\Delta} = -\frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{2i}$ folgt :

$$z = C + \frac{1}{-\frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{2i}} |a|br - \frac{1}{-\frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{2i}} a|b|s$$

$$z = C + \frac{1}{2A_{\Delta}} |a|br - \frac{1}{2A_{\Delta}} a|b|s$$

Darstellung des Punktes z im Dreieck ΔABC mit Abstand r zu a und Abstand s zu b .

Aus Symmetriegründen gelten dann entsprechende Formeln :

$$z = B + \frac{1}{2A_{\Delta}} |c|at - \frac{1}{2A_{\Delta}} c|a|r$$

$$z = A + \frac{1}{2A_{\Delta}} |b|cs - \frac{1}{2A_{\Delta}} b|c|t$$

Für die Abstände r , s , t gilt außerdem folgende Beziehung :

$$\frac{1}{2}|a|r + \frac{1}{2}|b|s + \frac{1}{2}|c|t = A_{\Delta}$$

$$|a|r + |b|s + |c|t = 2A_{\Delta}$$

Speziell gilt :

$$t = \frac{1}{|c|}(2A_{\Delta} - |a|r - |b|s)$$

Daraus erhält man folgende **Funktionsgleichung der Summe der Abstandskuben** :

$$f(r,s) = r^3 + s^3 + \frac{1}{|c|^3}(2A_{\Delta} - |a|r - |b|s)^3$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum : $f_r(r,s) = 0$, $f_s(r,s) = 0$

$$f_r(r,s) = 0$$

$$3r^2 + \frac{3}{|c|^3}(2A_{\Delta} - |a|r - |b|s)^2(-|a|) = 0$$

$$3r^2 - \frac{3|a|}{|c|^3}(2A_{\Delta} - |a|r - |b|s)^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
f_s(r, s) &= 0 \\
3s^2 + \frac{3}{|c|^3}(2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2(-|b|) &= 0 \\
3s^2 - \frac{3|b|}{|c|^3}(2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2 &= 0
\end{aligned}$$

In vereinfachter Form erhält man die beiden folgenden Gleichungen :

$$\begin{aligned}
r^2 - \frac{|a|}{|c|^3}(2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2 &= 0 \\
s^2 - \frac{|b|}{|c|^3}(2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2 &= 0 \\
r^2 - \left[\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right]^2 &= 0 \\
s^2 - \left[\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right]^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[r + \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] \left[r - \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] &= 0 \\
\left[s + \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] \left[s - \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] &= 0
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, $r, s, t > 0$ können nur die jeweils rechten Faktoren gleich Null sein :

$$\begin{aligned}
r - \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) &= 0 \\
s - \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}(2A_\Delta - |a|r - |b|s) &= 0
\end{aligned}$$

Der Fall $r, s, t \geq 0$ wird am Schluss der Arbeit noch betrachtet !

$$\begin{aligned}
\left(1 + |a| \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} \right) r + |b| \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} s &= 2 \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} A_\Delta \\
|a| \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} r + \left(1 + |b| \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} \right) s &= 2 \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} A_\Delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} A_\Delta \left(1 + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}\right) - |b|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} 2\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} A_\Delta}{\left(1 + |a|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}}\right)\left(1 + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}\right) - |b|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} |a|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}} \\
r &= \frac{2\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} A_\Delta \left(1 + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}\right) - |b|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} 2\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} A_\Delta}{1 + |a|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} + |a|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} - |b|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} |a|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}} \\
r &= \frac{2\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} A_\Delta \left(1 + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}\right) - |b|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} 2\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} A_\Delta}{1 + |a|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}} \\
r &= \frac{2\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} A_\Delta \left(1 + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} - |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}\right)}{1 + |a|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}} \\
r &= \frac{2\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} A_\Delta}{1 + |a|\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} + |b|\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}}} \\
r &= \frac{2\sqrt{|a|} A_\Delta}{|c|\sqrt{|c|} + |a|\sqrt{|a|} + |b|\sqrt{|b|}}
\end{aligned}$$

$$r = \frac{2\sqrt{|a|} A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|} + |b|\sqrt{|b|} + |c|\sqrt{|c|}}$$

Analog erhält man :

$$s = \frac{2\sqrt{|b|} A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|} + |b|\sqrt{|b|} + |c|\sqrt{|c|}}$$

Aus Symmetriegründen müsste gelten :

$$t = \frac{2\sqrt{|c|} A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|} + |b|\sqrt{|b|} + |c|\sqrt{|c|}}$$

Das Tupel (r, s) ist die Nullstelle der ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(r, s) = r^3 + s^3 + \frac{1}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)^3.$$

Betrachtung der zweiten partiellen Ableitungen :

$$f(r, s) = r^3 + s^3 + \frac{1}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)^3$$

$$f_{rr}(r, s) = 3r^2 - \frac{3|a|}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2$$

$$f_{rs}(r, s) = 6r - \frac{6|a|}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)(-|a|)$$

$$f_{rr}(r, s) = 6r + \frac{6|a|^2}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)$$

$$f_{rs}(r, s) = 6 \left(1 - \frac{|a|^3}{|c|^3} \right) r - \frac{6|a|^2|b|}{|c|^3} s + \frac{12|a|^2 A_\Delta}{|c|^3}$$

$$f_{rr}(r, s) = \frac{1}{|c|^3} [6(|c|^3 - |a|^3)r - 6|a|^2|b|s + 12|a|^2 A_\Delta]$$

$$f_{ss}(r, s) = 3s^2 - \frac{3|b|}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2$$

$$f_{rs}(r, s) = 6s - \frac{6|b|}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)(-|b|)$$

$$f_{ss}(r, s) = 6s + \frac{6|b|^2}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)$$

$$f_{rs}(r, s) = -\frac{6|b|^2|a|}{|c|^3} + 6 \left(1 - \frac{|b|^3}{|c|^3} \right) s + \frac{12|b|^2 A_\Delta}{|c|^3}$$

$$f_{ss}(r, s) = \frac{1}{|c|^3} [-6|b|^2|a|r + 6(|c|^3 - |b|^3)s + 12|b|^2 A_\Delta]$$

$$f_{rs}(r, s) = 3r^2 - \frac{3|a|}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)^2$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{6|a||b|}{|c|^3} (2A_\Delta - |a|r - |b|s)$$

$$f_{rs}(r, s) = -\frac{6|a|^2|b|}{|c|^3} r - \frac{6|a||b|^2}{|c|^3} s + \frac{12|a||b| A_\Delta}{|c|^3}$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{1}{|c|^3} [-6|a|^2|b|r - 6|a||b|^2s + 12|a||b| A_\Delta]$$

Einsetzen der Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen

$$r = \frac{2\sqrt{a}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|}} \quad , \quad s = \frac{2\sqrt{b}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|}}$$

in die zweiten partiellen Ableitungen :

$$f_{rr}(r,s) = \frac{1}{|c|^3} [6(|c|^3 - |a|^3)r - 6|a|^2|b|s + 12|a|^2A_{\Delta}]$$

$$f_{rr}(r,s) = \frac{1}{|c|^3} \left[6(|c|^3 - |a|^3) \frac{2\sqrt{a}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|}} - 6|a|^2|b| \frac{2\sqrt{b}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|}} + 12|a|^2A_{\Delta} \right]$$

$$f_{rr}(r,s) = \frac{12(|c|^3 - |a|^3)\sqrt{a}A_{\Delta} - 12|a|^2|b|\sqrt{b}A_{\Delta} + 12|a|^2A_{\Delta}(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{rr}(r,s) = \frac{12|c|^3\sqrt{a}A_{\Delta} + 12|a|^2|c|\sqrt{c}A_{\Delta}}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{rr}(r,s) = \frac{12|c|^2\sqrt{a}A_{\Delta} + 12|a|^2\sqrt{c}A_{\Delta}}{|c|^2(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{rr}(r,s) = \frac{12A_{\Delta}[|c|^2\sqrt{a} + |a|^2\sqrt{c}]}{|c|^2(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})} > 0$$

$$f_{ss}(r,s) = \frac{1}{|c|^3} [-6|b|^2|a|r + 6(|c|^3 - |b|^3)s + 12|b|^2A_{\Delta}]$$

$$f_{ss}(r,s) = \frac{1}{|c|^3} \left[-\frac{12|b|^2|a|\sqrt{a}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|}} + \frac{12(|c|^3 - |b|^3)\sqrt{b}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|}} + 12|b|^2A_{\Delta} \right]$$

$$f_{ss}(r,s) = \frac{-12|b|^2|a|\sqrt{a}A_{\Delta} + 12(|c|^3 - |b|^3)\sqrt{b}A_{\Delta} + 12|b|^2A_{\Delta}(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{ss}(r,s) = \frac{-12|b|^2|a|\sqrt{a}A_{\Delta} + 12(|c|^3 - |b|^3)\sqrt{b}A_{\Delta} + 12|b|^2A_{\Delta}(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{ss}(r,s) = \frac{12[|c|^3\sqrt{b} + 12|b|^2A_{\Delta}|c|\sqrt{c}]}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{ss}(r,s) = \frac{12A_{\Delta}[|c|^2\sqrt{b} + |b|^2\sqrt{c}]}{|c|^2(|a|\sqrt{|a|+b}|\sqrt{b|+c}|\sqrt{c|})}$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{1}{|c|^3} [-6|a|^2|b|r - 6|a||b|^2s + 12|a||b|A_\Delta]$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{1}{|c|^3} \left[-\frac{12|a|^2|b|\sqrt{|a|}A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} - \frac{12|a||b|^2\sqrt{|b|}A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} + 12|a||b|A_\Delta \right]$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{-12|a|^2|b|\sqrt{|a|}A_\Delta - 12|a||b|^2\sqrt{|b|}A_\Delta + 12|a||b|A_\Delta(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})}$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{12|a||b|A_\Delta|c|\sqrt{|c|}}{|c|^3(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})}$$

$$f_{rs}(r, s) = \frac{12A_\Delta|a||b|\sqrt{|c|}}{|c|^2(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})}$$

Berechnung von $f_{rr}f_{ss} - f_{rs}^2$:

$$\begin{aligned} f_{rr}f_{ss} - f_{rs}^2 &= \frac{144A_\Delta^2[|c|^2\sqrt{|a|} + |a|^2\sqrt{|c|}][|c|^2\sqrt{|b|} + |b|^2\sqrt{|c|}]}{|c|^4(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2} - \frac{144A_\Delta^2|a|^2|b|^2|c|}{|c|^4(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2} \\ &= \frac{144A_\Delta^2[|c|^4\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} + |c|^2|b|^2\sqrt{|a|}\sqrt{|c|} + |c|^2|a|^2\sqrt{|b|}\sqrt{|c|} + |a|^2|b|^2|c|]}{|c|^4(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2} - \frac{144A_\Delta^2|a|^2|b|^2|c|}{|c|^4(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2} \\ &= \frac{144A_\Delta^2[|c|^4\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} + |c|^2|b|^2\sqrt{|a|}\sqrt{|c|} + |c|^2|a|^2\sqrt{|b|}\sqrt{|c|}]}{|c|^4(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2} > 0 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass für die Stellen

$$r = \frac{2\sqrt{|a|}A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}, \quad s = \frac{2\sqrt{|b|}A_\Delta}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}$$

die hinreichenden Bedingungen für ein lokales Minimum erfüllt sind :

$$f_r(r, s) = 0, \quad f_s(r, s) = 0$$

$$f_{rr}(r, s)f_{ss}(r, s) > 0, \quad f_{rr}(r, s)f_{ss}(r, s) - f_{rs}^2(r, s) > 0$$

Berechnung des Punktes, dessen Summe der Abstandskuben lokal minimal ist.

Es werden die Minimalstellen

$$r = \frac{2\sqrt{|a|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} \quad , \quad s = \frac{2\sqrt{|b|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}$$

eingesetzt in die Gleichung
$$z = C + \frac{1}{2A_{\Delta}} |a|br - \frac{1}{2A_{\Delta}} a|b|s :$$

$$z = C + \frac{1}{2A_{\Delta}} |a|br - \frac{1}{2A_{\Delta}} a|b|s$$

$$z = C + \frac{1}{2A_{\Delta}} |a|b \frac{2\sqrt{|a|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} - \frac{1}{2A_{\Delta}} a|b| \frac{2\sqrt{|b|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}$$

$$z = C + \frac{|a|\sqrt{|a|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} b - \frac{|b|\sqrt{|b|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} a$$

$$z = C + \frac{|a|\sqrt{|a|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} (A-C) - \frac{|b|\sqrt{|b|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} (C-B)$$

$$z = \frac{C(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} + \frac{|a|\sqrt{|a|}(A-C)}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} - \frac{|b|\sqrt{|b|}(C-B)}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}$$

$$z = \frac{C|a|\sqrt{|a|} + C|b|\sqrt{|b|} + C|c|\sqrt{|c|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} + \frac{A|a|\sqrt{|a|} - C|a|\sqrt{|a|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} - \frac{C|b|\sqrt{|b|} + B|b|\sqrt{|b|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}$$

$$z = \frac{C|c|\sqrt{|c|} + A|a|\sqrt{|a|} + B|b|\sqrt{|b|}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}}$$

$$z = \frac{A|a|\sqrt{|a|} + B|b|\sqrt{|b|} + C|c|\sqrt{|c|}}{|a|\sqrt{|a|} + |b|\sqrt{|b|} + |c|\sqrt{|c|}}$$

$$z = \frac{A|a|^{\frac{3}{2}} + B|b|^{\frac{3}{2}} + C|c|^{\frac{3}{2}}}{|a|^{\frac{3}{2}} + |b|^{\frac{3}{2}} + |c|^{\frac{3}{2}}}$$

Punkt, dessen Summe der Abstandskuben lokal minimal ist.

Berechnung des lokalen Minimums der Summe der Abstandskuben

$$r^3 + s^3 + t^3$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{|a|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} \right)^3 + \left(\frac{2\sqrt{|b|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} \right)^3 + \left(\frac{2\sqrt{|c|}A_{\Delta}}{|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|}} \right)^3$$

$$= \frac{8\sqrt{|a|}^3 A_{\Delta}^3 + 8\sqrt{|b|}^3 A_{\Delta}^3 + 8\sqrt{|c|}^3 A_{\Delta}^3}{(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^3}$$

$$= \frac{8A_{\Delta}^3(\sqrt{|a|}^3 + \sqrt{|b|}^3 + \sqrt{|c|}^3)}{(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^3}$$

$$= \frac{8A_{\Delta}^3(|a|\sqrt{|a|} + |b|\sqrt{|b|} + |c|\sqrt{|c|})}{(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^3}$$

$$= \frac{8A_{\Delta}^3}{(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2}$$

$$r^3 + s^3 + t^3 = \frac{8A_{\Delta}^3}{(|a|\sqrt{|a|+|b|}\sqrt{|b|+|c|}\sqrt{|c|})^2}$$

$$r^3 + s^3 + t^3 = \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}} + |b|^{\frac{3}{2}} + |c|^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

Lokaler Minimalwert der Summe der Abstandskuben

Zum Schluss betrachten wir die notwendige Bedingung für lokale Extrema der Summe der Abstandskuben für den Fall, dass $r, s, t \geq 0$ ist.

Die Gleichungen lauten (vgl. S. 14) :

$$\begin{cases} \left[r + \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] \left[r - \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] = 0 \\ \left[s + \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] \left[s - \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] = 0 \end{cases}$$

Setzt man die jeweils ersten Faktoren gleich Null, folgt :

$$\begin{cases} \left[r + \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] = 0 \\ \left[s + \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) \right] = 0 \end{cases}$$

Die Summe von nichtnegativen Größen kann nur gleich Null sein, falls alle Summanden gleich Null sind :

$$r = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) = 0 \quad \text{liefert}$$

$$\sqrt{\frac{|a|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |b|s) = 0$$

$$2A_\Delta - |b|s = 0$$

$$s = \frac{2A_\Delta}{|b|}$$

$$s = h_b$$

$$t = \frac{1}{|c|} \left(2A_\Delta - |b| \frac{2A_\Delta}{|b|} \right)$$

$$t = 0$$

$$s = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r - |b|s) = 0 \quad \text{liefert}$$

$$\sqrt{\frac{|b|}{|c|^3}} (2A_\Delta - |a|r) = 0$$

$$2A_\Delta - |a|r = 0$$

$$r = \frac{2A_\Delta}{|a|}$$

$$r = h_a$$

$$t = \frac{1}{|c|} \left(2A_\Delta - |a| \frac{2A_\Delta}{|a|} \right)$$

$$t = 0$$

Es sind also genau zwei Abstände gleich Null und der dritte Abstand ist die jeweilige Dreieckshöhe :

$$\begin{aligned} r=t=0, \quad s &= h_b & \Rightarrow & \quad z = A, \quad f(0,s,0) = h_b^3 \\ s=t=0, \quad r &= h_a & \Rightarrow & \quad z = B, \quad f(r,0,0) = h_a^3 \\ r=s=0, \quad t &= h_c & \Rightarrow & \quad z = C, \quad f(0,0,t) = h_c^3 \end{aligned}$$

Die Eckpunkte A , B , C kommen als lokale Extrema in Frage, wenn man aber die Summe der Abstandskuben vergleicht mit der Summe der Abstandskuben des bereits gefundenen Minimums vergleicht, folgt :

$$\begin{aligned} \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &\leq \frac{8A_{\Delta}^3}{|a|^3+|b|^3+|c|^3} & \text{Abschätzung durch die Trinomische Formel} \\ \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &\leq \frac{(2A_{\Delta})^3}{|a|^3+|b|^3+|c|^3} \\ \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &\leq \frac{|a|^3|h_a|^3}{|a|^3+|b|^3+|c|^3} \\ \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &\leq \frac{|a|^3}{|a|^3+|b|^3+|c|^3} |h_a|^3 \\ \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &< 1 |h_a|^3 \\ \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &< |h_a|^3 \end{aligned}$$

Entsprechend würde folgen :

$$\begin{aligned} \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &< |h_b|^3 \\ \frac{8A_{\Delta}^3}{\left(|a|^{\frac{3}{2}}+|b|^{\frac{3}{2}}+|c|^{\frac{3}{2}}\right)^2} &< |h_c|^3 \end{aligned}$$

Das gefundene lokale Minimum für die Summe der Abstandskuben ist somit sogar das **absolute Minimum** .