Johnson-Kreise

Arno Fehringer

Dezember 2019

Quellen :

Johnson circles
From Wikipedia, the free encyclopedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_circles

Johnson, Roger A. : A Circle Theorem ; in : The American Mathematical Monthly Vol. 23, No. 5 (May, 1916), pp. 161-162 (2 pages)

https://www.jstor.org/stable/2974356?seq=1#metadata_info_tab_contents

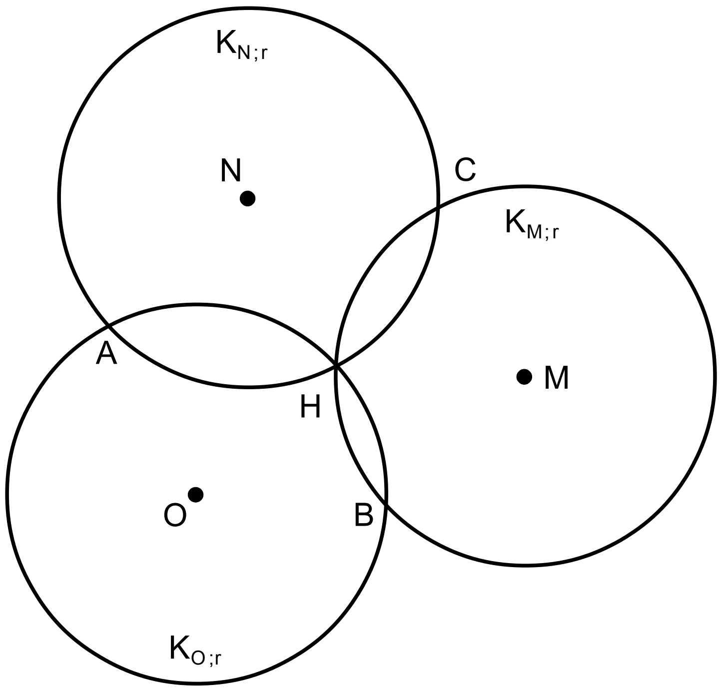
Gegeben seien in der komplexen Zahlenebene drei kongruente Kreise $K_{M;r}$, $K_{N;r}$, $K_{O;r}$, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, und die folgenden weiteren Bedingungen erfüllen :

$$K_{M;r} \cap K_{N;r} \cap K_{O;r} = \{H\}$$

$$K_{M;r} \cap K_{N;r} = \{H, C\}$$

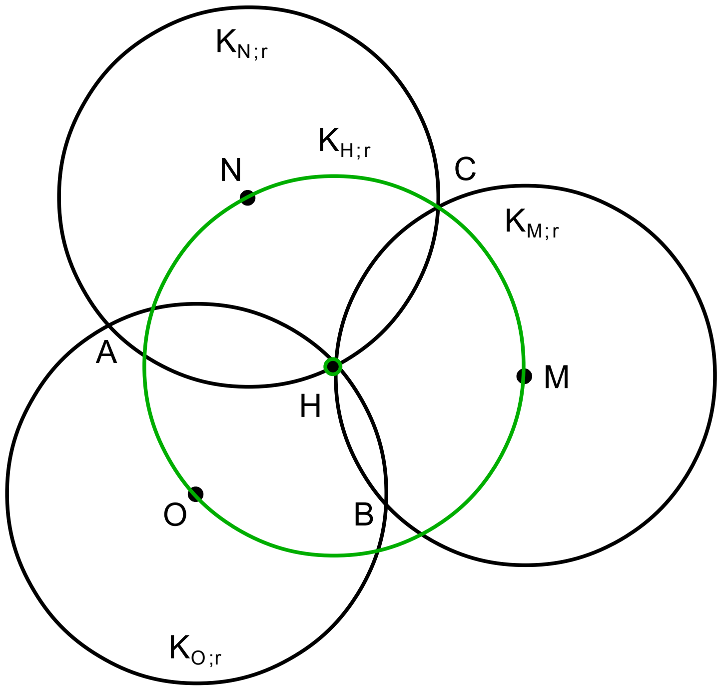
$$K_{N;r} \cap K_{O;r} = \{H, A\}$$

$$K_{O;r} \cap K_{M;r} = \{H, B\}$$

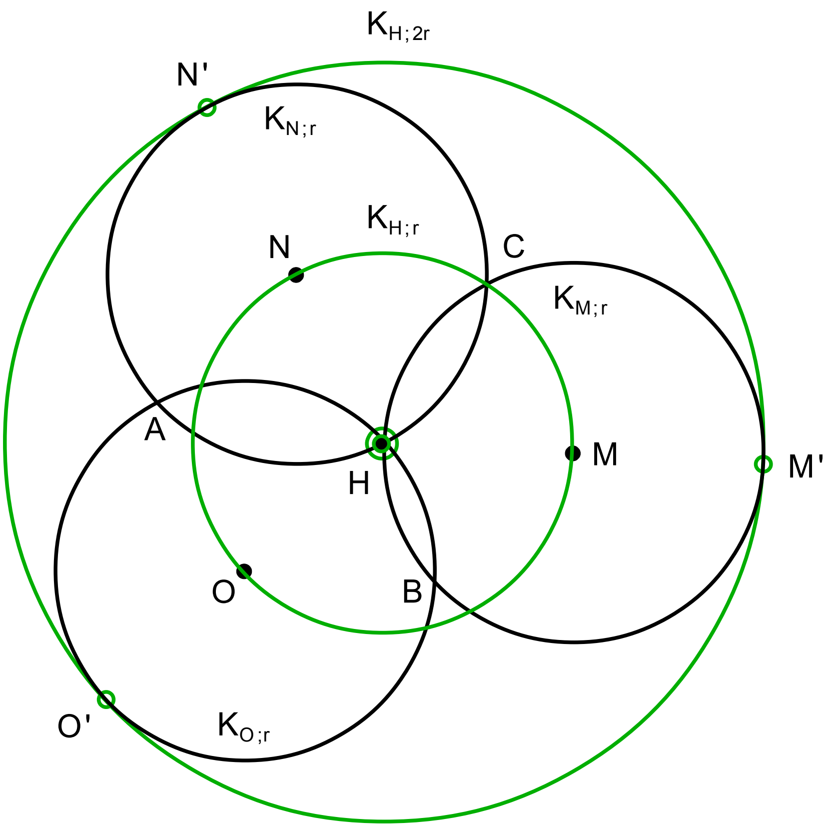


Behauptungen (mehr oder weniger offensichtlich) :

(1) Der Kreis $K_{H;r}$ geht durch die Kreismittelpunkte M , N , O der drei gegebenen Kreise , ist also **Umkreis des Dreiecks** ΔMNO .



(2) Der Kreis $K_{H;2r}$ berührt die drei gegebenen Kreise in den Punkten M' , N' , O' .

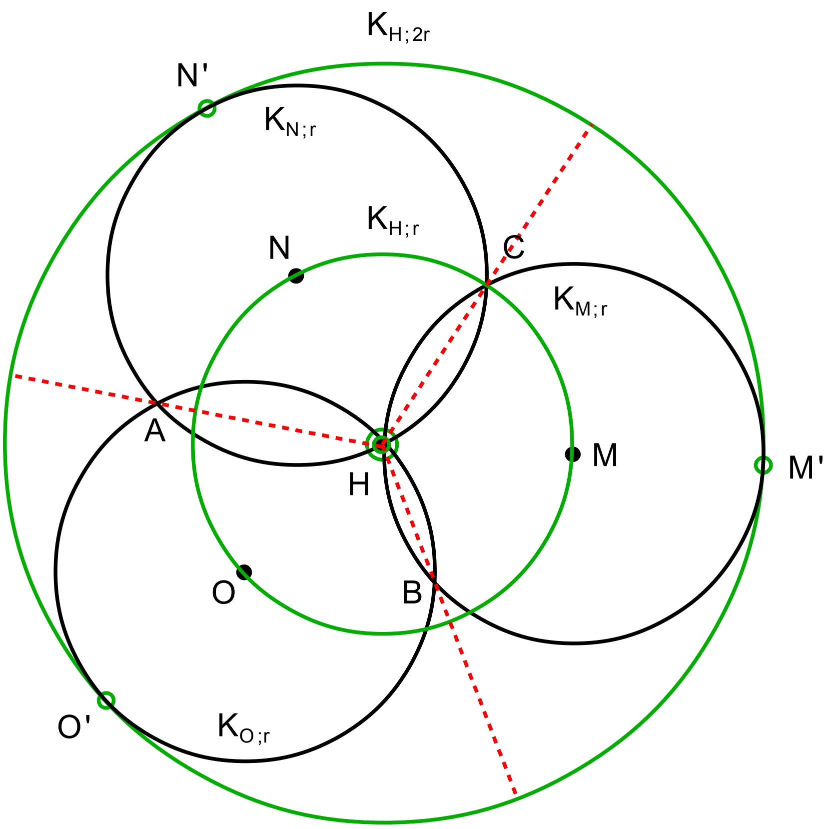


(3) Betrachtung achsensymmetrischer Figuren :

$K_{H;2r} \cup K_{M;r} \cup K_{N;r}$ ist symmetrisch zur Achse HC .

$K_{H;2r} \cup K_{N;r} \cup K_{O;r}$ ist symmetrisch zur Achse HA .

$K_{H;2r} \cup K_{O;r} \cup K_{M;r}$ ist symmetrisch zur Achse HB .

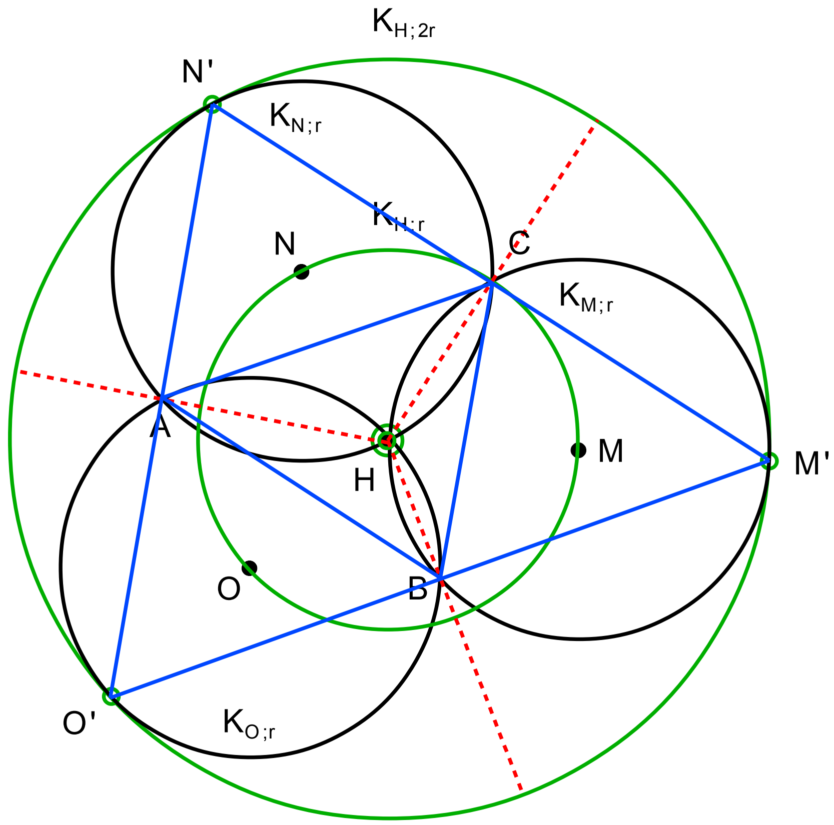


s_{HC} : $M' \longleftrightarrow N'$ und $C = \dfrac{M'+N'}{2}$

s_{HA} : $N' \longleftrightarrow O'$ und $A = \dfrac{N'+O'}{2}$

s_{HB} : $O' \longleftrightarrow M'$ und $B = \dfrac{O'+M'}{2}$

(4) Betrachtung der Dreiecke $\Delta M'N'O'$ **,** ΔABC **:**



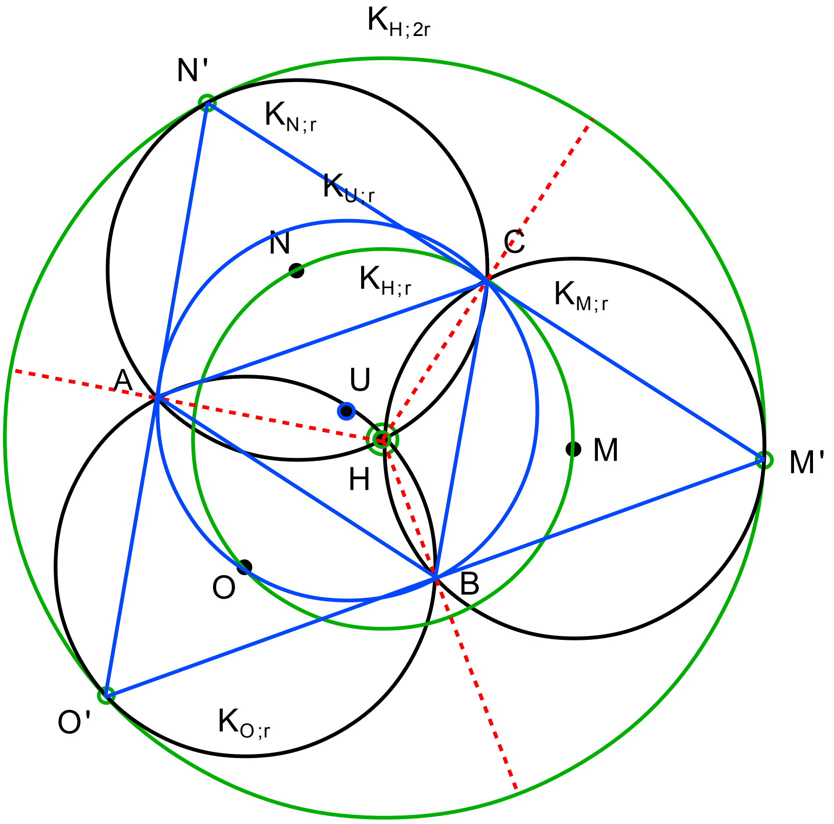
Das Dreieck ΔABC ist das **Seitenmitten-Dreieck** von $\Delta M'N'O'$.
Die Mittelsenkrechten CH , AH , BH von $\Delta M'N'O'$ schneiden sich im Punkt H ., also ist H **der Umkreismittelpunkt von** $\Delta M'N'O'$.

Da die Mittelsenkrechten von $\Delta M'N'O'$ zugleich die Höhenlinien von ΔABC sind, ist H **der Höhenschnitpunkt von** ΔABC .

(5) Wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatzes sind die Dreiecks-Umkreis-Figuren $\Delta M'N'O' \cup K_{H;2r}$, $\Delta ABC \cup K_{U;R}$ **ähnlich mit dem Faktor** $\frac{1}{2}$:

$$\Delta M'N'O' \cup K_{H;2r} \quad \sim_{\frac{1}{2}} \quad \Delta ABC \cup K_{U;R}$$

Also gilt $R = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$, und es gibt einen weiteren **Kreis** $K_{U;r}$ **durch die Schnittpunkte** C , A , B **der drei gegebenen Kreise** .



Folgerung :

Spiegelt man an einem Dreieck ΔABC den Umkreis $K_{U;r}$ an den Seiten $C-B$, $A-C$, $B-A$, so erhält man die drei Johnson-Kreise $K_{M;r}$, $K_{N;r}$, $K_{O;r}$ mit dem gemeinsamen Schnittpunkt H , dem Höhenschnittpunkt von ΔABC .
Speziell gilt also :

$$K_{M;r} \cap K_{N;r} \cap K_{O;r} = \{H\}$$

$$K_{M;r} \cap K_{N;r} = \{H,C\} \quad , \quad K_{N;r} \cap K_{O;r} = \{H,A\} \quad , \quad K_{O;r} \cap K_{M;r} = \{H,B\}$$