Yff-Kreise

Arno Fehringer

Dezember 2019

Quellen :

Fehringer, Arno : Geometrie in der komplexen Zahlenebene ; Manuskript September 2019

Fehringer, Arno : Johnson-Kreise ; Manuskript Dezember 2019

Johnson circles
From Wikipedia, the free encyclopedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_circles

Johnson, Roger A. : A Circle Theorem ; in : The American Mathematical Monthly Vol. 23, No. 5 (May, 1916), pp. 161-162 (2 pages)

https://www.jstor.org/stable/2974356?seq=1#metadata_info_tab_contents

Weisstein, Eric, "Yff Circles." From Mathworld - A Wolfram Web Resource.

http://mathworld.wolfram.com/YffCircles.html

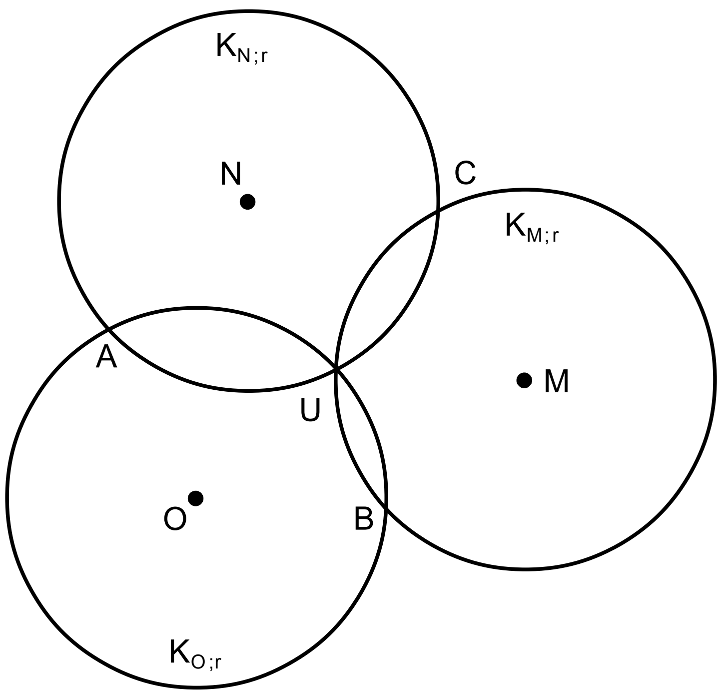
Gegeben seien in der komplexen Zahlenebene drei kongruente Kreise $K_{M;r}$, $K_{N;r}$, $K_{O;r}$, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, und die folgenden weiteren Bedingungen erfüllen :

$$K_{M;r} \cap K_{N;r} \cap K_{O;r} = \{U\}$$

$$K_{M;r} \cap K_{N;r} = \{U, C\}$$

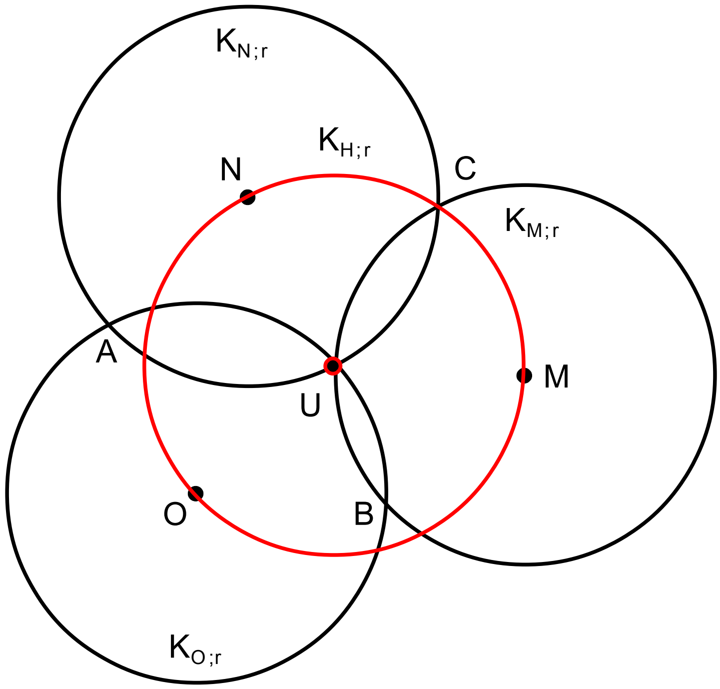
$$K_{N;r} \cap K_{O;r} = \{U, A\}$$

$$K_{O;r} \cap K_{M;r} = \{U, B\}$$

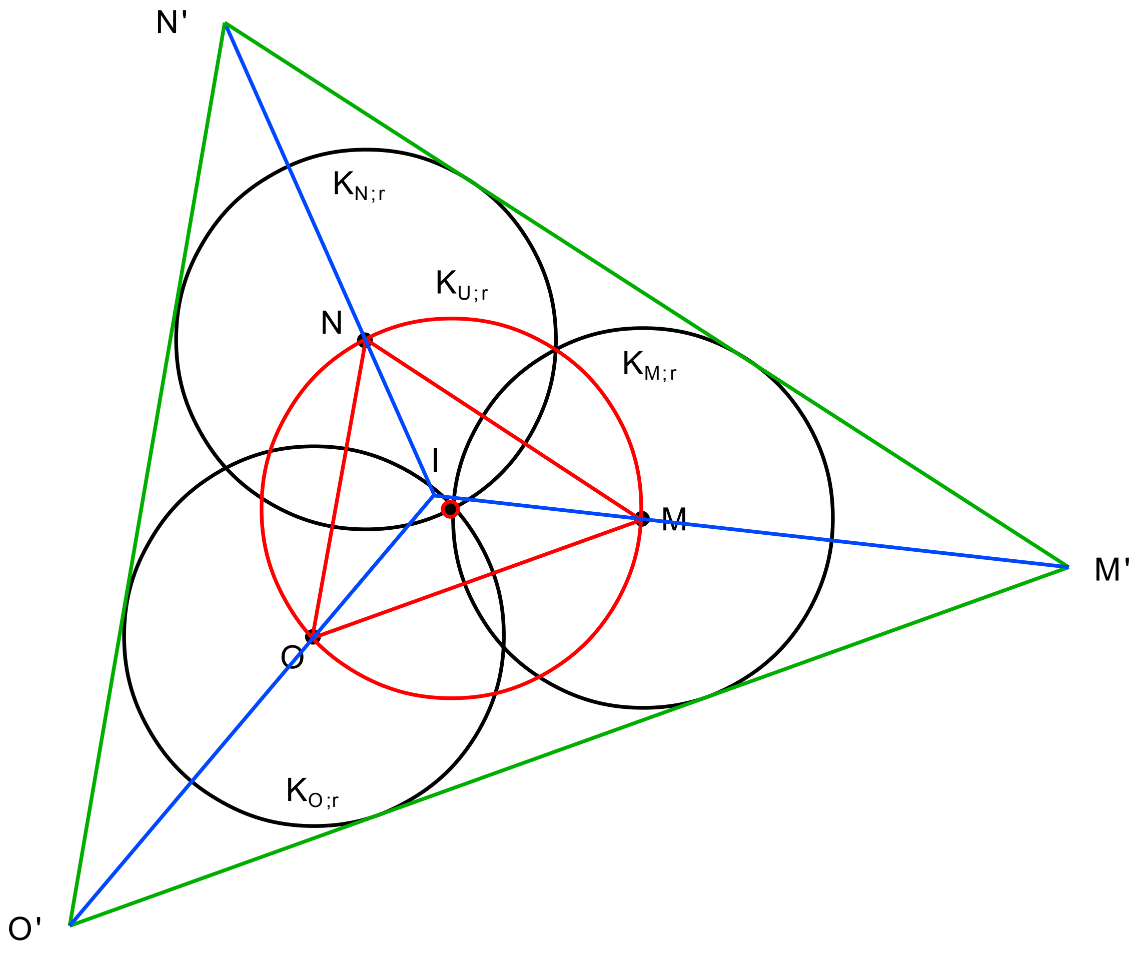


Behauptungen (mehr oder weniger offensichtlich) :

(1) Der Kreis $K_{H;r}$ geht durch die Kreismittelpunkte M , N , O der drei gegebenen Kreise , ist also **Umkreis des Dreiecks** ΔMNO .



(2‘) **Betrachtung der ähnlichen Dreiecke** ΔMNO , $\Delta M'N'O'$:



Die Geraden $M'M$, $N'N$, $O'O$ sind die **Winkelhalbierenden der Dreiecke** ΔMNO , $\Delta M'N'O'$ und schneiden sich im **Inkreismittelpunkt** I .
Die **Inkreisradien** sind ρ_{MNO} , $\rho_{M'N'O'}$ mit $\rho_{MNO} = \rho_{M'N'O'} - r$

Der Ähnlichkeitsfaktor ist

$$f = \frac{\rho_{MNO}}{\rho_{M'N'O'}}$$

$$f = \frac{\rho_{M'N'O'} - r}{\rho_{M'N'O'}}$$

$$\underline{f = 1 - \frac{r}{\rho_{M'N'O'}}}$$

.

Betrachtet man jetzt noch die Umkreisradiien R_{MNO} , $R_{M'N'O'}$ der Dreiecke ΔMNO , $\Delta M'N'O'$, so gilt für den Ähnlichkeitsfaktor aber auch

$$f = \frac{R_{MNO}}{R_{M'N'O'}} \quad .$$

Da die drei Kreise **Johnson-Kreise** sind, muss $R_{MNO} = r$ gelten , also

$$\underline{f = \frac{r}{R_{M'N'O'}}} \quad .$$

Setzt man die unterstrichenen Gleichungen für f gleich, so folgt :

$$\frac{r}{R_{M'N'O'}} = 1 - \frac{r}{\rho_{M'N'O'}}$$

$$\left(\frac{1}{R_{M'N'O'}} + \frac{1}{\rho_{M'N'O'}}\right) r = 1$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{R_{M'N'O'}} + \frac{1}{\rho_{M'N'O'}}}$$

$$\boxed{r = \frac{R_{M'N'O'} \cdot \rho_{M'N'O'}}{R_{M'N'O'} + \rho_{M'N'O'}}}$$ **Radius der Johnson-Kreise**

Folgerung 1' :

Zu jedem Dreieck ΔABC existieren drei Johnson-Kreise $K_{M;r}$, $K_{N;r}$, $K_{O;r}$, welche jeweils zwei Dreieckseiten von innen berühren und **deren Mittelpunkte innerhalb des Dreiecks liegen** .

Der Radius der Johnson-Kreise ist $\boxed{r = \frac{R \cdot \rho}{R + \rho}}$, wobei R und ρ Umkreis- und Inkreisradius von ΔABC sind .

Zur Erinnerung : $R = \dfrac{|a||b||c|}{\left(\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c\right)i}$, $\rho = \dfrac{\left(\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c\right)i}{2\left(|a|+|b|+|c|\right)}$

Derartige Johnson-Kreise heißen **Yff-Kreise** zu ΔABC .

Berechnung des Mittelpunktes M , N , O :

Parallele im Abstand r zur Seite b durch den Punkt $A + r\frac{b}{|b|}i$:

$$\overline{b}z - b\overline{z} = \overline{b}\left(A + \frac{b}{|b|}ir\right) - b\left(\overline{A} - \frac{\overline{b}}{|b|}ir\right)$$

$$\underline{\overline{b}z - b\overline{z} = \overline{b}A - b\overline{A} + 2|b|ir}$$

$$\overline{b}z - b\overline{z} = \overline{b}A - b\overline{A} + 2|b|ir$$

$$\overline{c}z - c\overline{z} = \overline{c}A - c\overline{A} + 2|c|ir$$

$$M = z = \frac{\left(\overline{b}A - b\overline{A} + 2|b|ir\right)c - b\left(\overline{c}A - c\overline{A} + 2|c|ir\right)}{\overline{b}c - b\overline{c}}$$

$$M = \frac{\left(\overline{b}c - b\overline{c}\right)A - bc\overline{A} + bc\overline{A} + 2\left(|b|c - b|c|\right)ir}{\overline{b}c - b\overline{c}}$$

$$M = \frac{\left(\overline{b}c - b\overline{c}\right)A + 2\left(|b|c - b|c|\right)ir}{\overline{b}c - b\overline{c}}$$

$$M = A + \frac{2\left(|b|c - b|c|\right)ir}{\overline{b}c - b\overline{c}}$$

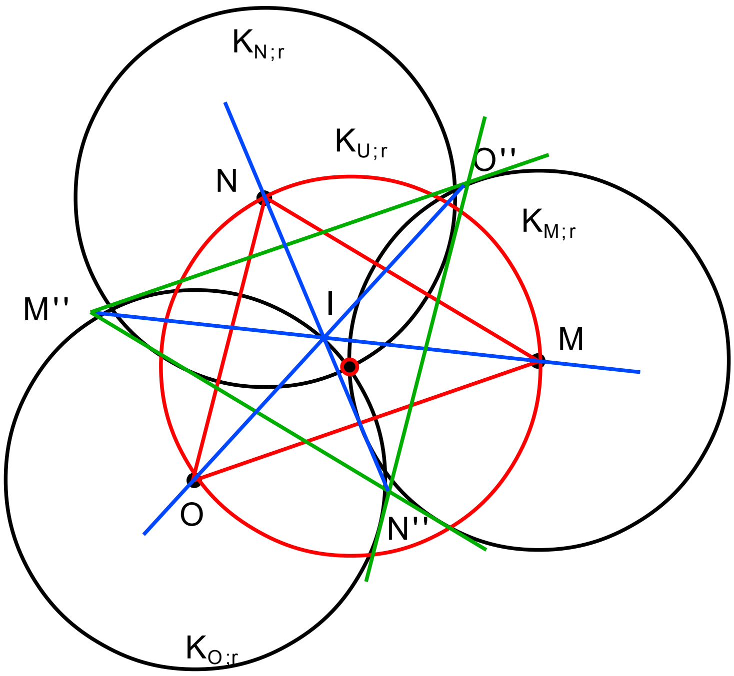
$$M = A + 2\,\frac{\left(|b|c - b|c|\right)}{\overline{b}c - b\overline{c}}\,ir$$

$$\boxed{M = A + 2\,\frac{\left(|b|c - b|c|\right)}{\overline{b}c - b\overline{c}}\,\frac{R \cdot \rho}{R + \rho}\,i}$$, analog also

$$\boxed{N = B + 2\,\frac{\left(|c|a - c|a|\right)}{\overline{c}a - c\overline{a}}\,\frac{R \cdot \rho}{R + \rho}\,i}$$

$$\boxed{O = C + 2\,\frac{\left(|a|b - a|b|\right)}{\overline{a}b - a\overline{b}}\,\frac{R \cdot \rho}{R + \rho}\,i}$$

(2“) **Betrachtung der ähnlichen Dreiecke** ΔMNO **,** $\Delta M''N''O''$ **:**



Die Geraden $M''M$, $N''N$, $O''O$ sind die **Winkelhalbierenden der ähnlichen Dreiecke** ΔMNO **,** $\Delta M''N''O''$ und schneiden sich im **Inkreismittelpunkt** I .
Die **Inkreisradien** sind ρ_{MNO} , $\rho_{M''N''O''}$ mit $\rho_{MNO} + \rho_{M''N''O''} = r$

Der Ähnlichkeitsfaktor ist

$$f = \frac{\rho_{MNO}}{\rho_{M'N'O'}}$$

$$f = \frac{r - \rho_{M'N'O'}}{\rho_{M'N'O'}}$$

$$f = \frac{r}{\rho_{M'N'O'}} - 1$$

.

Betrachtet man jetzt noch die Umkreisradien R_{MNO} , $R_{M''N''O''}$ der Dreiecke ΔMNO , $\Delta M''N''O''$, so gilt für den Ähnlichkeitsfaktor aber auch

$$f = \frac{R_{MNO}}{R_{M''N''O''}} \quad .$$

Da die drei Kreise **Johnson-Kreise** sind, muss $R_{MNO} = r$ gelten , also

$$f = \frac{r}{R_{M'N'O'}} \quad .$$

Setzt man die unterstrichenen Gleichungen für f gleich, so folgt :

$$\frac{r}{R_{M''N''O''}} = \frac{r}{\rho_{M''N''O''}} - 1$$

$$1 = \left(\frac{1}{\rho_{M''N''O''}} - \frac{1}{R_{M''N''O''}}\right)r$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{\rho_{M''N''O''}} - \frac{1}{R_{M''N''O''}}}$$

$$\boxed{r = \frac{R_{M''N''O''} \cdot \rho_{M''N''O''}}{R_{M''N''O''} - \rho_{M''N''O''}}}$$ **Radius der Johnson-Kreise**

Folgerung 1“ :

Zu jedem Dreieck ΔABC existieren drei Johnson-Kreise $K_{M;r}$, $K_{N;r}$, $K_{O;r}$, welche jeweils zwei Dreieckseiten von innen berühren und **deren Mittelpunkte außerhalb des Dreiecks liegen**.

Der Radius der Johnson-Kreise ist $\boxed{r = \frac{R \cdot \rho}{R - \rho}}$, wobei R und ρ Umkreis- und Inkreisradius von ΔABC sind .

Zur Erinnerung : $R = \frac{|a||b||c|}{(\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c)i}$, $\rho = \frac{(\overline{A}a + \overline{B}b + \overline{C}c)i}{2(|a|+|b|+|c|)}$

Derartige Johnson-Kreise heißen **Yff-Kreise** zu ΔABC .

Berechnung des Mittelpunktes M **,** N **,** O :

Parallele im Abstand r zur Seite b durch den Punkt $A+r\frac{b}{|b|}i$:

$$\overline{b}z - b\overline{z} = \overline{b}\left(A+\frac{b}{|b|}ir\right) - b\left(\overline{A}-\frac{\overline{b}}{|b|}ir\right)$$

$$\underline{\overline{b}z - b\overline{z} = \overline{b}A-b\overline{A} + 2|b|ir}$$

$$\overline{b}z - b\overline{z} = \overline{b}A - b\overline{A} + 2|b|ir$$

$$\overline{c}z - c\overline{z} = \overline{c}A - c\overline{A} + 2|c|ir$$

$$M = z = \frac{(\overline{b}A - b\overline{A} + 2|b|ir)c - b(\overline{c}A - c\overline{A} + 2|c|ir)}{\overline{b}c - b\overline{c}}$$

$$M = \frac{(\bar{b}c - b\bar{c})A - bc\bar{A} + bc\bar{A} + 2(|b|c - b|c|)ir}{\bar{b}c - b\bar{c}}$$

$$M = \frac{(\bar{b}c - b\bar{c})A + 2(|b|c - b|c|)ir}{\bar{b}c - b\bar{c}}$$

$$M = A + \frac{2(|b|c - b|c|)ir}{\bar{b}c - b\bar{c}}$$

$$M = A + 2\,\frac{(|b|c - b|c|)}{\bar{b}c - b\bar{c}}\,ir$$

$$\boxed{M = A + 2\,\frac{(|b|c - b|c|)}{\bar{b}c - b\bar{c}}\,\frac{R \cdot \rho}{R + \rho}\,i}$$, analog also

$$\boxed{N = B + 2\,\frac{(|c|a - c|a|)}{\bar{c}a - c\bar{a}}\,\frac{R \cdot \rho}{R + \rho}\,i}$$

$$\boxed{O = C + 2\,\frac{(|a|b - a|b|)}{\bar{a}b - a\bar{b}}\,\frac{R \cdot \rho}{R + \rho}\,i}$$

Kurz gesagt:

Zu jedem Dreieck gibt es zwei unterschiedliche Tripletts von Yff-Kreisen !