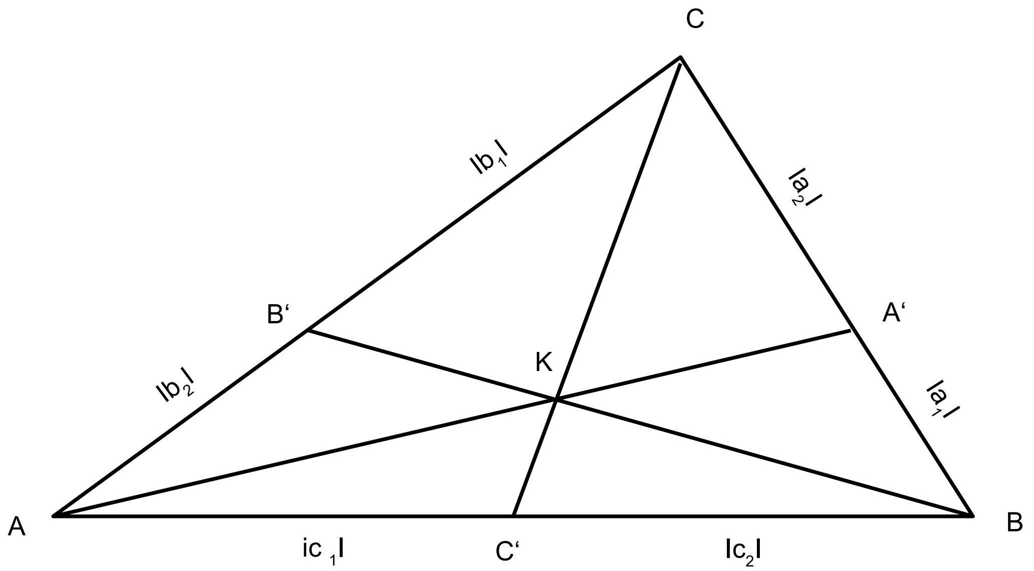
Der Satz von Ceva und seine Umkehrung

Arno Fehringer

August 2019

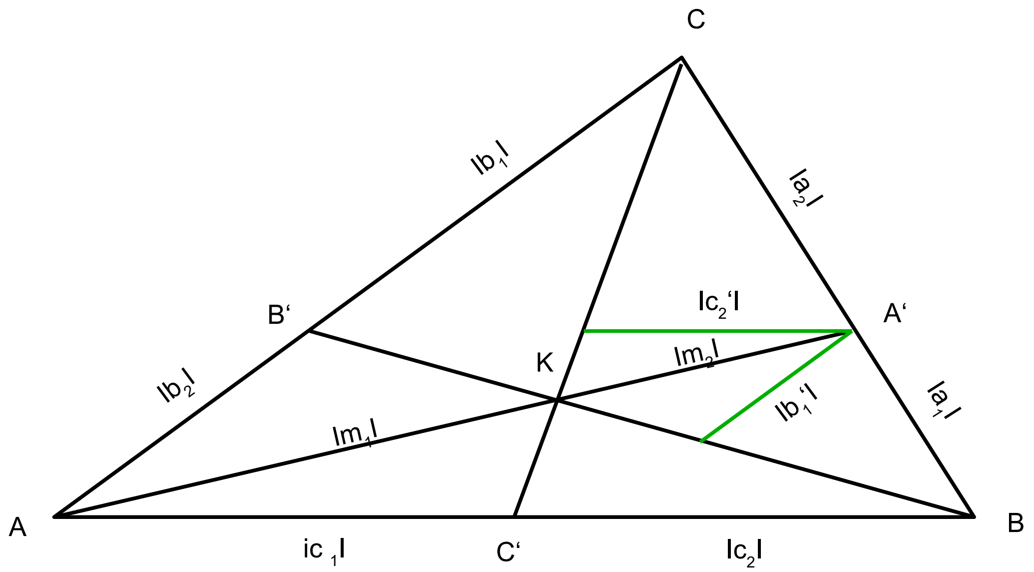
Satz von Ceva (Fassung über Teilverhältnisse)

Im Dreieck seien Eck-Transversalen, die sich im Punkt K schneiden, gegeben.



Dann gilt : $\boxed{\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1}$

Beweis :



$b_1' \parallel b_1$, $c_2' \parallel c_2$

2. Strahlensatz:

$$\frac{|b_1|}{|b_1'|} = \frac{|a|}{|a_1|} \qquad \frac{|c_2'|}{|c_2|} = \frac{|a_2|}{|a|}$$

$$\frac{|b_1'|}{|b_2|} = \frac{|m_2|}{|m_1|} \qquad \frac{|c_1|}{|c_2'|} = \frac{|m_1|}{|m_2|}$$

Produkt der 4 Gleichungen:

$$\frac{|b_1|}{|b_1'|} \cdot \frac{|b_1'|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_2'|}{|c_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2'|} = \frac{|a|}{|a_1|} \cdot \frac{|m_2|}{|m_1|} \cdot \frac{|a_2|}{|a|} \cdot \frac{|m_1|}{|m_2|}$$

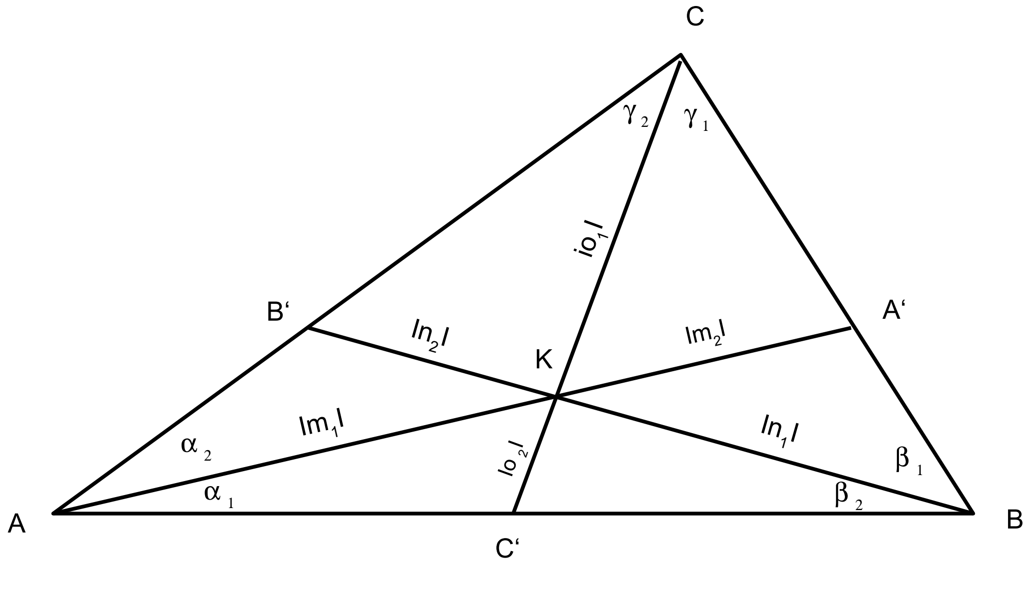
$$\frac{|b_1||c_1|}{|b_2||c_2|} = \frac{|a_2|}{|a_1|}$$

$$\frac{|a_1||b_1||c_1|}{|a_2||b_2||c_2|} = 1$$

q.e.d.

Satz von Ceva (trignometrische Fassung)

Im Dreieck seien Eck-Transversalen, die sich im Punkt K schneiden, gegeben.



Dann gilt : $\boxed{\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1}$

Beweis :

Sinussatz :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} = \frac{|n_1|}{|m_1|} \qquad \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} = \frac{|o_1|}{|n_1|} \qquad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|m_1|}{|o_1|}$$

Produkt der 3 Gleichungen :

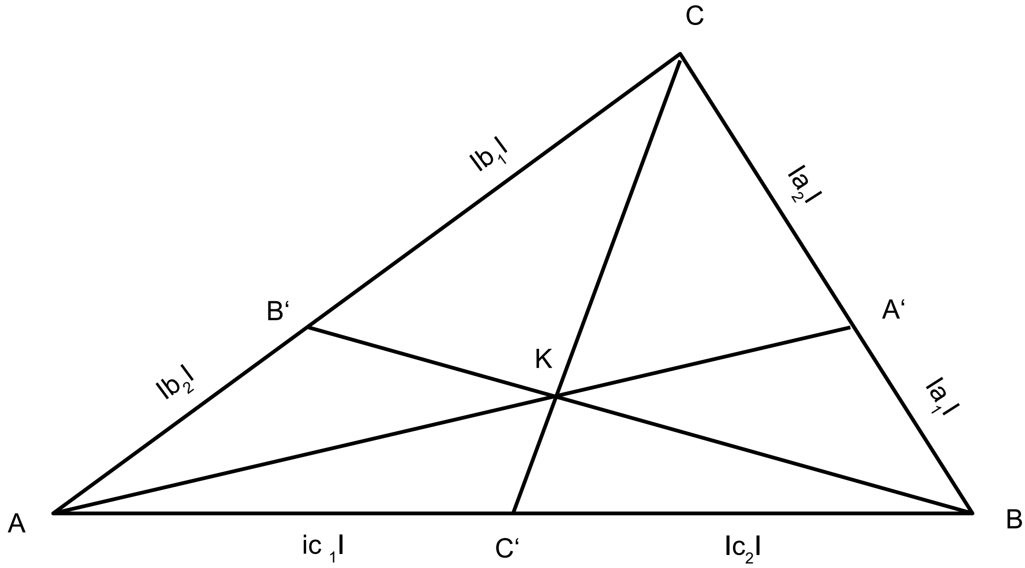
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|n_1|}{|m_1|} \cdot \frac{|o_1|}{|n_1|} \cdot \frac{|m_1|}{|o_1|}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

q.e.d.

Umkehrung des Satzes von Ceva

Gilt im Dreieck mit den Eck-Transversalen AA' , BB' , CC' die Gleichung $\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1$, so haben die Eck-Transversalen einen gemeinsamen Schnittpunkt K .



Beweis :

Sei $\{K\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$. Angenommen $K \notin \overline{CC'}$. Dann gibt es einen Punkt $C'' \in \overline{AB}$ und entsprechende Unterteilungen $|c_1'|$, $|c_2'|$ mit

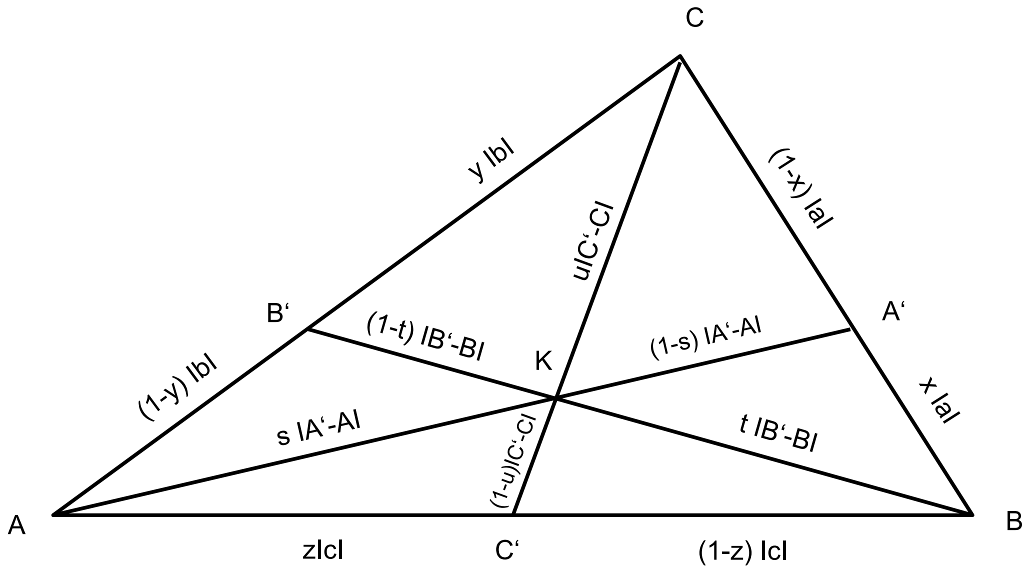
$$\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1'|}{|c_2'|} = 1 \quad .$$

Nach Voraussetzung gilt $\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1$, so dass folgt $\frac{|c_1'|}{|c_2'|} = \frac{|c_1|}{|c_2|}$.

Die ungleichen Teilungspunkte C' , $C'' \in \overline{AB}$ würden das gleiche Teilungsverhältnis festlegen, was jeinen Widerspruch darstellle.

Also folgt $K \in \overline{CC'}$. **q.e.d.**

Berechnung des Teilverhältnisses von Eck-Transversalen mit gemeinsamen Schnittpunkt



$$a + b + c = 0$$

$$A' - A = c + x a \qquad B' - B = -c - (1-y) b$$

$$A' - A = c + x(-c - b)$$

$$A' - A = (1-x)c - xb$$

$$s(A' - A) - t(B' - B) = c$$

$$s((1-x)c - xb) - t(-c - (1-y)b) = c$$

$$((1-x)s + 1t - 1)c + (-xs + (1-y)t)b = 0$$

Weil c , b linear unabhängig sind, muss gelten:

$$(1-x)s + 1 t = 1$$

$$-x s + (1-y)t = 0$$

Damit folgt:

$$s = \frac{1-y}{(1-x)(1-y) + x} \qquad t = \frac{x}{(1-x)(1-y) + x}$$

$$s = \frac{1-y}{1 - y - x + xy + x} \qquad t = \frac{x}{1 - y - x + xy + x}$$

$$\boxed{s = \frac{1-y}{1-y + xy}}$$

$$\boxed{1-s = \frac{xy}{1-y + xy}}$$

$$\frac{s}{t} = \frac{1-y}{x}$$

Analog erhält man die Beziehungen für die anderen Parameter :

$$\boxed{t = \frac{1-z}{1-z + yz}}$$

$$\boxed{1-t = \frac{yz}{1-z + yz}}$$

$$\frac{t}{u} = \frac{1-z}{y}$$

$$\boxed{u = \frac{1-x}{1-x + zx}}$$

$$\boxed{1-u = \frac{zx}{1-x + zx}}$$

$$\frac{u}{s} = \frac{1-x}{z}$$

$$\frac{s}{t} \cdot \frac{t}{u} \cdot \frac{u}{s} = \frac{1-y}{x} \cdot \frac{1-z}{y} \cdot \frac{1-x}{z}$$

$$\boxed{1 = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} \cdot \frac{1-z}{z}}$$

Satz von Ceva

Eine etwas „symmetrischere“ Darstellung ist :

$$\boxed{s = \frac{(1-y)z}{(1-y)z + xyz}}$$

$$\boxed{1-s = \frac{xyz}{(1-y)z + xyz}}$$

$$\boxed{t = \frac{(1-z)x}{(1-z)x + xyz}}$$

$$\boxed{1-t = \frac{xyz}{(1-z)x + xyz}}$$

$$\boxed{u = \frac{(1-x)y}{(1-x)y + xyz}}$$

$$\boxed{1-u = \frac{xyz}{(1-x)y + xyz}}$$

Berechnung des gemeinsamen Schnittpunktes von Eck-Transversalen

$$K = A + s(A' - A) \qquad\qquad A' = B + x(C - B)$$
$$K = (1-s)A + sA' \qquad\qquad A' = (1-x)B + xC$$

$$K = (1-s)A + s((1-x)B + xC)$$
$$K = (1-s)A + s(1-x)B + sxC$$

Es wäre wünschenswert, dass die Formel folgende Symmetrie hat :

$$K = (1-s)A + (1-t)B + (1-u)C$$

Hierzu müsste man zeigen, dass $s(1-x) = 1-t$ und $sx = 1-u$ gilt !

Zur Frage $s(1-x) = 1-t$:

Es ist $\frac{s}{t} = \frac{1-y}{x}$, also $t = \frac{x}{1-y} \cdot s$, und es folgt :

$$s(1-x) = 1-t$$
$$s(1-x) = 1 - \frac{x}{1-y} \cdot s$$
$$\left[(1-x) + \frac{x}{1-y}\right] s = 1$$
$$\left[\frac{(1-x)(1-y) + x}{1-y}\right] s = 1$$
$$\left[\frac{1-y + xy}{1-y}\right] s = 1$$

$$s = \frac{1-y}{1-y + xy} \qquad \textbf{wahre Aussage}$$

Zur Frage $sx = 1-u$:

Es ist $\frac{u}{s} = \frac{1-x}{z}$, also $s = \frac{z}{1-x} \cdot u$, und es folgt :

$$sx = 1-u$$
$$\frac{z}{1-x} ux = 1-u$$
$$\left[\frac{zx}{1-x} + 1\right] u = 1$$
$$\left[\frac{1-x + zx}{1-x}\right] u = 1$$

$$u = \frac{1-x}{1-x + zx} \qquad \textbf{wahre Aussage}$$

Also hat man für den Schnittpunkt der Eck-Transversalen folgende Formel:

$$K = (1-s)A + (1-t)B + (1-u)C$$

$$\boxed{K = \frac{xy}{1-y + xy} A + \frac{yz}{1-z + yz} B + \frac{zx}{1-x + zx} C}$$

In „symmetrischerer“ Form :

$$\boxed{K = \frac{xyz}{(1-y)z + xyz} A + \frac{xyz}{(1-z)x + xyz} B + \frac{xyz}{(1-x)y + xyz} C}$$