Berechnung des Lemoine-Punktes

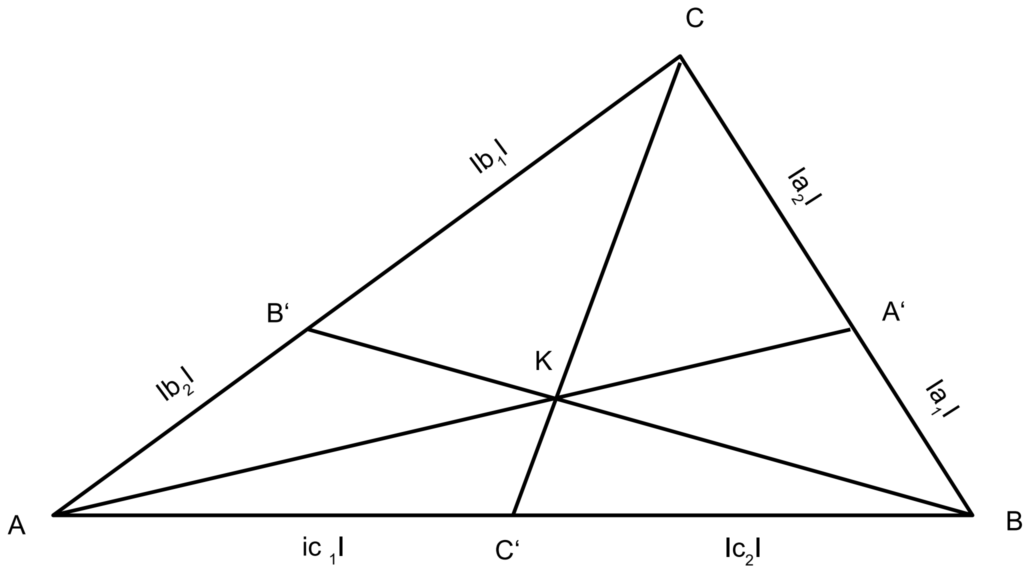
Arno Fehringer

August 2019

Der Satz von Ceva und seine Umkehrung

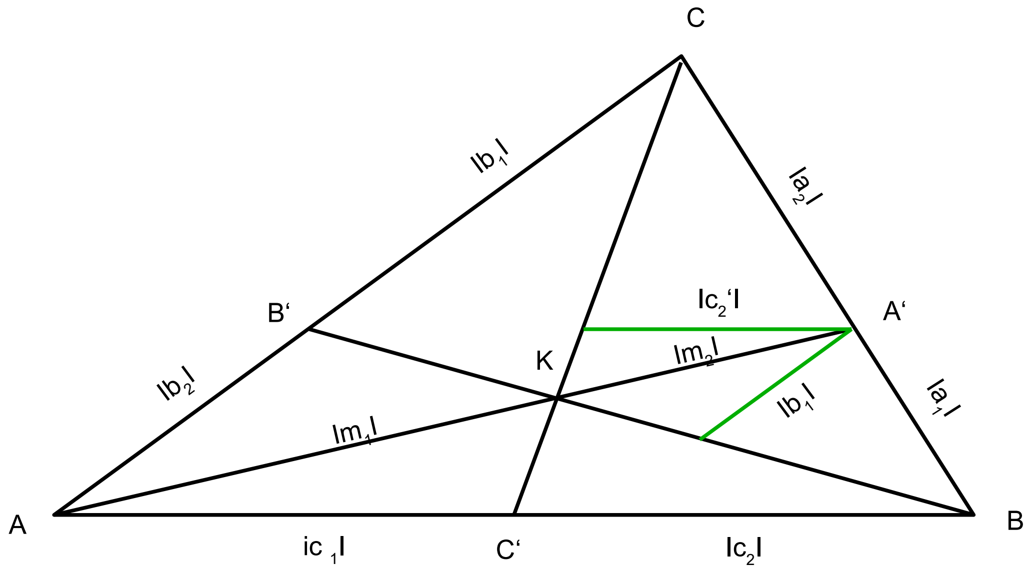
Satz von Ceva (Fassung über Teilverhältnisse)

Im Dreieck seien Eck-Transversalen, die sich im Punkt K schneiden, gegeben.



Dann gilt : $\boxed{\dfrac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \dfrac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \dfrac{|c_1|}{|c_2|} = 1}$

Beweis :



$b_1' \parallel b_1$, $c_2' \parallel c_2$

2. Strahlensatz:

$$\frac{|b_1|}{|b_1'|} = \frac{|a|}{|a_1|} \qquad \frac{|c_2'|}{|c_2|} = \frac{|a_2|}{|a|}$$

$$\frac{|b_1'|}{|b_2|} = \frac{|m_2|}{|m_1|} \qquad \frac{|c_1|}{|c_2'|} = \frac{|m_1|}{|m_2|}$$

Produkt der 4 Gleichungen:

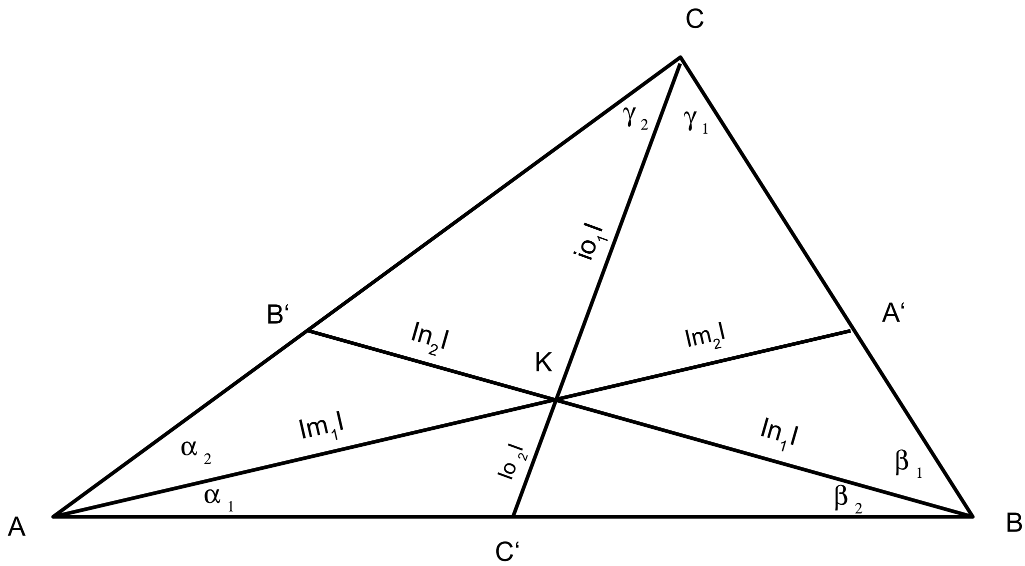
$$\frac{|b_1|}{|b_1'|} \cdot \frac{|b_1'|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_2'|}{|c_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2'|} = \frac{|a|}{|a_1|} \cdot \frac{|m_2|}{|m_1|} \cdot \frac{|a_2|}{|a|} \cdot \frac{|m_1|}{|m_2|}$$

$$\frac{|b_1||c_1|}{|b_2||c_2|} = \frac{|a_2|}{|a_1|}$$

$$\frac{|a_1||b_1||c_1|}{|a_2||b_2||c_2|} = 1$$ **q.e.d.**

Satz von Ceva (trignometrische Fassung)

Im Dreieck seien Eck-Transversalen, die sich im Punkt schneiden, gegeben.



Dann gilt : $\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1}$

Beweis :

Sinussatz :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} = \frac{|n_1|}{|m_1|} \qquad \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} = \frac{|o_1|}{|n_1|} \qquad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|m_1|}{|o_1|}$$

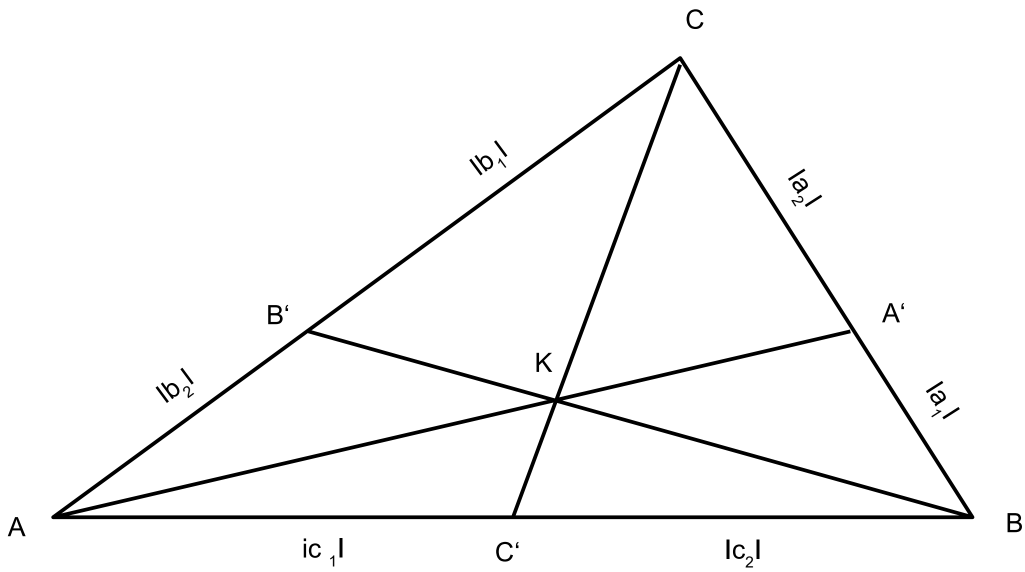
Produkt der 3 Gleichungen :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|n_1|}{|m_1|} \cdot \frac{|o_1|}{|n_1|} \cdot \frac{|m_1|}{|o_1|}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$ **q.e.d.**

Umkehrung des Satzes von Ceva

Gilt im Dreieck mit den Eck-Transversalen AA' , BB' , CC' die Gleichung $\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1$, so haben die Eck-Transversalen einen gemeinsamen Schnittpunkt K .



Beweis :

Sei $\{K\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$. Angenommen $K \notin \overline{CC'}$. Dann gibt es einen Punkt $C'' \in \overline{AB}$ und entsprechende Unterteilungen $|c_1'|$, $|c_2'|$ mit

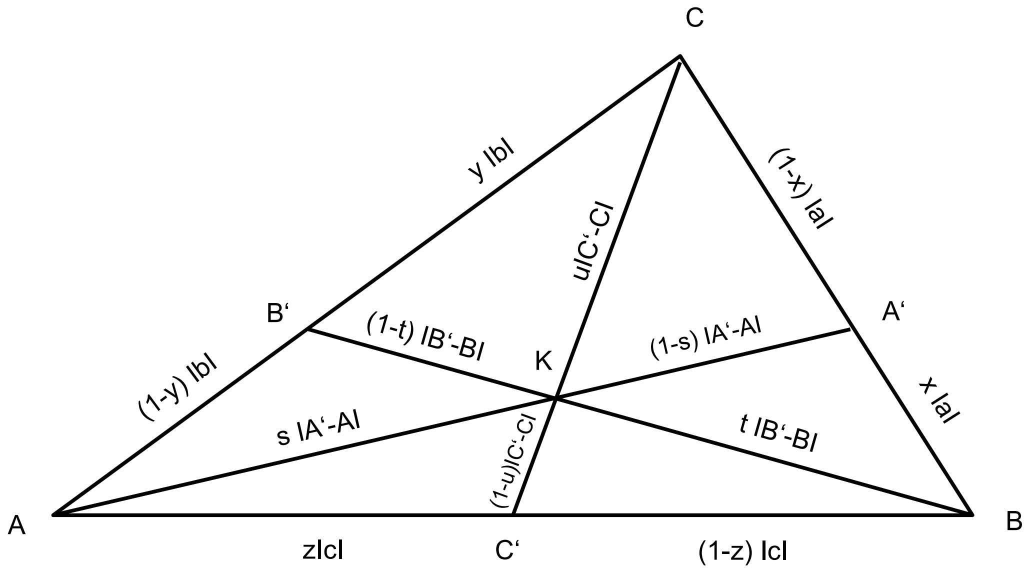
$$\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1'|}{|c_2'|} = 1 \quad .$$

Nach Voraussetzung gilt $\frac{|a_1|}{|a_2|} \cdot \frac{|b_1|}{|b_2|} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|} = 1$, so dass folgt $\frac{|c_1'|}{|c_2'|} = \frac{|c_1|}{|c_2|}$.

Die ungleichen Teilungspunkte C' , $C'' \in \overline{AB}$ würden das gleiche Teilungsverhältnis festlegen, was jeinen Widerspruch darstellle.

Also folgt $K \in \overline{CC'}$. **q.e.d.**

Berechnung des Teilverhältnisses von Eck-Transversalen mit gemeinsamen Schnittpunkt



$$a + b + c = 0$$

$$A' - A = c + xa \qquad B' - B = -c - (1-y)b$$

$$A' - A = c + x(-c-b)$$

$$A' - A = (1-x)c - xb$$

$$s(A'-A) - t(B'-B) = c$$

$$s((1-x)c - xb) - t(-c - (1-y)b) = c$$

$$((1-x)s + 1t - 1)c + (-xs + (1-y)t)b = 0$$

Weil c , b linear unabhängig sind, muss gelten:

$$(1-x)s + 1 \quad t = 1$$

$$-x \quad s + (1-y)t = 0$$

Damit folgt:

$$s = \frac{1-y}{(1-x)(1-y) + x} \qquad t = \frac{x}{(1-x)(1-y) + x}$$

$$s = \frac{1-y}{1 - y - x + xy + x} \qquad t = \frac{x}{1 - y - x + xy + x}$$

$$\boxed{s = \frac{1-y}{1-y + xy}} \qquad \frac{s}{t} = \frac{1-y}{x}$$

$$\boxed{1-s = \frac{xy}{1-y + xy}}$$

Analog erhält man die Beziehungen für die anderen Parameter :

$$\boxed{t = \frac{1-z}{1-z + yz}} \qquad \frac{t}{u} = \frac{1-z}{y}$$

$$\boxed{1-t = \frac{yz}{1-z + yz}}$$

$$\boxed{u = \frac{1-x}{1-x + zx}} \qquad \frac{u}{s} = \frac{1-x}{z}$$

$$\boxed{1-u = \frac{zx}{1-x + zx}}$$

$$\frac{s}{t} \cdot \frac{t}{u} \cdot \frac{u}{s} = \frac{1-y}{x} \cdot \frac{1-z}{y} \cdot \frac{1-x}{z}$$

$$\boxed{1 = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} \cdot \frac{1-z}{z}}$$

Satz von Ceva

Eine etwas „symmetrischere“ Darstellung ist :

$$\boxed{s = \frac{(1-y)z}{(1-y)z + xyz}}$$

$$\boxed{1-s = \frac{xyz}{(1-y)z + xyz}}$$

$$\boxed{t = \frac{(1-z)x}{(1-z)x + xyz}}$$

$$\boxed{1-t = \frac{xyz}{(1-z)x + xyz}}$$

$$\boxed{u = \frac{(1-x)y}{(1-x)y + xyz}}$$

$$\boxed{1-u = \frac{xyz}{(1-x)y + xyz}}$$

Berechnung des gemeinsamen Schnittpunktes von Eck-Transversalen

$$K = A + s(A'-A) \qquad A' = B + x(C-B)$$
$$K = (1-s)A + sA' \qquad A' = (1-x)B + xC$$

$$K = (1-s)A + s((1-x)B + xC)$$
$$K = (1-s)A + s(1-x)B + sxC$$

Es wäre wünschenswert, dass die Formel folgende Symmetrie hat :

$$K = (1-s)A + (1-t)B + (1-u)C$$

Hierzu müsste man zeigen, dass $s(1-x) = 1-t$ und $sx = 1-u$ gilt !

Zur Frage $s(1-x) = 1-t$:

Es ist $\frac{s}{t} = \frac{1-y}{x}$, also $t = \frac{x}{1-y} \cdot s$, und es folgt :

$$s(1-x) = 1-t$$
$$s(1-x) = 1 - \frac{x}{1-y} \cdot s$$
$$\left[(1-x) + \frac{x}{1-y}\right]s = 1$$
$$\left[\frac{(1-x)(1-y) + x}{1-y}\right]s = 1$$
$$\left[\frac{1-y + xy}{1-y}\right]s = 1$$

$$s = \frac{1-y}{1-y + xy}$$ **wahre Aussage**

Zur Frage $sx = 1-u$:

Es ist $\frac{u}{s} = \frac{1-x}{z}$, also $s = \frac{z}{1-x} \cdot u$, und es folgt :

$$sx = 1-u$$
$$\frac{z}{1-x} ux = 1-u$$
$$\left[\frac{zx}{1-x} + 1\right]u = 1$$

$$\left[\frac{1-x + zx}{1-x}\right]u = 1$$

$$u = \frac{1-x}{1-x + zx}$$ **wahre Aussage**

Also hat man für den Schnittpunkt der Eck-Transversalen folgende Formel:

$$K = (1-s)A + (1-t)B + (1-u)C$$

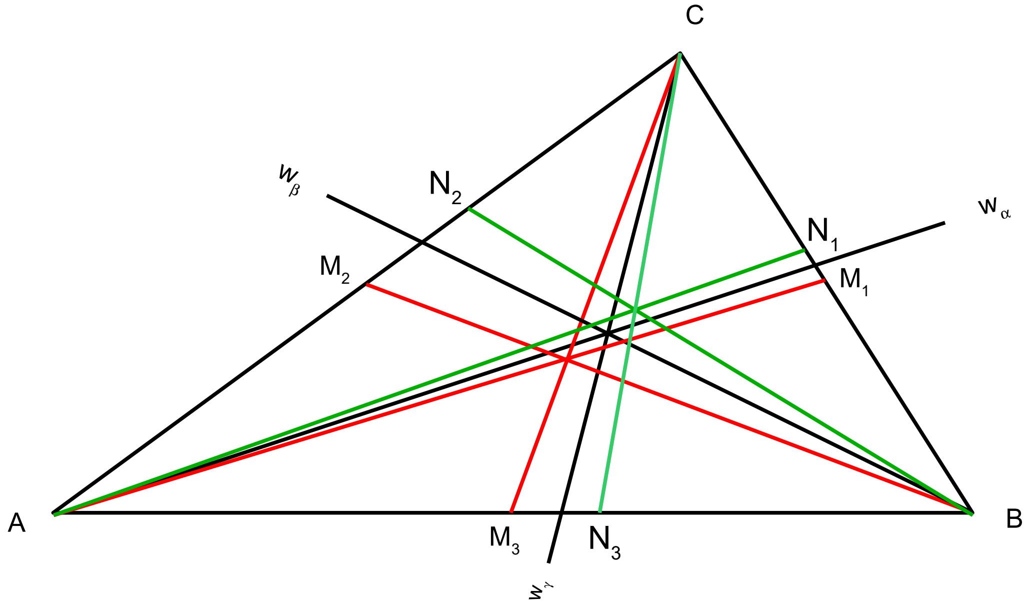
$$\boxed{K = \frac{xy}{1-y + xy} A + \frac{yz}{1-z + yz} B + \frac{zx}{1-x + zx} C}$$

In „symmetrischerer" Form :

$$\boxed{K = \frac{xyz}{(1-y)z + xyz} A + \frac{xyz}{(1-z)x + xyz} B + \frac{xyz}{(1-x)y + xyz} C}$$

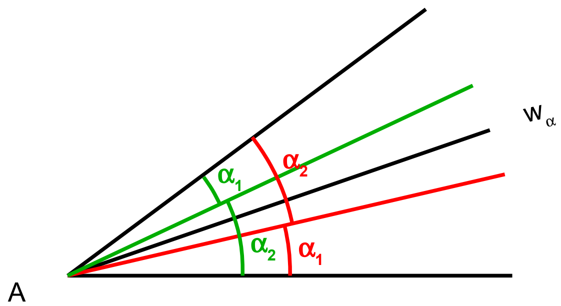
Der Lemoine-Punkt

Spiegelt man die **Medianen** AM_1 , BM_2 , CM_3 an den entsprechenden Winkelhalbierenden w_α , w_β , w_γ , so erhält man die sogenannten **Symmedianen** AN_1 , BN_2 , CN_3 .



Da sich die **Medianen** im Schwerpunkt schneiden, gilt nach dem **Satz von Ceva**

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1 \quad .$$

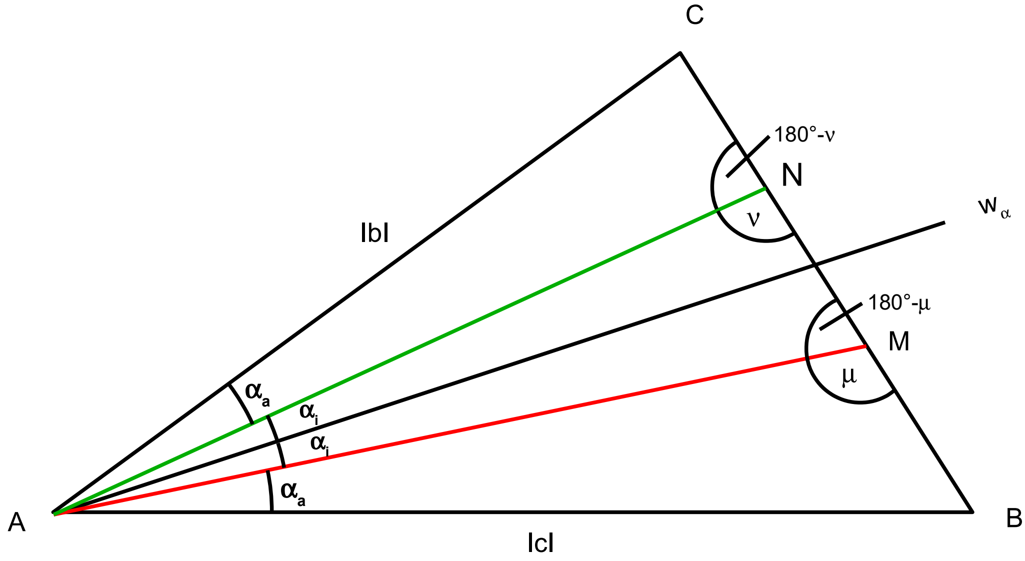


Bildet man den Kehrwert der Gleichung, so stellt neue Gleichung

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}=1$$

die **Gleichung von Ceva** für die **Symmedianen** dar, so dass sich die **Symmedianen** ebenfalls in einem Punkt , dem sogenannten **Lemoine-Punkt**, schneiden.

Der Satz von Steiner



Für die symmetrisch zur Winkelhalbieren w_α gelegenen Eck-Transfersalen AM , AN gilt :

$$\frac{|M-B|}{|M-C|}\cdot\frac{|N-B|}{|N-C|}=\frac{|c|^2}{|b|^2}$$

Beweis :

Sinussatz:

$$\frac{|M-B|}{|c|}=\frac{\sin\alpha_a}{\sin\mu} \qquad \frac{|M-C|}{|b|}=\frac{\sin\alpha_a+2\alpha_i}{\sin 180°-\mu}$$

Quotient der beiden Gleichungen :

$$\frac{|M-B|}{|c|}\cdot\frac{|b|}{|M-C|}=\frac{\sin\alpha_a}{\sin\mu}\cdot\frac{\sin 180°-\mu}{\sin\alpha_a+2\alpha_i}$$

$$\frac{|M-B|}{|c|}\cdot\frac{|b|}{|M-C|}=\frac{\sin\alpha_a}{\sin\alpha_a+2\alpha_i}$$

$$\underline{\frac{|M-B|}{|M-C|}=\frac{|c|\sin\alpha_a}{|b|\sin\alpha_a+2\alpha_i}}$$

Analog folgt : $$\underline{\frac{|N-B|}{|N-C|}=\frac{|c|\sin\alpha_a+2\alpha_i}{|b|\sin\alpha_a}}$$

Produkt der beiden Gleichungen :

$$\frac{|M-B|}{|M-C|}\cdot\frac{|N-B|}{|N-C|}=\frac{|c|^2}{|b|^2}$$

q.e.d.

Spezialfall des Satzes von Steiner

Ist AM der **Median** mit $|M-B| = |M-C|$, dann ist AN der entsprechende **Symmedian**, und es folgt

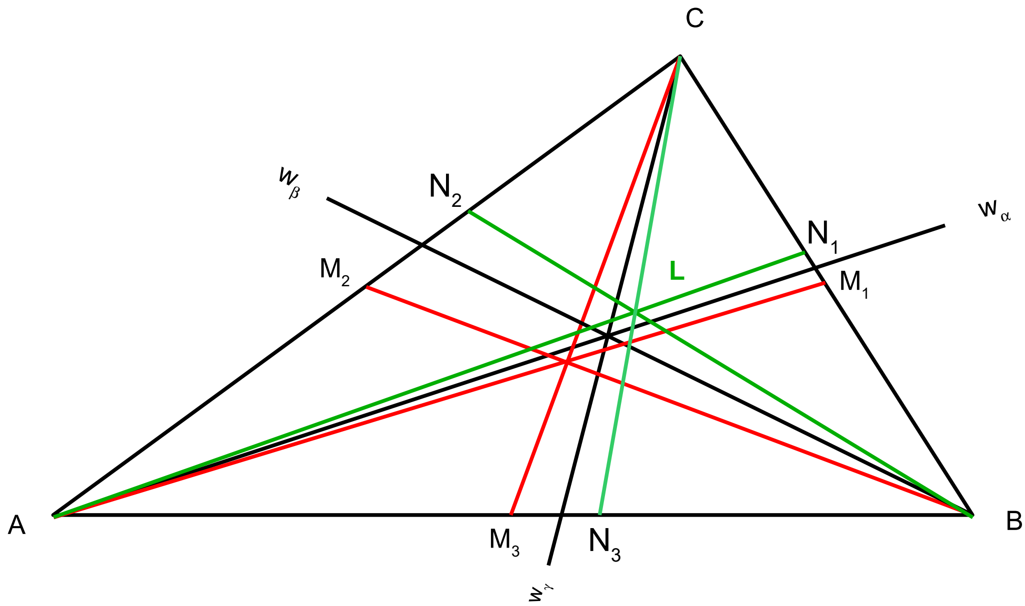
$$\frac{|M-B|}{|M-C|} \cdot \frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2} \quad ,$$

$$\boxed{\frac{|N-B|}{|N-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2}} \quad .$$

Allgemein gilt nun :

Die **Symmediane** teilen die entsprechenden Seiten im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten :

$$\boxed{\frac{|N_1-B|}{|N_1-C|} = \frac{|c|^2}{|b|^2}} \qquad \boxed{\frac{|N_2-C|}{|N_2-A|} = \frac{|a|^2}{|c|^2}} \qquad \boxed{\frac{|N_3-A|}{|N_3-B|} = \frac{|b|^2}{|a|^2}}$$



Die Parameter zur Berechnung des **Lemoine-Punktes** sind nun

$$\frac{x}{1-x} = \frac{|c|^2}{|b|^2} \quad , \quad \frac{y}{1-y} = \frac{|a|^2}{|c|^2} \quad , \quad \frac{z}{1-z} = \frac{|b|^2}{|a|^2} \quad ,$$

und es folgt

$$L = \frac{xy}{1-y + xy} A + \frac{yz}{1-z + yz} B + \frac{zx}{1-x + zx} C$$

Berechnung des Koeffizienten von A :

$$x = \frac{|c|^2}{|c|^2+|b|^2} \quad , \quad y = \frac{|a|^2}{|a|^2+|c|^2}$$

$$1-y = \frac{|c|^2}{|a|^2+|c|^2}$$

$$\frac{xy}{1-y+xy} = \frac{\dfrac{|c|^2|a|^2}{\left(|c|^2+|b|^2\right)\left(|a|^2+|c|^2\right)}}{\dfrac{|c|^2}{|a|^2+|c|^2} + \dfrac{|c|^2|a|^2}{\left(|c|^2+|b|^2\right)\left(|a|^2+|c|^2\right)}}$$

$$\frac{xy}{1-y+xy} = \frac{|c|^2|a|^2}{|c|^2\left(|c|^2+|b|^2\right) + |c|^2|a|^2}$$

$$\frac{xy}{1-y+xy} = \frac{|a|^2}{|c|^2+|b|^2 + |a|^2}$$

$$\underline{\frac{xy}{1-y+xy} = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$$

Analog folgt : $\underline{\dfrac{yz}{1-z+yz} = \dfrac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$, $\underline{\dfrac{zx}{1-x+zx} = \dfrac{|c|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$

Damit erhält man den **Lemoine-Punkt** zu :

$$\boxed{L = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} A + \frac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} B + \frac{|c|^2}{|a|^2+|b|^2+|c|^2} C}$$

Samm Luo ; Cosmin Pohoata : Let‘s talk about Symmedians! ; MATHEMATICAL REFLECTIONS 4 (2013)
https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf.

a