Faktorisierung der Polynomfunktionen vom Grad 2 (quadratischen Funktionen) mit Hilfe der Nullstellen

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a\ ,\ b\ ,\ c \in \mathbb{R}\ ,\quad a \neq 0$$

Nullstellen :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$+ \qquad\qquad \cdot$$

Vieta'sche Gleichungen

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} \quad - \quad b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \cdot \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Faktorisierung des Funktionsterms mit Hilfe der Nullstellen :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right]$$

$$f(x) = a\left[(x - x_1)x - x_2(x - x_1)\right]$$

$$f(x) = a\left[(x - x_1) \cdot (x - x_2)\right]$$

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

Faktorisierung der Polynomfunktionen vom Grad 3 (kubische Funktionen) mit Hilfe von Nullstellen

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad , \quad a , b , c , d \in \mathbb{R} , \quad a \neq 0$$

Sei x_1 **eine Nullstelle von** f **. Das heißt :** $\boxed{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0}$

Frage : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)[\ ?\ ]$

Antwort :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)[\ ?\ ]$$
$$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : a(x - x_1) = [\ ?\ ]$$

Polynomdivision (entsprechend dem Divisionsalgorithmus für Zahlen) :

$$\begin{array}{l}
(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (ax - ax_1) = x^2 + \frac{(b+ax_1)}{a}x + \frac{(c+(b+ax_1)x_1)}{a} \\
\underline{-[ax^3 - ax_1x^2]} \\
\qquad (b+ax_1)x^2 + cx + d \\
\qquad \underline{-[(b+ax_1)x^2 - (b+ax_1)x_1x]} \\
\qquad\qquad (c+(b+ax_1)x_1)x + d \\
\qquad\qquad \underline{-[(c+(b+ax_1)x_1)x - (c+(b+ax_1)x_1)x_1]} \\
\qquad\qquad\qquad d + (c+(b+ax_1)x_1)x_1 \quad \textbf{Rest}
\end{array}$$

Was ist nun der Rest $d + (c+(b+ax_1)x_1)x_1$ **bei der Division ?**

$$d + (c+(b+ax_1)x_1)x_1 = d + cx_1 + (b+ax_1)x_1^2$$
$$d + (c+(b+ax_1)x_1)x_1 = d + cx_1 + bx_1^2 + ax_1^3$$
$$d + (c+(b+ax_1)x_1)x_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$$

$\boxed{d + (c+(b+ax_1)x_1)x_1 = 0}$ nach Voraussetzung für die Nullstelle

Folgerung : Die kubische Funktion ist mit Hilfe der Nullstelle x_1 **faktorisierbar :**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)\left[x^2 + \frac{b+ax_1}{a}x + \frac{c+(b+ax_1)x_1}{a} \right]$$

Falls nun der quadratische Faktor $x^2 + \frac{b+ax_1}{a} + \frac{c+(b+ax_1)x_1}{a}$ Nullstellen x_2 , x_3 aufwiese, könnte man diesen damit faktorisieren, und man erhielte die **Faktorisierung der kubischen Funktion mit Hilfe von 3 Nullstellen :**

$$\boxed{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$$