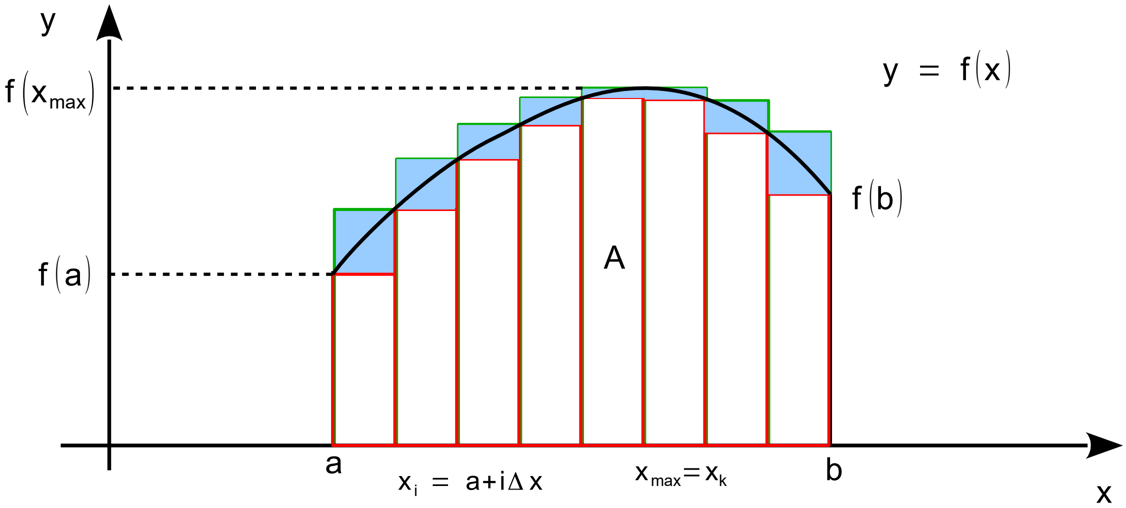
Integralrechnung

Fläche A unter dem Graphen der stetigen Funktion $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$



$i=0,\dots,2^n \qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{2^n}$

$x_0 = a \quad , \quad x_{2^n} = b$

Für alle $n \in \mathbb{N}$:

2^n - te Näherung von unten :

$$\underline{A}_{2^n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \min f\left(\left[x_i;x_{i+1}\right]\right)\Delta x$$

2^n - te Näherung von oben :

$$\overline{A}_{2^n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \max f\left(\left[x_i;x_{i+1}\right]\right)\Delta x$$

(1)

$$\boxed{\underline{A}_{2^n} < \overline{A}_{2^n}}$$

$$\overline{A}_{2^n} - \underline{A}_{2^n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \max f\left(\left[x_i;x_{i+1}\right]\right)\Delta x - \sum_{i=0}^{2^n-1} \min f\left(\left[x_i;x_{i+1}\right]\right)\Delta x$$

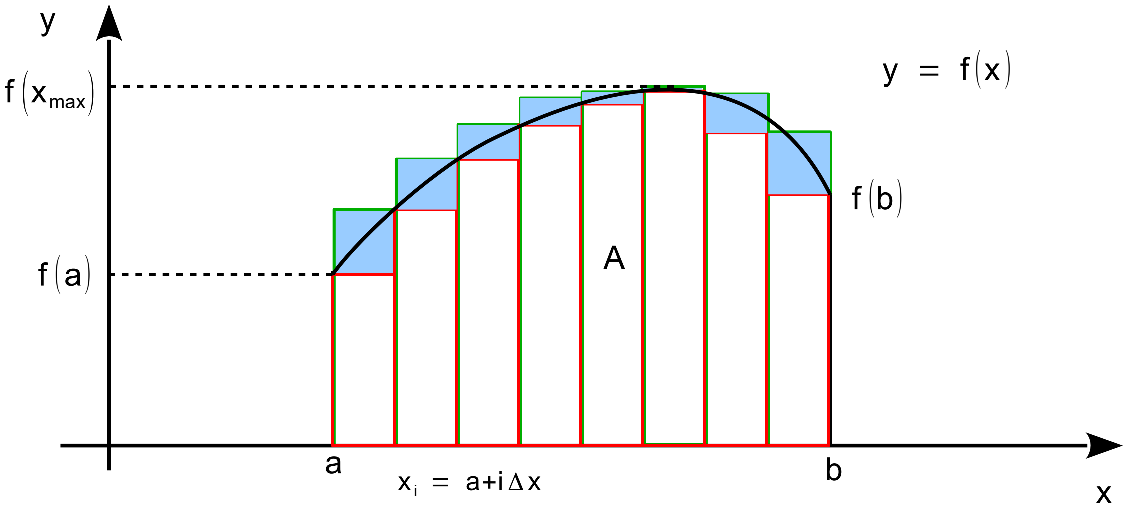
$$\overline{A}_{2^n} - \underline{A}_{2^n} = \left[\, f(x_{max}) - f(a) + f(x_{max}) - f(b) \,\right]\Delta x$$

$$\overline{A}_{2^n} - \underline{A}_{2^n} = \left[\, f(x_{max}) - f(a) + f(x_{max}) - f(b) \,\right]\frac{b-a}{2^n}$$

(2)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{A}_{2^n} - \underline{A}_{2^n} = 0}$$

Falls nun $x_k < x_{max} < x_{k+1}$ für ein bestimmtes k ist, folgt ebenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} = 0$, wie die folgende Darstellung zeigt :



$x_i = a + i\,\Delta x$

$i = 0, \ldots, 2^n \qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{2^n}$

$x_0 = a \quad , \quad x_{2^n} = b$

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \max f\left(\left[x_i ; x_{i+1}\right]\right)\Delta x - \sum_{i=0}^{2^n-1} \min f\left(\left[x_i ; x_{i+1}\right]\right)\Delta x$$

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} < \left[\, f\left(x_{max}\right) - f\left(a\right) + f\left(x_{max}\right) - f\left(b\right) \right]\Delta x$$

$$\overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} < \left[\, f\left(x_{max}\right) - f\left(a\right) + f\left(x_{max}\right) - f\left(b\right) \right] \frac{b-a}{2^n}$$

(2)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{A_{2^n}} - \underline{A_{2^n}} = 0}$$

(3)

$$\boxed{\underline{A_{2^n}} \le \underline{A_{2^{n+1}}} < \overline{A_{2^{n+1}}} \le \overline{A_{2^n}}}$$

Die Folge der Intervalle $\left[\underline{A_{2^n}} \;;\; \overline{A_{2^n}}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine **Intervallschachtelung** mit **Zentrum** A mit $A = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{A_{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{A_{2^n}}$, welches den **gesuchten Flächeninhalt** darstellt .

In Anlehnung an **Leibnitz (1646 – 1716)** verwendet man folgende suggestive Schreibweise für die Berechnung des Flächeninhalts oder für die **Berechnung des bestimmten Integrals** :

$$A = \lim_{n \to \infty} \underline{A_{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

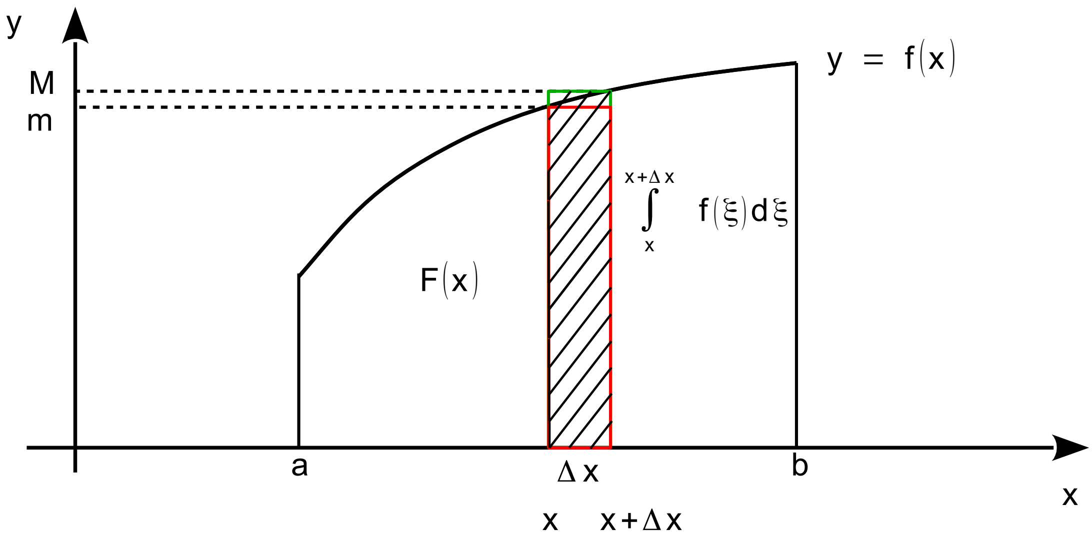
Sprechweise : „Integral f(x) dx von a bis b“

Das Integralzeichen $\int_a^b$ kombiniert mit den Integrationsgrenzen a und b stellt ein langgezogenes S im Sinne der Summation dar, die Differenz Δx geht über in das „unendlich kleine“ Differential dx .

Die Flächeninhaltsfunktion

Gegeben sei die stetige Funktion $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Die Flächeninhaltsfunktion $F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert :

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$



$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi}{\Delta x}$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta x}$$

Es gilt : $m\Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi \leq M\Delta x$

mit m, M Minimum und Maximum von f auf $[x;x+\Delta x]$ und $\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x)$,

$$m \leq \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta x} \leq M \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta x} = f(x)$$, also

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x) \quad ,$$

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad .$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion F ist gleich der Integrandenfunktion f. Die Flächeninhaltsfunktion F ist eine **Stammfunktion** der Integrandenfunktion f.

Berechnung des Integrals mittels Stammfunktionen

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\ d\xi = \int_{a}^{x_2} f(\xi)\ d\xi - \int_{a}^{x_1} f(\xi)\ d\xi$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\ d\xi = F(x_2) - F(x_1) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

Falls nun $\tilde{F}$ **irgendeine Stammfunktion** von f ist, unterscheidet sich diese von F nur durch eine Konstante c :

$$\tilde{F} = F + c \quad , \quad F = \tilde{F} - c$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi) d\xi = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi) d\xi = \tilde{F}(x_2) - c - \left(\tilde{F}(x_1) - c\right)$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\ d\xi = \tilde{F}(x_2) - \left(\tilde{F}(x_1)\right)} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}' = f$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Schreib- und Sprechweise :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\ d\xi = \tilde{F}(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

„ $\tilde{F}$ in den Grenzen x_1 , x_2 “

Integral über negative Funktionen

Gegeben sei die stetige Funktion $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \le 0$. Dann gilt :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b -(-f(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} -(-f(x_i))\Delta x = -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} -f(x_i)\Delta x = -\int_a^b -f(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := -\int_a^b -f(x)\,dx}$$

Für die Fläche A „unter“ dem Graphen von f gilt dann :

$$\boxed{A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|}$$

Einige Grundeigenschaften des Integrals

(1) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad , \quad a \le c \le b$$

(2) $$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

(3) $$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \quad , \quad c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

Kettenregel, Substitutionsregel

Sei $\varphi : [\alpha;\beta] \longrightarrow [a;b)$ eine bijektive differenzierbare Funktion und $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F . Dann gilt :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(b) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi)\ d\xi \quad ,$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi)\ d\xi}$$

Substitutionsregel

Produktregel (Partielle Integration)

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))'\ dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) + \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b$$

$$\boxed{\int_a^b u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx}$$