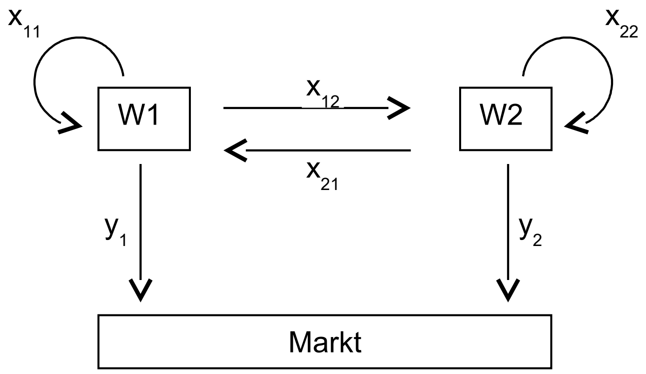
Leontief - Modell

In zwei Zweigwerken W1 und W2 werden Güter in der Menge x_1 bzw. x_2 hergestellt, die gegenseitig geliefert und verbraucht bzw. auf den Markt gegeben werden.



	W1	W2	Markt	Gesamtproduktion
W1	x_{11}	x_{12}	y_1	x_1
W2	x_{21}	x_{22}	y_2	x_2

$x_{11} + x_{12} + y_1 = x_1$

$x_{21} + x_{22} + y_2 = x_2$

Beim **Leontiefmodell** nimmt man an, dass die untereinander verbrauchten Güter jeweils proportional zur Gesamtproduktion sind :
Menge des von W_i gelieferten und in W_k verbrauchten Gutes $x_{ik} \sim x_k$ Menge des von W_k erzeugten Gutes

$x_{11} = a_{12} \cdot x_1$ $\qquad$ $x_{12} = a_{12} \cdot x_2$

$x_{21} = a_{21} \cdot x_1$ $\qquad$ $x_{22} = a_{22} \cdot x_2$

$a_{12} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + y_1 = x_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + y_2 = x_2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Input-Matrix, Produktionsvektor, Marktvektor

$$Ax + y = x$$

$$(E - A)x = y$$

$$x = (E - A)^{-1} y$$

Technologie-Matrix

Wassily Leontief (1906-1999), USA
Nobelpreis **1973** für die Ausarbeitung der Input-Output-Methode sowie für ihre Anwendung bei wichtigen wirtschaftlichen Problemen.

Produktionsstufen

In einem Betrieb werden aus vier Rohstoffen R_1 , R_2 , R_3 , R_4 über drei Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 , Z_3 drei Endprodukte E_1 , E_2 , E_3 hergestellt.

Rohstoffe
Kies,Zement,Stahl ,Wasser
R_1 , R_2 , R_3 , R_4

⟶

Zwischenprodukte
Wände,Stützen,Träger
Z_1 , Z_2 , Z_3

⟶

Endprodukte
Halle1,Halle2, Halle 3
E_1 , E_2 , E_3

	Z_1	**Z_2**	**Z_3**
R_1	0,7	0,55	0,5
R_2	0,1	0,2	0,2
R_3	0,1	0,15	0,2
R_4	0,1	0,1	0,1

	E_1	**E_2**	**E_3**
Z_1	240	300	320
Z_2	80	120	280
Z_3	80	180	200

$$A_{Rz}=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \qquad A_{ZE}=\begin{pmatrix} 240 & 300 & 320 \\ 80 & 120 & 280 \\ 80 & 180 & 200 \end{pmatrix}$$

Erklärung:
Für 1t des Produktes **Z_2** benötigt man 0,15 t des Rohstoffes **R_3** .
Für eine Einheit des Endproduktes **E_3** benötigt man 300 t des Zwischenproduktes **Z_1** .

Rohstoffe
Kies, Zement, Stahl , Wasser
R_1 , R_2 , R_3 , R_4

⟶

Endprodukte
Halle1, Halle 2, Halle 3
E_1 , E_2 , E_3

$$A_{RE}$$

$$A_{RE}=A_{RZ}\cdot A_{ZE}$$

$$A_{RE}=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 240 & 300 & 320 \\ 80 & 120 & 280 \\ 80 & 180 & 200 \end{pmatrix}$$

$$A_{RE}=\begin{pmatrix} 252 & 366 & 478 \\ 56 & 90 & 128 \\ 52 & 84 & 114 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$$

Beispielrechnung: Zur Herstellung von E_1 braucht man

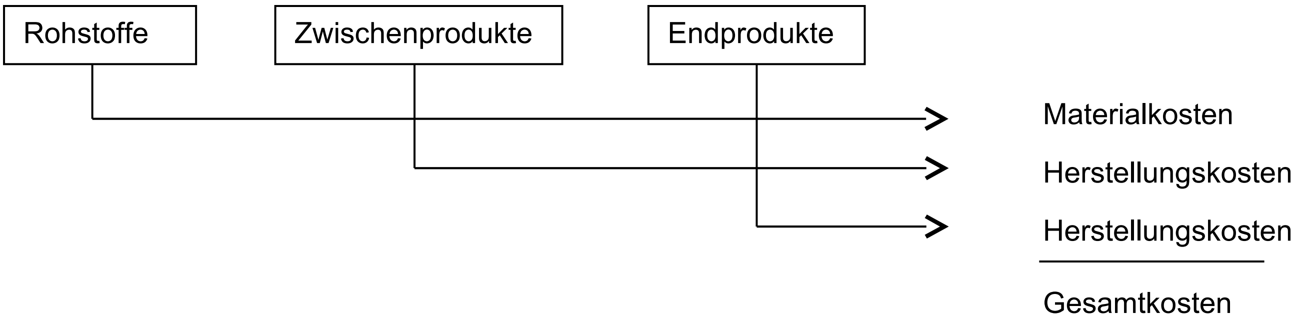
$240 \cdot 0,7 + 80 \cdot 0,55 + 80 \cdot 0,5 = 252$ Einheiten von R_1 .

Kosten

$$K_{Material\ R}{}^{T}=\begin{pmatrix}27 & 190 & 600 & 3\end{pmatrix}$$

$$K_{Herstellung\ Z}{}^{T}=\begin{pmatrix}80 & 100 & 120\end{pmatrix}$$

$$K_{Herstellung\ E}{}^{T}=\begin{pmatrix}40000 & 48000 & 60000\end{pmatrix}$$



Gesamtkosten für jeweils 1 Einheit der Endprodukte

$$K_{Gesamt}{}^{T}=K_{Material\ R}{}^{T}\cdot A_{RE}\ +\ K_{Herstellung\ Z}{}^{T}\cdot A_{ZE}\ +\ K_{Herstellung\ E}{}^{T}$$

$$K_{Material\ R}{}^{T}\cdot A_{RE}=\begin{pmatrix}27 & 190 & 600 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}252 & 366 & 478\\ 56 & 90 & 128\\ 52 & 84 & 114\\ 40 & 60 & 80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48764 & 7762 & 105866\end{pmatrix}$$

$$K_{Herstellung\ Z}{}^{T}\cdot A_{ZE}=\begin{pmatrix}80 & 100 & 120\end{pmatrix}\begin{pmatrix}240 & 300 & 320\\ 80 & 120 & 280\\ 80 & 180 & 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36800 & 57600 & 77600\end{pmatrix}$$

$$K_{Herstellung\ E}{}^{T}=\begin{pmatrix}40000 & 48000 & 60000\end{pmatrix}$$

$$K_{Gesamt}{}^{T} = \begin{pmatrix}48764 & 183162 & 77600\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}36800 & 57600 & 77600\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}40000 & 48000 & 60000\end{pmatrix}$$

$$K_{Gesamt}{}^{T} = \begin{pmatrix}125564 & 183162 & 243466\end{pmatrix}$$

Gesamtkosten bei der Herstellung von E_1, E_2, E_3 Endprodukten

$$K_{Gesamt}\begin{pmatrix}E_1 & E_2 & E_3\end{pmatrix}=K_{Gesamt}{}^{T}\cdot\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}125564 & 183162 & 243466\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix}$$

Selbstkosten= (Fixkosten + Gesamtkosten)*Gewinnfaktor

$$K_{Selbst}\begin{pmatrix}E_1 & E_2 & E_3\end{pmatrix}=\left(K_{Fix}+K_{Gesamt}{}^{T}\cdot\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix}\right)\cdot 1{,}3$$